12.1 精確地取條件

工作紙

題目

STEP I 2007，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/07-s1-q13

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想 從十一塊圓片中取出四塊。對於「四塊都有編號」這個事件（event）而言，抽取的次序有沒有影響？四塊圓片組成的等可能（equally likely）組合共有多少個？

階段 1 沒有條件

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 四個圓牌組成的 $\binom{11}{4}$ 個等可能（equally likely）組合之中，有多少個是四個圓牌全部有編號的？

階段 2 首先抽出 3 號

涵蓋：第 (ii) 及 (iii) 部分

停一停，試一試 一旦首先抽出的是 3 號圓牌，其餘三個圓牌便是從餘下十個之中隨機抽出的三個。這十個之中有多少個有編號？數一數你想要的組合有多少個。

階段 3 3 號已被抽出（在某個時刻）

涵蓋：第 (iv) 部分

想一想 3 號是何時抽出的，有沒有關係？已知它在四個圓牌之中，對於其餘三個，你可以說些甚麼？

階段 4　首先抽出的是有編號的圓牌

涵蓋：第 (v) 部分

? **想一想**　已知第一個圓牌有編號，不論是哪個號碼，其餘三個圓牌是甚麼？

階段 5 抽出了有編號的圓牌

涵蓋：第 (vi) 部分

> **停一停，試一試** 這個條件（condition）有所不同：它沒有告訴你哪一個圓牌有編號。數一數至少有一個有編號圓牌的四個圓牌組合有多少個，以及恰好有兩個的又有多少個。

背後的數學

男孩還是女孩的謎題

馬丁·加德納（Martin Gardner）在 1959 年提出這個問題：史密斯先生有兩個孩子，其中至少一個是男孩；兩個都是男孩的概率是多少？列出等可能的家庭組合 BB、BG、GB、GG，剔除 GG 後剩下三個，其中一個是 BB：答案是 $\frac{1}{3}$。但如果我們知道年長的孩子是男孩，答案就是 $\frac{1}{2}$。這正是我們這道題第 (vi) 和第 (v) 部分的縮影。加德納後來承認，他最初提出的問題含糊不清：答案取決於我們是怎樣得知有一個男孩的。如果我們隨機遇上其中一個孩子，而他是男孩，答案是 $\frac{1}{2}$；如果我們問「你有沒有至少一個兒子？」而對方回答有，答案就是 $\frac{1}{3}$。概率取決於產生資訊的過程，而不僅是資訊本身。

蒙提霍爾問題（Monty Hall）

概率中爭議最多的謎題，背後也是同一個教訓。在一個遊戲節目中，三道門的其中一道後面有一輛汽車。你選了 1 號門。主持人知道汽車在哪裏，他必定會打開另外兩道門的其中一道，讓你看到門後是一隻山羊，並且必定會讓你選擇是否換門；當汽車就在你所選的門後，以致他有選擇餘地時，他會在另外兩道門之間隨機挑選。他打開了 3 號門，並讓你改選 2 號門。你應該換嗎？應該：換門後勝出的概率是 $\frac{2}{3}$。主持人選哪道門並非隨機；這取決於汽車的位置，因而帶有資訊。確切的規則十分重要。如果主持人只要可以就一定打開 3 號門，那麼看到 3 號門打開，1 號門和 2 號門就變得同樣可能，換門後勝出的概率只有 $\frac{1}{2}$；然而，一個事先決定必定換門的參賽者，仍然有 $\frac{2}{3}$ 的機會勝出，因

為換門勝出，恰好就是第一次選錯的時候。Marilyn vos Savant 在 1990 年於雜誌專欄中給出這個答案時，收到數以千計的來信指她錯了，其中有些更是出自數學家之手。用電腦模擬一次，或者仔細列出各個等可能的情況，就可以解決爭議。

貝葉斯（Bayes）與拉普拉斯（Laplace）

條件概率（conditional probability）的系統化基礎，是由托馬斯·貝葉斯（Thomas Bayes）和皮埃爾–西蒙·拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace）奠定的：貝葉斯的論文在他死後於 1763 年發表，而拉普拉斯則在 1774 年以一般形式寫出了現稱為貝葉斯定理（Bayes' theorem）的法則。安德烈·柯爾莫哥洛夫（Andrey Kolmogorov）在 1933 年提出的公理（axioms），是現今每一個大學課程的起點，當中定義 $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$，而概率論的其餘部分都建基於這個定義之上。下一節 Section 12.2 會展示貝葉斯定理在實際應用中的作用。

延伸練習

1 **推廣。**設有 b 塊空白圓片和 n 塊有編號的圓片，從中抽出 k 塊，證明 (iv) 和 (v) 的答案永遠相等，並求出 (vi) 在甚麼情況下與它們相等。

2 **星期二出生的男孩。**一個家庭有兩個孩子，其中至少一個是在星期二出生的男孩。證明兩個都是男孩的概率是 $\frac{13}{27}$。（列出 14×14 個等可能的情況，或者用巧妙的方法計數。）

3 **蒙提霍爾問題。**列出各個結果，驗證 $\frac{2}{3}$ 這個答案。如果主持人不知道汽車在哪裏，隨機打開另外兩道門的其中一道，而門後剛好是一隻山羊，那又如何？

4 **兩張 A。**一手 13 張的橋牌中至少有一張 A。這手牌中至少有兩張 A 的概率是多少？試與已知這手牌中有葵扇 A 時的概率比較。

延伸閱讀

- **Jason Rosenhouse, *The Monty Hall Problem***（Oxford University Press）。講述這道謎題、它的歷史，以及它的眾多變化。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press），有關條件概率的各章。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***（CRC Press；可於網上免費閱讀）。對條件概率的處理十分出色，並載有許多悖論。

完整的引導式解答見第 12.1 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/conditioning.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com