12.17 巴拿赫的火柴盒

工作紙

題目

STEP II 1992，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s2-q16

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想 若司機在第 N 次伸手時發現太妃糖已經吃完，第 N 次伸手必須是甚麼？之前的 $N-1$ 次伸手又必須包含甚麼？

階段 1　發現太妃糖已經吃完

涵蓋：T 的概率

想一想　若她在第 N 次伸手時才發現太妃糖已經吃完，這一次伸手是要拿甚麼？之前的 $N-1$ 次伸手必須包含甚麼？

停一停，試一試　之前各次伸手可以有多少種不同的次序？已取薄荷糖的數目須符合甚麼條件，才能確保她沒有先發現薄荷糖已經吃完？

階段 2　發現薄荷糖已經吃完

涵蓋：M 的概率

> **想一想**　把太妃糖與薄荷糖的角色對調，重複同樣的論證。

階段 3　條件概率（conditional probability）

涵蓋：答案

> **想一想**　這兩種發現不可能在同一次伸手時同時發生。已知她在第 N 次伸手時有所發現，發現的是太妃糖吃完的概率是多少？

背後的數學

巴拿赫的火柴盒

在巴拿赫的版本中，每盒起初有 n 根火柴，選中每個口袋的機會均等。當他首次發現其中一盒空了，設 K 為另一盒的火柴數目。若 $K = k$，他必定已從空的那盒取了 n 根，從另一盒取了 $n - k$ 根，次序不拘，然後再一次伸手去拿空的那盒；而兩盒之中任何一盒都可以是空的那盒：

$$\mathrm{P}(K = k) = 2\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1} = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

這些概率隨 k 增大而遞減，唯一例外是 $\mathrm{P}(K=0)=\mathrm{P}(K=1)$（圖 12.17.1）。剩餘火柴數目的期望值（expected value）約為 $2\sqrt{n/\pi}-1$：若每盒有 50 根火柴，約為 7。這個 $\sqrt{n}$ 是經過 $2n$ 次隨機選擇之後，兩盒之間差距的典型大小，與生日問題（Section 9.9）和隨機漫步（random walk）中的平方根定律如出一轍。

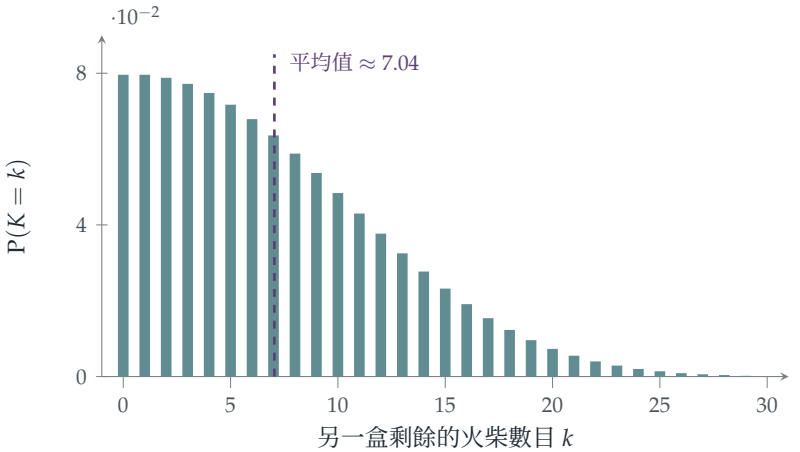

圖 12.17.1 每盒有 50 根火柴的巴拿赫火柴盒問題：首次發現其中一盒空了的時候，另一盒剩餘火柴數目的分佈。最可能的數值是 0 和 1，兩者概率相同，但平均值約為 7。

負二項分佈

在一連串獨立試驗（independent trials）中，每次試驗成功的概率為 p，則取得第 r 次成功所需的試驗次數服從負二項分佈（negative binomial distribution）：$\mathrm{P}(N=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}$。的士司機的問題，是兩個負二項過程（太妃糖和薄荷糖）之間的競賽，每個過程所需的「成功」次數都比該包糖的數目多一次。負二項分佈見於保險（索償宗數）、生態學（動物聚集分佈的數目）和遺傳學，往往用來代替泊松分佈（Poisson distribution），因為它更有彈性。

巴拿赫與蘇格蘭咖啡館

巴拿赫是泛函分析（functional analysis）的奠基人之一，他的數學研究有不少是在 Lwów（今稱 Lviv）的蘇格蘭咖啡館（Scottish Café）裏完成的。他和同事把問題寫在一本由侍應保管的筆記簿上，這就是《蘇格蘭書》（Scottish Book），解題獎品從一杯啤酒到一隻活鵝不等。斯坦豪斯是巴拿赫的恩師，他為了一篇向巴拿赫的吸煙習慣致意的演說，設計了這道火柴盒問題。最先在書刊中分析這個問題的，是費勒（William Feller）1950 年出版的著名概率論教科書。

延伸練習

1 **小規模情況。**設 $n = m = 1$ 及 $p = \frac{1}{2}$，列出所有可能的序列，並求 N 的分佈。

2 **巴拿赫公式。**對 $n = 1$ 和 $n = 2$，驗證 $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^{-(2n-k)} = 1$。

3 **並列最高。**證明在巴拿赫問題中，對每一個 n 都有 $\mathrm{P}(K = 0) = \mathrm{P}(K = 1)$。

4 **哪一包先吃完？**就的士司機的問題，當 $n = m = 2$ 及 $p = \frac{2}{3}$ 時，求太妃糖是首先被發現空了的那一包（不論何時發現）的概率。

延伸閱讀

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley），第 VI 章，正是這本書把巴拿赫問題介紹給全世界。
- **R. Daniel Mauldin (ed.), *The Scottish Book***（Birkhäuser）。收錄蘇格蘭咖啡館的問題，並附評註。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press），內容涉及負二項分佈。

完整的引導式解答見第 12.17 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/matchboxes.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com