12.15 滅絕還是爆發

工作紙

題目

STEP II 2003，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/03-s2-q12

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想 如果某一階段有兩個粒子，下一階段粒子數目的分佈是甚麼？

階段 1　先是兩個，再是兩個

涵蓋：聯合概率（joint probability）

想一想 $\mathrm{P}(X_1 = 2)$ 是多少？若有兩個粒子，下一代粒子數目的分佈（distribution）是甚麼？

階段 2 逆向推理

涵蓋：條件概率（conditional probability）

停一停，試一試 按 X_1 的取值分情況，求出 $\mathrm{P}(X_2 = 2)$。然後運用條件概率的定義，並令答案等於 $\frac{9}{25}$。

階段 3 種羣數目的期望

涵蓋：期望值（expectation）與極限（limit）

想一想 若某一代有 k 個粒子，下一代粒子數目的期望值是多少？對 k 取平均，然後解出 $\mathrm{E}(X_n)$ 的遞推關係（recurrence）。

背後的數學

滅絕的概率

當 $p = \frac{3}{4}$ 時，粒子總數的期望值無止境地增長。這是否表示羣體一定能存活下去？不一定：如果第一個粒子沒有後代（概率為 $q^2 = \frac{1}{16}$），這個族系便立即終結。設 e 為最終滅絕的概率。第一個粒子有 k 個後代，而每個後代的族系各自獨立地以概率 e 滅絕，所以

$$e = q^2 + 2pq\,e + p^2 e^2 = (q + pe)^2 = \mathrm{G}(e),$$

其中 $\mathrm{G}(s) = (q + ps)^2$ 是後代數目的*概率生成函數*（probability generating function）。滅絕概率是 G 的一個不動點：事實上是最小的非負不動點。當 $p = \frac{3}{4}$ 時，由 $(1+3e)^2 = 16e$ 得 $9e^2 - 10e + 1 = 0$，所以 $e = \frac{1}{9}$ 或 1，而滅絕概率是 $\frac{1}{9}$。當 $p = \frac{1}{4}$ 時，在 $[0,1]$ 內唯一的不動點是 $e = 1$：滅絕是必然的（圖 12.15.1）。

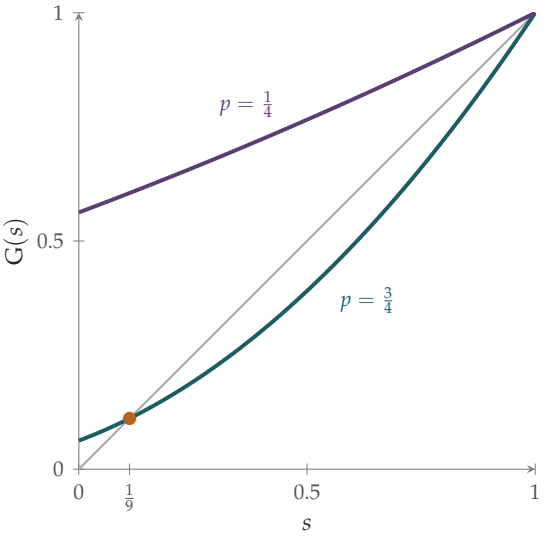

圖 12.15.1　後代數目的生成函數 $G(s) = (q + ps)^2$ 與直線 $y = s$。滅絕概率就是兩者相交的最小一點。當 $p = \frac{1}{4}$（紫紅色，平均值 $\frac{1}{2}$）時，該點是 $s = 1$：滅絕是必然的。當 $p = \frac{3}{4}$（藍綠色，平均值 $\frac{3}{2}$）時，該點是 $s = \frac{1}{9}$（琥珀色）：羣體以概率 $\frac{8}{9}$ 永遠存活下去。

臨界門檻

一般而言，如果後代數目的平均值小於 1，分支過程必然滅絕；平均值等於 1 時也是如此，唯一的例外是每個個體都恰好有一個後代的平凡情況（這時族系只是一個接一個地永遠延續下去）；如果平均值大於 1，則分支過程以正概率存活下去。後代數目的平均值就是流行病學中的*繁殖數*（reproduction number）R：$R > 1$ 的疫症有可能大規模爆發，但即使如此，早期的爆發仍可能純粹因為偶然而無疾而終，其概率正好由上面的不動點方程給出。在核物理學中，如果每次裂變平均恰好引發另一次裂變，連鎖反應就處於*臨界*（critical）狀態，而操作反應堆的學問，就在於讓它一直保持在這個狀態。

高爾頓、Watson 與 Bienaymé

高爾頓的問題在 1874 年由 Henry William Watson 牧師作答，但答案有部分是錯的：他找到了不動點方程，卻漏掉了第二個根，因而斷定每個姓氏最終都會失傳。其實正確的分析早在 1845 年已由法國統計學家 Irénée-Jules Bienaymé 提出，只是他的研究一直被人遺忘，直到 1970 年代才重見天日。這個模型現在稱為*高爾頓—Watson 過程*（Galton–Watson process，有時稱為 Bienaymé–Galton–Watson 過程），是每一門隨機過程（random processes）課程中的核心例子。

延伸練習

1 **一般情況下的滅絕。**設後代數目的分佈為 $\mathrm{B}(2, p)$，證明當 $p \le \frac{1}{2}$ 時滅絕概率為 1，而當 $p > \frac{1}{2}$ 時滅絕概率為 $\left(\frac{q}{p}\right)^2$。

2 **方差（variance）。**證明 $\mathrm{Var}(X_n)$ 滿足 $\mathrm{Var}(X_n) = (2p)^2\mathrm{Var}(X_{n-1}) + 2pq\,\mathrm{E}(X_{n-1})$，並求 $p = \frac{1}{2}$ 時的方差。

3 **在第 n 代或之前滅絕。**設 $e_n = \mathrm{P}(X_n = 0)$。證明 $e_n = \mathrm{G}(e_{n-1})$，並就 $p = \frac{3}{4}$ 計算 e_1、e_2、e_3。它們是否趨近 $\frac{1}{9}$？

4 **姓氏。**如果每個男人有 0、1、2 或 3 個兒子的概率各為 $\frac{1}{4}$，他的姓氏最終失傳的概率是多少？

延伸閱讀

- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes***（Oxford University Press），論分支過程的一節。
- **Adam Kucharski, *The Rules of Contagion***（Profile）。講述繁殖數與疫症爆發，適合一般讀者。
- **David Kendall, “Branching processes since 1873”**，*Journal of the London Mathematical Society* 41 (1966)。講述這段歷史，包括 Bienaymé 的貢獻。

完整的引導式解答見第 12.15 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/branching.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com