11.8 傾斜的平衡

工作紙

題目

STEP III 2025，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　一個立體放在桌上，只以其曲面上的一點 X 與桌面接觸。作用於它的力是它的重量（作用於質心 G）和在 X 的反作用力（reaction）。這兩個力何時平衡？

階段 1 質心

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 把立體切成半徑為 x、厚度為 δx、高度為 y 的薄圓柱殼（cylindrical shell）。每個圓柱殼的體積是多少？它的質心（centre of mass）有多高？

想一想 用積分求出體積和對底面的矩（moment），然後相除。

階段 2 法線與軸的交點

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 求曲線在 $x = rp$ 處的斜率，從而求出法線（normal）的斜率。沿着法線走到 y 軸：y 改變了多少？

停一停，試一試 當 $n = 4$ 時，把你求得的 Y 對 p 求導，以找出它的最大值。當 $p \to 0$ 時以及在 $p = 1$ 處，情況如何？

階段 3 陀螺

涵蓋：第 (iii) 部分：質心

想一想 這個立體由第 (i) 部分的兩件立體組成，其中一件上下倒置。利用你求得的體積和質心來找出 G。

階段 4　數算平衡位置

涵蓋：第 (iii) 部分：傾斜的平衡位置

> **停一停，試一試**　立體能夠以某一點接觸平面而靜止，當且僅當該點的法線通過 G。在曲面的每一部分上，有多少個點的法線與軸相交於 G 的高度？利用你在第 (ii) 部分的答案。平衡（equilibrium）位置的數目由此可得。

背後的數學

平衡位置即臨界點

當立體以點 X 着地而靜止時，G 離桌面的高度就是由 G 到在 X 的切平面（tangent plane）的距離；對凸體來說，當 GX 沿着法線時，這個距離就是 $|GX|$。一般而言，平衡位置就是由 G 到曲面的距離的臨界點（*critical points*）：使 $|GX|$ 取駐值的點 X，正好就是法線通過 G 的點。穩定的平衡位置是這個距離的局部極小值（G 盡可能低），而不穩定的則是局部極大值或鞍點（saddle points）。

沿着截面由 A 走到 B，與 G 的距離依次是：在 A 較大（極大值：以尖端平衡，不穩定），在尖底上的傾斜點較小（極小值，穩定），在邊緣較大，在圓頂上較低的傾斜點較小（穩定），在較高的傾斜點較大（不穩定），而在 B 較小（穩定：以圓頂的頂部着地）。正如圖中所示，極小值和極大值必定交替出現。（事實上還有一個題目沒有計算在內的平衡位置：立體可以不穩定地平衡在它尖銳的邊緣上，曲面在那裏沒有唯一的法線。）

Gömböc

一個凸體最少可以有多少個平衡位置？任何物體都至少有一個穩定位置和一個不穩定位置：就是曲面上離 G 最近和最遠的點。密度均勻的二維凸形狀總是至少有四個（距離的兩個極小值和兩個極大值，交替出現）。1995 年，阿諾爾德（Vladimir Arnold）提出一個問題：密度均勻的三維凸體，能否只有兩個平衡位置，即一個穩定、一個不穩定？2006

年，Gábor Domokos 和 Péter Várkonyi 構造出這樣的一個形體，就是 *Gömböc*：無論以甚麼姿勢把它放下，它都會滾動搖晃，直至到達它唯一的穩定位置為止。Domokos 後來留意到，有些陸龜的殼很接近這個形狀，這有助牠們在被翻轉後自行翻身。

阿基米德與浮體

對物體穩定性的研究可以追溯至阿基米德（Archimedes）。他在《論浮體》（*On Floating Bodies*）中，根據形狀和密度，分析了一個浮着的拋物面（船身的一個模型）何時能穩定地直立，何時會翻側。他只用幾何便得出答案，當中涉及的正是本節所用的那種質心和法線的計算。造船工程師至今仍在運用他的想法，形式就是穩心（*metacentre*）：如果通過浮心（centre of buoyancy）的鉛垂線與船的軸線的交點位於質心之上，船便是穩定的。

延伸練習

1 **不倒翁玩具。**試做 STEP II 1996，第 9 題（step.maths.org/questions/96-s2-q9）：一個置於半球上的圓錐，何時會自行回正？（提示：相對於半球的球心，G 必須在哪裏？）

2 **球體。**對於均勻實心球體，每一條法線都通過球心。這說明它的平衡位置有甚麼特點？如果球體的質心稍為偏離球心，又會怎樣？

3 **橢圓。**證明一塊橢圓形圓盤在其自身所在的平面內沿一條直線滾動時，恰好有四個平衡位置，並指出哪些是穩定的。

4 **兩個拋物面。**把第 (iii) 部分的圓頂換成拋物面 $ry = r^2 - x^2$，使立體對 x-軸對稱。證明 G 位於原點，求出傾斜的平衡位置，並解釋為何它們成對出現，且每對的傾斜角相等。

延伸閱讀

- **Péter Várkonyi & Gábor Domokos,「Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré–Hopf theorem」**, *Journal of Nonlinear Science* 16 (2006)。提出 Gömböc 的論文。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），論平衡與穩定性。
- **Chris Rorres,「Completing Book II of Archimedes's *On Floating Bodies*」**, *Mathematical Intelligencer* 26 (2004)。阿基米德的穩定性分析，配以現代圖解。

完整的引導式解答見第 11.8 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/tilted-equilibria.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com