12.11 郵票、杯子與 e

工作紙

題目

STEP I 1996，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s1-q13

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　若 $N = 4$，必須發生甚麼事？概率是多少？

階段 1　分佈（distribution）

涵蓋：N 的分佈

想一想　要使 $N = k$，Jim 必須在杯子數目為 $2, 3, \ldots, k-1$ 時全部猜對，而在有 k 個杯子時猜錯。把這些概率（probability）相乘。

階段 2 期望值（expectation）

涵蓋：期望值

> **停一停，試一試** 化簡 $k \cdot \frac{k-1}{k!}$。你得到的是哪一個著名的級數（series）？

階段 3　方差（variance）

涵蓋：方差

> ? **想一想**　利用 $k^2 = k(k-1) + k$ 求出 $\mathrm{E}(N^2)$，或者先求 $\mathrm{E}\big(N(N-1)\big)$。

背後的數學

換了裝扮的同一個分佈

從 $[0,1]$ 中均勻（uniformly）地隨機選取數 $U_1, U_2, \ldots$，並設 M 為令它們的總和超過 1 所需的個數。首 k 個數之和小於 1 的概率，就是區域 $\{u_1 + \cdots + u_k < 1, u_i \geq 0\}$ 的體積，即 $\frac{1}{k!}$（面積為 $\frac{1}{2}$ 的三角形、體積為 $\frac{1}{6}$ 的四面體，如此類推）。所以

$$\mathrm{P}(M > k) = \frac{1}{k!}, \qquad \mathrm{P}(M = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!},$$

正正就是 N 的分佈。在兩個問題中都有 $\mathrm{P}(N > k) = \frac{1}{k!}$：就杯子而言，這是連續猜中 $k-1$ 次的概率。利用 $\mathrm{E}(N) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}(N > k)$（Section 9.9 中的一條公式），一行便得出 $\mathrm{E}(N) = \sum \frac{1}{k!} = e$。

為何 e 不斷出現

每當概率中含有 $\frac{1}{k!}$，不論它來自 k 件物件按某個特定次序排列、k 個概率依次為 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ 的相繼事件，還是單純形（simplex）的體積，對 k 求和都會產生指數級數。錯排（derangements，Section 9.8）給出 $\sum \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$；這裏我們則有 $\sum \frac{1}{k!} = e$。至於形如 $\big(1 - \frac{1}{n}\big)^n \to e^{-1}$ 的極限（limit），它們源自大量獨立而不大可能發生的事件，正好解釋了祕書問題和泊松分佈中的 e。

蒙地卡羅 e

「總和超過 1」這個問題提供了一個以實驗估計 e 的方法：產生隨機數，數一數需要多少個才超過 1，重複多次，然後取平均值。它是蒲豐投針（Buffon's needle，Section 12.20）的近親，後者用來估計 π。這類蒙地卡羅（Monte Carlo）方法以賭場命名，利用隨機抽樣來估計難以直接計算的量；如今它們廣泛應用於科學的各個範疇，由粒子物理學到金融，主要用於計算高維積分。

延伸練習

1 **生成函數。**證明 $\mathrm{E}(t^N) = 1 + (t-1)e^t$，並用它求 $\mathrm{E}(N)$ 和 $\mathrm{E}(N(N-1))$。

2 **尾部公式。**對於取非負整數值的隨機變量（random variable），證明 $\mathrm{E}(N) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(N > k)$，並用它一行求出 $\mathrm{E}(N)$。

3 **由一個杯子開始。**假如遊戲由一個杯子開始（Jim 不可能猜錯），分佈會有甚麼改變？價錢的期望值是多少？

4 **單純形。**證明 $\{u_1 + u_2 + u_3 < 1, u_i \geq 0\}$ 的體積為 $\frac{1}{6}$，並用歸納法（induction）證明 k 維的情況為 $\frac{1}{k!}$。

延伸閱讀

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。e 的歷史，包括它在概率中的各次現身。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press），關於生成函數。
- **Paul Nahin, *Digital Dice***（Princeton University Press）。以蒙地卡羅模擬解決的概率謎題。

完整的引導式解答見第 12.11 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/stamps-and-e.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com