12.10 把繩頭繫起來

工作紙

題目

STEP III 2008，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/08-s3-q13

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　把兩個繩頭綁在一起之後，還剩下多少條繩子（結成環的不再算作一「條」）？這是否取決於有沒有結成環？

階段 1　第一個結

涵蓋：第一步

> **想一想**　繩端共有 $2n$ 個。任選其中一個：其餘的繩端當中，有多少個與它打結後會形成一個環？

階段 2 所有的結

涵蓋：環的數目的期望值（expected number）

> **停一停，試一試** 每打一個結之後，不論有否形成環，還剩下多少段各有兩個繩端的繩子？那麼，在剩下 k 段繩子時所打的那個結，形成環的概率（probability）是多少？把各個期望值加起來。

階段 3 方差

涵蓋：方差（variance）

> **想一想** 某一個結形成環的概率，是否取決於之前各個結的結果？如果不是，你對各個方差可以作出甚麼結論？

階段 4　四萬條繩子

涵蓋：$n = 40\,000$ 的情況

> **想一想**　把 $1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ 寫成直至 $2n$ 為止的所有倒數（reciprocal）之和，減去分母為偶數的那些。利用 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \approx \ln m$。

背後的數學

對數增長

繩環數目的期望值以 $\frac{1}{2}\ln n$ 的速度增長，而方差與平均值相當接近（兩者都是一些很小的概率之和）。根據中心極限定理（central limit theorem）（Section 12.24），當 n 很大時，繩環數目近似服從正態分佈（normal distribution），平均值和方差都約為 $\frac{1}{2}\ln(4n)$。若有 40 000 條繩子，你通常會得到 2 至 11 個環。

隨機置換的循環

同一個對數也出現在 n 件物件的隨機置換（random permutation）的循環（cycle）數目之中：平均有 $H_n \approx \ln n$ 個（繩子問題是它的近親，對應的是 $\frac{1}{2}\ln n$）。隨機置換的循環很少：通常有一個巨大的循環包含了大部分元素，而最大循環所佔元素的比例，平均約為 0.62，即 Golomb–Dickman 常數。隨機地把繩子綁在一起，情況也是一樣：大部分繩子最終都落在一兩個長圈之中。這些事實屬於隨機組合結構（random combinatorial structures）的研究範圍，而這門學問又與數論（number theory）有關（一個隨機整數的質因數，其表現就像一個隨機置換的循環）。

隨機紐結與聚合物

綁繩子問題是某些物理系統的簡化模型。溶液中的長鏈聚合物分子會首尾相接，形成環和鏈，而成環的統計規律也遵從類似的法則。在紐結理論（knot theory）中，數學

家問的是一個更難的問題：一個隨機的閉合圈有多大機會打了結？對於很長的隨機圈，答案趨向 1，這個結果由 De Witt Sumners 和 Stuart Whittington 於 1988 年證明。

延伸練習

1 **小的情況。**對於 $n = 2$，列出所有可能情況，並驗證繩環數目的期望值是 $\frac{4}{3}$。

2 **一個大圈。**證明整個過程最終得到單一個包含所有繩子的圈的概率是 $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)$，並證明當 n 很大時，這個概率約為 $\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$。（提示：找出這個乘積與 $\binom{2n}{n}$ 的關係。）

3 **置換的循環。**證明 n 件物件的隨機置換的循環數目的期望值是 H_n，方法是逐個元素地構造這個置換（即「中國餐館」構造法）。

4 **方差。**證明 $\operatorname{Var}(R) = \mathrm{E}(R) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$，並證明被減去的那個和趨向 $\frac{\pi^2}{8}$。

延伸閱讀

- **Peter Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection***（A K Peters），書中收錄了這道綁繩子謎題。
- **Richard Arratia, Andrew Barbour & Simon Tavaré, *Logarithmic Combinatorial Structures***（European Mathematical Society）。講述循環、質數與隨機結構，可留待日後閱讀。
- **Colin Adams, *The Knot Book***（American Mathematical Society）。紐結理論入門，內容包括隨機紐結。

完整的引導式解答見第 12.10 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/loose-ends.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com