12.14 混合策略

工作紙

題目

STEP I 1989，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/89-s1-q16

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　寫出一個表，列出每一對猜測之下 B 贏得的金額（B 的猜測列於左側，A 的猜測列於頂端）。

階段 1　對手固定猜同一個數

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　就每一對猜測，把 B 的贏款列成一個表。如果 A 每次都說同一個數，B 應該選表中哪一項？

階段 2 對手隨機猜測

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 如果 A 以概率（probability）$\frac{1}{3}$ 猜每一個數，那麼當 B 說 j 時，B 的期望收益（expected gain）是多少？沿着表中的一行取平均。

階段 3　一般情況

涵蓋：第 (iii) 部分

> **停一停，試一試**　把 B 的期望贏款按 A 的猜測歸類整理，得出 a_1、a_2、a_3 的係數（coefficients）。你能否選取各個 b_j，使這三個係數全部為零？檢查一下這三條方程是否獨立（independent）。

背後的數學

極小極大定理

在一個二人零和（zero-sum）博弈中，設得失矩陣（payoff matrix）為 M，B 選取概率 $\mathbf{b}$，A 選取概率 $\mathbf{a}$，則 B 贏得金額的期望值是 $\mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a}$。馮紐曼的極小極大定理指出

$$\max_{\mathbf{b}} \min_{\mathbf{a}} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a} = \min_{\mathbf{a}} \max_{\mathbf{b}} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a}.$$

用文字說：B 預先公開自己的隨機化策略而仍能保證取得的金額，等於 A 預先公開自己的策略而能把 B 壓制到的金額。這個共同的數值稱為博弈的*值*（value）。在本題中，由反對稱性可知博弈的值是 0，而策略 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 對雙方都是最優的。這個定理可用線性代數（linear algebra）和凸性（convexity）證明（它等價於線性規劃（linear programming）的對偶定理），而它推廣到多人博弈的版本，即*納殊均衡*（Nash equilibrium），為納殊（John Nash）贏得諾貝爾經濟學獎。

為甚麼要隨機化？

這裏的隨機性無關運氣，而是關乎資訊。如果 B 的選擇可以被預測，A 便能加以利用；B 以恰當的概率隨機選擇，既令自己的選擇無從預測，又確保任何預測都幫不了對手。現實中的例子包括足球的十二碼罰球——對職業球員的研究發現，主射球員和守門員在左右兩邊之間隨機選擇，比例與博弈論的最優值十分接近——以及網球的發球。

馮紐曼 1928 年的論文

馮紐曼在 1928 年證明了極小極大定理，論文題為「On the theory of games of strategy」（論策略博弈的理論），研究動機來自撲克，因為撲克中的「偷雞」（bluffing，即虛張聲勢）正是一種隨機化。1944 年，他與經濟學家 Oskar Morgenstern 出版了 *Theory of Games and Economic Behavior*（博弈論與經濟行為），博弈論自此成為一門學科。馮紐曼後來憶述，他一直視極小極大定理為關鍵結果，沒有它，就沒有值得發表的博弈理論。

延伸練習

1 **A 的最佳應對。**若 B 採用 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$，證明 A 的每一種策略所得的期望值都是 0。若 B 改用 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$，求 A 的最佳應對。

2 **包剪揼。**寫出「包剪揼」的得失矩陣，並求最優策略。為甚麼這裏的最優策略是均勻的，而本題的卻不是？

3 **唯一性。**證明 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 是 B 能保證不輸的唯一策略。（提示：它必須令 X、Y、Z 全部非負；利用 $X + 2Y + Z = 0$。）

4 **改動後的博弈。**若相差 2 時的罰款由 £2 改為 £3，求最優策略。

延伸閱讀

- **Ken Binmore, *Playing for Real***（Oxford University Press）。一本詳盡而平易近人的博弈論入門書。
- **Avinash Dixit & Barry Nalebuff, *The Art of Strategy***（Norton）。以體育和商業的例子講解博弈論。
- **William Poundstone, *Prisoner's Dilemma***（Anchor）。馮紐曼、博弈論與冷戰。

完整的引導式解答見第 12.14 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/mixed-strategies.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com