12.18 無記憶性

工作紙

題目

STEP III 2021，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　對於 $x \geq 0$，$\mathrm{P}(X > x)$ 是甚麼？$\mathrm{P}(X > s + t \mid X > s)$ 又是甚麼？

階段 1　整數部分

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　$Y = n$ 當且僅當 $n \leq X < n + 1$。$\mathrm{P}(X > x)$ 是甚麼？

階段 2 小數部分

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試** $Z < z$ 表示 X 落在其中一個區間 $[n, n+z)$ 內。把這些區間的概率加起來，就得到一個等比級數（geometric series）。

階段 3 Z 的平均值

涵蓋：第 (iii) 部分

> **想一想** 可以對第 (ii) 部分的結果求導，得出 Z 的概率密度函數（density），再把它乘以 z 後積分；也可以利用 $\mathrm{E}(Z) = \int_0^1 \mathrm{P}(Z > z)\,\mathrm{d}z$。

階段 4　獨立性

涵蓋：第 (iv) 部分

> **想一想**　把 $\mathrm{P}(Y = n \text{ 且} z_1 < Z < z_2)$ 寫成一個關於 X 的概率，再與第 (i) 及第 (ii) 部分答案的乘積比較。

背後的數學

指數分佈為何特別

Y 與 Z 的獨立性直接來自 $e^{-\lambda(n+z)} = e^{-\lambda n}e^{-\lambda z}$，而這正是無記憶性質的另一副面貌。事實上，指數分佈是唯一沒有記憶的連續分佈：若對所有 $s, t \geq 0$ 都有 $\mathrm{P}(X > s+t) = \mathrm{P}(X > s)\mathrm{P}(X > t)$，則 $g(t) = \ln \mathrm{P}(X > t)$ 滿足 $g(s+t) = g(s) + g(t)$，而（對於單調（monotonic）的 g）這就迫使 $g(t) = -\lambda t$。正因如此，指數分佈可用來描述那些「隨機」發生、沒有任何累積過程的事件的等候時間：放射性衰變、顧客的到達、不會損耗的電子元件的故障。

最小值與等候時間悖論

若 X_1 與 X_2 是獨立的指數隨機變量，率分別為 λ_1 和 λ_2，則 $\mathrm{P}(\min > x) = e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 x}$，所以最小值服從率為 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的指數分佈。等候兩個獨立隨機事件中最先發生的一個，就如同以合併後的率等候單一事件（STEP III 2002 Q13，見練習）。無記憶性也解釋了*等候時間悖論*（*waiting-time paradox*）：若巴士隨機到站，平均間隔為 10 分鐘，則一位在隨機時刻到達的乘客平均要等 10 分鐘，而不是 5 分鐘，因為餘下的等候時間是無記憶的；而乘客到達時所處的那個間隔，平均長達 20 分鐘，因為較長的間隔更容易被碰上。

盧瑟福（Rutherford）與泊松過程（Poisson process）

1910 年，歐內斯特·盧瑟福與漢斯·蓋革（Hans Geiger）以 7.5 秒為一個時段，數算一個放射源所放出的阿爾法粒子（alpha particles），發現這些計數服從泊松分佈（Poisson distribution）；數學家 Harry Bateman 證明了，只要各次放射以恆定的率獨立發生，結果就理應如此。這樣一來，相鄰兩次放射之間的時間便服從指數分佈。*泊松過程*，即間隔服從指數分佈的一連串事件，如今已成為描述時間上隨機性的基本模型，應用於電話通話、保險索償以及神經元的放電；下一節 Section 12.19 會把它推廣到空間。

延伸練習

1 **兩條巴士路線。**試做 STEP III 2002，第 13 題（step.maths.org/questions/02-s3-q13）。這道題利用兩個指數隨機變量的最小值，求出等候下一班巴士的時間。

2 **離散的無記憶性。**證明幾何分佈是無記憶的：$\mathrm{P}(Y \geq m+n \mid Y \geq m) = \mathrm{P}(Y \geq n)$。

3 **等候時間悖論。**巴士的到站是一個率為 λ 的泊松過程。證明包含某固定時刻 t（t 很大）的那個間隔，其期望長度為 $\frac{2}{\lambda}$，即平均間隔的兩倍。

4 **Z 的密度。**求 Z 的概率密度（probability density），並就 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = 5$ 繪出其草圖。

延伸閱讀

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press），論及指數分佈與泊松過程。
- **Sheldon Ross, *Introduction to Probability Models***（Academic Press）。指數分佈、泊松過程與排隊。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Uncertainty***（Pelican）。日常生活中的隨機性與等候。

完整的引導式解答見第 12.18 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/memoryless.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com