12.19 平面上的隨機點

工作紙

題目

STEP II 2012，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s2-q13

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　一個平均值為 μ 的泊松隨機變量（Poisson random variable），取值 0 的概率是多少？

階段 1　附近沒有超級市場

涵蓋：圓內沒有超級市場

想一想　半徑為 y 的圓內的超級市場數目服從泊松分佈（Poisson distribution）。它的平均值（mean）是多少？它等於 0 的概率是多少？

階段 2 最近距離的分佈

涵蓋：Y 的分佈

停一停，試一試 $Y \geq y$ 表示在距離 y 之內沒有超級市場。那麼 $\mathrm{P}(Y < y)$ 是多少？求導（differentiate）便可得到概率密度函數（density）。

階段 3 平均值

涵蓋：平均值

想一想 把 $\mathrm{E}(Y)$ 寫成積分。作代換（substitution），使指數變成 $-\frac{1}{2}x^2$，然後利用題目給出的積分。

階段 4 **方差**

涵蓋：方差

> **想一想** 計算 $\mathrm{E}(Y^2)$ 時，被積函數（integrand）中 y 的冪次是奇數，所以代入 $u = \pi k y^2$。然後利用 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2$ 求方差（variance）。

背後的數學

平面上的泊松過程

強度（intensity）為 k 的空間泊松過程，是一種隨機散佈的點集，滿足：互不相交的區域內的點數彼此獨立，而面積為 A 的區域內的點數服從平均值為 kA 的泊松分佈。把極大量的點獨立而均勻地投放到一片極大的區域上，並保持適當的平均密度，得到的就是這種過程：這正是「稀有事件定律」（law of rare events），它同樣解釋了錯排（derangement）的現象（Section 9.8）。它是完全空間隨機性（complete spatial randomness）的自然模型，實際的分佈形態都以它為比較標準。*Clark–Evans 檢驗*（*Clark–Evans test*）由兩位生態學家於 1954 年提出，把觀察所得的平均最近鄰距離與 $\frac{1}{2\sqrt{k}}$ 比較：小得多表示有聚集現象（種子落在母樹附近），大得多則表示間隔規則（有領域行為的鳥類，或植物之間爭奪水分）。

三維的情況

在三維空間中作同樣的計算，可得到最近的恆星、分子或星系的距離滿足 $\mathrm{P}(Y > y) = e^{-\frac{4}{3}\pi k y^3}$。錢德拉塞卡（Subrahmanyan Chandrasekhar）在 1943 年用它來研究一顆恆星受隨機分佈的鄰近恆星所施的引力，物理學家則用它來計算氣體分子的平均自由程（mean free path）。

瑞利

密度函數 $\frac{y}{\sigma^2}e^{-y^2/(2\sigma^2)}$ 以瑞利勳爵（Lord Rayleigh）命名，他在 1880 年研究聲學理論時遇上它：它描述了許多相位隨機的波疊加後的振幅。若一點的兩個坐標是獨立的正態隨機變量（normal random variable），它也給出該點與原點距離的分佈，這是理解它為何在這裏出現的另一個角度（練習 3）。今天，它用來模擬流動電話訊號的衰落，因為訊號是沿着許多相位隨機的路徑到達接收器的。

延伸練習

1 **中位數。**求到最近超級市場的距離的中位數（median），並與平均值比較。

2 **第二近的。**求到第二近的超級市場的距離的分佈。（提示：$\mathrm{P}(Y_2 > y)$ 是在 y 以內最多只有一間超級市場的概率。）

3 **正態坐標。**若 U 和 V 是獨立的 $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$ 隨機變量，證明 $\sqrt{U^2+V^2}$ 的密度函數為 $\frac{r}{\sigma^2}e^{-r^2/(2\sigma^2)}$。$\sigma$ 取何值時會得到超級市場的分佈？

4 **Clark–Evans。**在一項調查中，一片面積 1 km^2 的樹林內有 400 棵樹，而一棵樹到其最近鄰的平均距離為 35 m。這與完全空間隨機性相符嗎？還是顯示有聚集或間隔的現象？

延伸閱讀

- **Peter Diggle, *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns***（Arnold）。這方面的標準參考書，載有 Clark–Evans 檢驗及其後續發展的方法。
- **John Kingman, *Poisson Processes***（Oxford University Press）。一本優美的短篇著作，討論任意維數的泊松過程。
- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes***（Oxford University Press），論泊松過程的一章。

完整的引導式解答見第 12.19 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/spatial-poisson.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com