12.13 三人決鬥

工作紙

題目

STEP II 1995，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/95-s2-q12

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　在一場二人決鬥中，Percy 先擲。他要麼一擲即中，要麼兩人都擲失，於是局面完全重演。試寫出一條關於 Percy 勝出概率（probability）的方程。

階段 1　決鬥

涵蓋：二人決鬥

> **想一想**　Percy 先擲。要麼他一擲即中，要麼兩人都擲不中，局面回到起點。就他獲勝的概率（probability）列出一條方程，然後求解。

階段 2 Algernon 的三個選擇

涵蓋：第 (i)、(ii)、(iii) 部分

> **停一停，試一試** 在每種情況下，剩下的是誰？下一個由誰來擲？套用決鬥公式時，要認清先擲的是誰。在情況 (iii) 中，按 Bertie 是否擲中 Cuthbert 分開討論。

階段 3 建議

涵蓋：Algernon 的最佳策略

? **想一想** Algernon 能選擇的是瞄準誰，而不是擲中誰。假如他瞄準 Cuthbert，把擲不中的可能也計算在內，他整體的勝算是多少？再與故意擲失作比較。

背後的數學

策略與博弈論

三人決鬥展示了博弈論的核心思想：最佳行動取決於其他參與者會如何回應。擲中最危險的對手 Cuthbert 看似理所當然，但這樣做會改變局勢，反而對 Algernon 不利。在本題中，Bertie 和 Cuthbert 的策略（strategy）是固定的（他們互相瞄準）；在完整的博弈論分析中，每個參與者都會自行選擇策略，並且知道其他人也在這樣做。這類分析始於馮·諾伊曼（John von Neumann）與摩根斯坦（Oskar Morgenstern）在 1944 年的工作，以及納殊（John Nash）在 1950 年的工作，如今已成為經濟學、演化生物學和政治學的基礎。

強大反成弱點

三人決鬥中誰會勝出？若 Algernon 採用最佳方案，Algernon 勝出的概率是 $\frac{226}{475}$，Bertie 是 $\frac{135}{475}$，Cuthbert 是 $\frac{114}{475}$。準頭最好的人最不可能倖存，因為凡是可以選擇目標的人都會瞄準他。同樣的規律也見於有多名候選人的選舉、企業之間的競爭，以及自然界：最強的競爭者可能成為首個被攻擊的目標。Martin Shubik 在 1950 年代把三人決鬥引入博弈論，並藉此探問：最適者是否必然生存？

延伸練習

1 **Bertie 與 Cuthbert。**驗證：若 Algernon 故意擲失，Bertie 勝出的概率是 $\frac{135}{475}$，Cuthbert 勝出的概率是 $\frac{114}{475}$。

2 **準頭較好的投手。**假如 Algernon 擲中的概率是 a 而不是 $\frac{2}{5}$，當 a 取哪些值時，故意擲失仍然是他最佳的第一步？

3 **Bertie 應該瞄準 Cuthbert 嗎？**已知 Algernon 故意擲失，Bertie 瞄準 Cuthbert 而不瞄準 Algernon，是否對他自己有利？（假設 Cuthbert 的行為不變。）

4 **投擲次數有限的決鬥。**在一場每人只可擲兩次的二人決鬥中，求 Percy 勝出的概率，並與不限次數的決鬥比較。

延伸閱讀

- **D. Marc Kilgour & Steven Brams，「The truel」**，*Mathematics Magazine* 70 (1997)。一篇淺白易讀的三人決鬥綜述。
- **Avinash Dixit & Barry Nalebuff，*Thinking Strategically***（Norton）。寫給一般讀者的博弈論讀物，當中也談到三人決鬥。
- **Ken Binmore，*Game Theory: A Very Short Introduction***（Oxford University Press）。

完整的引導式解答見第 12.13 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/truel.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com