11.9 安全拋物線

工作紙

題目

STEP II 2014，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s2-q10

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想 用 t 表示 x 和 y，然後消去 t。怎樣用 $\lambda = \tan\theta$ 表示 $\sec^2\theta$？

階段 1　固定 x，改變角度

涵蓋：給定 x 上方的最大高度 Y

停一停，試一試 固定 $x > 0$，並把 y 看成只是 λ 的函數。它是哪一類函數？求出它的最大值。（或者：關於 λ 的二次方程（quadratic）何時有實根（real root）？）

階段 2 區域

涵蓋：圖像與可到達的區域

想一想 畫出曲線 Y 的草圖：它的頂點（vertex）在哪裏？它在何處與地面相交？哪些點可以到達？經過曲線下方的一點的軌跡（trajectory）有多少條？經過曲線上的一點的又有多少條？

階段 3　最遠的點

涵蓋：與 O 的最遠距離

> **想一想**　最遠的點位於邊界（boundary）上。把 x^2+Y^2 寫成 $X=x^2$ 的函數。它是遞增還是遞減？它在邊界上哪一處最大？

背後的數學

包絡線

單參數曲線族（one-parameter family of curves）$\mathrm{F}(x,y,\lambda)=0$ 往往有一條包絡線：一條與族中每個成員都相切的曲線。求法是聯立解 $\mathrm{F}=0$ 和 $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda}=0$，這正是我們對 λ 求 y 的極大值時所做的事。包絡線在科學中隨處可見。一杯咖啡表面上那條明亮的光曲線，就是反射光線的包絡線，稱為焦散線（caustic）。超音速飛機的音爆，由它所發出聲波的包絡面傳送，那就是馬赫錐（Mach cone）。而在 Section 8.1 中，一個微分方程（differential equation）的一族解的包絡線，本身也是一個解，即所謂的「奇異」解。

焦點

安全拋物線有一個奇妙的性質：它的焦點就是發射點 O。（拋物線 $y=c-\frac{x^2}{4c}$ 的焦點位於原點；這裏 $c=\frac{u^2}{2g}$。）每條軌跡也都是拋物線，而所有軌跡的焦點都落在以 O 為圓心、半徑為 $\frac{u^2}{2g}$ 的圓上。這可以用能量來解釋：拋射體在高度 y 時的速率是 $\sqrt{u^2-2gy}$，在準線（directrix）的高度 $\frac{u^2}{2g}$ 處為零；而以同一條直線為準線並且經過 O 的拋物線，其焦點都在那個圓上。

托里拆利的拋物線

伽利略（Galileo）在 1609 年前後證明了拋射體沿拋物線運動，並且在水平地面上，最大射程出現在 45°。他的學生托里拆利（Evangelista Torricelli）以發明氣壓計而較為人

熟悉，他在 1644 年的著作 *De motu gravium* 中發現了安全拋物線。對炮手來說，它回答了一個實際問題：究竟哪些目標在射程之內？托里拆利還證明了，經過給定一點的軌跡成對出現，兩者的角度關於該點的方向與鉛垂線之間的角平分線對稱，這就是本題中的高射和低射。

延伸練習

1 **爆開的煙花。**試做 STEP II 2023，第 10 題（載於 OCR 提供下載的 2023 年試卷，www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip）。這道題把爆炸產生的粒子看成一個球面，其球心作自由下落，並找出一顆沿着安全拋物面（paraboloid of safety）運動的粒子。

2 **向斜坡上發射。**求速率為 u 的拋射體沿傾角為 β 的斜面向上發射時的最大射程。（提示：直線 $y = x\tan\beta$ 與安全拋物線在哪裏相交？）證明最佳角度平分斜坡與鉛垂線之間的夾角。

3 **兩個角度。**證明能到達點 P 的兩個角度，關於 OP 與鉛垂線夾角的平分線對稱。

4 **焦點。**證明拋射角為 θ 的軌跡，其焦點位於 $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\theta\right)$，並由此證明這些焦點都落在以 O 為圓心的一個圓上。

延伸閱讀

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 3 章，當中討論了軌跡的包絡線。
- **J. W. Bruce, P. J. Giblin & C. G. Gibson, "On caustics of plane curves"**, *American Mathematical Monthly* 88 (1981)。幾何學中的包絡線與焦散線。
- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press）。包絡線、焦散線及許多經典曲線，並附作圖方法。

完整的引導式解答見第 11.9 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/safety-parabola.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com