12.2 基本比率謬誤

工作紙

題目

STEP II 1998，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s2-q12

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　試想像有 1000 人。當中有多少人患病？這些患者之中有多少人檢測呈陽性？健康的人之中又有多少人檢測呈陽性？

階段 1 貝葉斯定理（Bayes' theorem）

涵蓋：Frankie 的概率

想一想 設想有 1000 人。當中有多少人患病？這些患者之中又有多少人檢測呈陽性？有多少健康的人檢測呈陽性？

停一停，試一試 寫出 $\mathrm{P}(D \mid +) = \frac{\mathrm{P}(D \cap +)}{\mathrm{P}(+)}$，再按 Frankie 是否患病把 $\mathrm{P}(+)$ 拆開。

階段 2 第二次檢測

涵蓋：求 p

想一想 第二次檢測只施於在 AL 檢測中呈陽性的人。這羣人當中，患者佔多少？以此作為貝葉斯定理中新的起始概率，並令答案等於 $\frac{1}{2}$。

背後的數學

勝算與證據

以勝算（odds）來表達，貝葉斯定理最為清晰。D 的勝算是 $\mathrm{P}(D) : \mathrm{P}(\bar{D})$。一項證據 E 會把勝算乘以*似然比*（likelihood ratio）$\frac{\mathrm{P}(E|D)}{\mathrm{P}(E|\bar{D})}$：

$$\text{後驗勝算} = \text{先驗勝算} \times \text{似然比}.$$

這裏的先驗勝算是 $1:99$，而 AL 的似然比是 $0.9 \div \frac{1}{11} = 9.9$，於是後驗勝算為 $9.9:99 = 1:10$，即概率為 $\frac{1}{11}$。第二項獨立檢測的似然比若為 10（$p = 0.09$ 時的 STEP 正是如此），便會把勝算帶到 $1:1$。取對數之後，證據就可以*相加*：每項獨立檢測所貢獻的，是其似然比的對數。圖靈（Alan Turing）在布萊切利園（Bletchley Park）破解恩尼格瑪（Enigma）密碼電文時，用的正是這個方法，並以「ban」和「deciban」作為量度證據的單位。

檢控官謬誤

1999 年，事務律師 Sally Clark 被裁定謀殺兩名年幼兒子罪名成立，定罪的部分依據是一項證據，指同一家庭發生兩宗嬰兒猝死的機會是「7300 萬分之一」。姑且不論這個數字本身有錯（它假設兩宗死亡互相獨立，忽略了遺傳和環境因素），這個推論還把 $\mathrm{P}(\text{證據} \mid \text{無辜})$ 與 $\mathrm{P}(\text{無辜} \mid \text{證據})$ 混為一談。母親連殺兩子同樣極為罕見，真正應該比較的是這兩種解釋。皇家統計學會（Royal Statistical Society）發表公開信指出這個錯誤，她的定罪於 2003 年獲撤銷。當中的數學與本題完全相同。

Gigerenzer 與自然頻率

在 1990 年代，心理學家 Gerd Gigerenzer 指出，醫生若獲得以條件概率表達的檢測統計數字，遇到本題這類問題時大多錯得離譜；但同樣的資料若以自然頻率表達（「在 1000 名女性當中，有 10 人患乳癌；其中 8 人檢測呈陽性...」），大多數醫生都能答對。他的研究改變了許多國家向病人傳達醫療風險的方式。

延伸練習

1. **雪櫃裏的屍體。**試做 STEP II 1987，第 16 題（step.maths.org/questions/87-s2-q16）：貝葉斯定理應用於兩名可靠程度不同的證人，是 STEP 中較令人難忘的題目情境之一。
2. **要多罕見？**某項檢測的靈敏度（sensitivity）為 0.9，假陽性率為 $\frac{1}{11}$。疾病要有多普遍，陽性結果才表示患病的機會高於一半？
3. **重複檢測。**假如重複進行 AL 檢測，而在已知受測者真實狀況的條件下各次結果互相獨立，那麼兩次 AL 檢測均呈陽性後，患病的概率是多少？三次之後呢？
4. **篩查。**某項篩查計劃為一百萬人檢測某種病症，其患病率（prevalence）為 10 000 分之 1，所用檢測的靈敏度為 99%，假陽性率為 1%。有多少人會被告知可能患有此病症？當中又有多少人真的患病？

延伸閱讀

- **Gerd Gigerenzer, *Reckoning with Risk***（Penguin）。自然頻率、醫學檢測與法庭。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***（Pelican）。內容包括醫學篩查和 Sally Clark 案。
- **Sharon Bertsch McGrayne, *The Theory That Would Not Die***（Yale University Press）。貝葉斯定理的歷史，包括圖靈如何運用這個定理。

完整的引導式解答見第 12.2 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/base-rate.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com