12.16 順向與逆向的馬可夫鏈

工作紙

題目

STEP III 1996，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s3-q12

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　「每一行（row）之和為 1」這個條件是甚麼意思？各列（column）之和是否也是 1？

階段 1　一步轉移

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　以當前定理的類型作為條件，再運用全概率定律（law of total probability）。

階段 2 平穩分佈（stationary distribution）

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試** 對 $j = 1, 2, 3$ 寫出 $a_j = a_1 p_{1j} + a_2 p_{2j} + a_3 p_{3j}$，並有 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$。從哪一條方程入手最簡單？

階段 3 把鏈倒過來運行

涵蓋：第 (iii) 部分

> **想一想** q_{ij} 是在已知這條定理屬於類型 j 的條件下，前一條定理屬於類型 i 的概率。運用貝葉斯定理（Bayes' theorem），兩條定理的分佈都採用你在第 (ii) 部分得到的答案。

背後的數學

收斂至平衡

讓 Ecks 教授從任何一個定理開始；再證明 n 個之後，類型的分佈是 $\mathbf{a}_0 P^n$。對於像這樣的一條鏈，即每種類型都可以緊接在任何一種類型之後，不論起點為何，P^n 都會收斂至一個每一行均等於平穩分佈 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ 的矩陣。收斂的速度由 P 的其他特徵值（這裏是 0.2 和 0.1）決定，它們以幾何方式縮小：只需幾個定理之後，她的過去就被遺忘了。這個關於馬可夫鏈的*遍歷定理*（*ergodic theorem*）是大學二年級概率課程的核心結果，馬可夫鏈蒙地卡羅（Markov chain Monte Carlo）方法之所以行得通，靠的正是它：要從一個複雜的分佈中抽樣，就設計一條以該分佈為平穩分佈的馬可夫鏈，然後讓它運行一段長時間。

可逆性

逆向鏈 (q_{ij}) 與正向鏈 (p_{ij}) 並不相同：從她的定理的一份長紀錄中，你可以分辨出時間的方向。若一條鏈的逆向版本與正向版本一致，即對所有 i、j 都有 $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$，就稱為*可逆*（*reversible*）；網絡上的隨機遊走（random walk）以及處於熱平衡的物理系統的模型都屬此類。可逆性是一個威力強大的性質，因為它令平穩分佈很容易求出。

馬可夫與普希金

馬可夫（Andrey Markov）在 1906 年引入他的鏈，部分原因是要證明大數定律（law of large numbers）並不需要獨立性；當時他正與數學家 Pavel Nekrasov 爭論，後者聲稱獨立性是必需的。1913 年，馬可夫把他的想法應用於普希金（Pushkin）的詩體小說《葉甫蓋尼·奧涅金》（*Eugene Onegin*）的首 20 000 個字母，把每個字母分為元音或輔音，並證明每個字母的類型取決於前一個字母的類型，而這種關係可用一條兩個狀態的鏈很好地描述。這是史上第一次對文本作統計分析，也是所有預測輸入系統的始祖。

延伸練習

1 **兔子窩。**試做 STEP III 2003，第 13 題（step.maths.org/questions/03-s3-q13）：在一個正方形的四個頂點上的隨機遊走，每個頂點各有一個出口，以首步方程求解。

2 **兩步。**若 Ecks 教授上一個定理是新而正確的，求再下一個定理屬於三種類型的概率。

3 **特徵值。**證明 P 的特徵值為 1、0.2 和 0.1。

4 **可逆嗎？**檢查 Ecks 教授的鏈是否滿足 $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$。答案告訴你甚麼？

延伸閱讀

- **James Norris, *Markov Chains***（Cambridge University Press）。標準的大學本科教科書。
- **Olle Häggström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications***（Cambridge University Press）。篇幅短小，講馬可夫鏈蒙地卡羅尤其出色。
- **Brian Hayes,「First links in the Markov chain」**，*American Scientist* 101 (2013)。重述馬可夫對普希金作品的分析。

完整的引導式解答見第 12.16 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/markov.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com