12.12 何時停止尋找

工作紙

題目

STEP I 2001，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s1-q14

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　在隨機次序之下，全體之中最好的應徵者落在最先面試的 n 位之中的概率是多少？

階段 1　前 n 人中的最佳者就是全體最佳者

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　前 n 人中的最佳者，在甚麼情況下同時是全體最佳者？全體最佳者出現在各個位置的可能性是否均等？

階段 2 最佳或次佳

涵蓋：第 (ii) 部分，以及 $N = 4$、$n = 2$ 的情況

> **停一停，試一試** 前 n 人中的最佳者是全體次佳者，當且僅當次佳者在前 n 人之中，而最佳者不在其中。求出這個概率（probability），再與第 (i) 部分的結果相加。對於 $N = 4$，列出最優秀的兩位應徵者（candidate）可能身處的位置。

階段 3 最優策略

涵蓋：題目以外

? **想一想** 先拒絕最初的 r 位應徵者，然後錄取其後第一位比他們全部都優秀的人。若最佳者位於第 $k > r$ 位，他在甚麼情況下會被選中？以 $k-1$ 代替 N，套用第 (i) 部分的結果。

背後的數學

最優停止

祕書問題（secretary problem）是*最優停止*（optimal stopping）的奠基例子：根據隨時間陸續到來的資訊，決定何時採取行動，以使期望回報最大。可以證明，在*所有*策略之中（而不只是「先拒絕 r 位，然後取錄下一位至今最佳者」這一類），這種閾值規則（threshold rule）是最優的，論證的方法是由最後一位應徵者開始向前逆推。同樣的數學也決定了何時賣出股票、何時行使金融期權，以及應該花多久去找泊車位。一個值得注意的特點是，在極限之下答案與 N 無關：不論應徵者有一百位還是一百萬位，你成功的概率都是 $\frac{1}{e}$。

各種變化

如果你只要選中頂尖兩位應徵者的其中一位便滿意，最佳策略大約有 57% 的機會成功。如果你想做到的不是使選中最佳者的機會最大，而是使所選應徵者的期望*名次*最優，最優策略便複雜得多，而期望名次趨向大約 3.87（Chow、Moriguti、Robbins 和 Samuels，1964）。如果你有一定的概率可以回頭召回已被拒絕的應徵者，又或者你知道應徵者分數的分佈（即「完全資訊」問題），答案又會不同。練習中的雪糕題是最簡單的情形：只拒絕一個，然後取下一個比它好的。

是誰解決的？

這個問題在 1950 年代流傳於數學家之間，馬丁·加德納（Martin Gardner）於 1960 年以「googol 遊戲」之名把它普及開來（在紙條上寫下數字；你的對手逐張翻開，並且必須在最大的那個數出現時停下）。Thomas Ferguson 的文章「Who solved the secretary problem?」(1989)追溯了它錯綜複雜的歷史；有一種說法指，天文學家開普勒(Johannes Kepler）在 1611 年挑選第二任妻子時，會見了十一位人選，最後向第五位求婚。

延伸練習

1 **雪糕。**試做 STEP II 2006，第 13 題（step.maths.org/questions/06-s2-q13）：這是祕書問題的小型版本，規則很簡單。拒絕第一個，然後取第一個勝過它的。

2 **較小的 N。**當 $N = 4$ 時，求 r 的最佳值和成功的概率。用列舉法驗算。

3 **最佳或次佳。**利用第 (ii) 部分，論證「最先 n 位中的最佳者是頂尖兩位之一」的可能性遠高於「最先 n 位中的最佳者就是最佳者」。這對於選中頂尖兩位之一的策略有甚麼啟示？

4 **精確的最大值。**當 $N = 10$ 時，從圖中驗證 $r = 3$ 是最優的。當 $N = 100$ 時，證明 $r = 37$ 是最優的（準確至四位小數，$r = 36$、37、38 的成功概率分別是 0.3710、0.3710、0.3708）。

延伸閱讀

- **Thomas Ferguson，「Who solved the secretary problem?」**，*Statistical Science* 4 (1989)。歷史與各種變化；可在網上免費閱讀。
- **Brian Christian & Tom Griffiths，*Algorithms to Live By***（William Collins）。把最優停止及其他算法應用於日常決策。
- **Martin Gardner，*New Mathematical Diversions***（Mathematical Association of America）。googol 遊戲。

完整的引導式解答見第 12.12 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/secretary.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com