11.7 桿中的辛普森法則

工作紙

題目

STEP II 1989，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/89-s2-q13

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

? **想一想**　兩個系統的質量相同、質心相同，而且對通過質心的每一條軸的轉動慣量也相同。為甚麼平行軸定理隨即保證，它們對其他任何軸的轉動慣量也相同？

階段 1 棒

涵蓋：均勻棒（uniform rod）

想一想 在兩端各放質量 p，在中點放質量 q。令總質量相等，並令對通過中心的垂直軸的轉動慣量（moment of inertia）相等。

停一停，試一試 現在檢查通過中心的其他每一條軸。沿棒距離中心 r 的一點，與一條夾角為 ψ 的軸相距 $r\sin\psi$。這對兩個轉動慣量各有甚麼影響？

階段 2　矩形

涵蓋：矩形薄片（rectangular lamina）

停一停，試一試　把薄片切成與其中一邊平行的幼條。把每一幼條換成它的三個質點（particle）。沿每條直線上的質點加起來是甚麼？現在用同樣的方法，把這些再各自換成三個質點。

階段 3　正方形對其對角線

涵蓋：正方形對一條對角線

想一想　九個質點之中，哪些位於對角線上？其餘的質點與對角線相距多遠？

階段 4 **非均勻棒**

涵蓋：非均勻棒（non-uniform rod）

想一想 在兩端及中點各放質量。求出棒的總質量，以及它對其中一端的一階矩和二階矩（first and second moments）。令三者全部相等，然後求解。

背後的數學

辛普森法則

令質量分佈的各階矩吻合，與設計一條數值積分法則是同一個問題。一條法則 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; w_0 f(-a) + w_1 f(0) + w_2 f(a)$ 若對 $f = 1, x, x^2$ 精確成立，就必須滿足

$$w_0 + w_1 + w_2 = 2a, \qquad -a w_0 + a w_2 = 0, \qquad a^2 w_0 + a^2 w_2 = \tfrac{2}{3}a^3,$$

這正是棒所要滿足的條件（其中 $f = 1, x, x^2$ 分別扮演質量、一階矩和轉動慣量的角色）。其解為 $w = 2a(\tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{6})$：這就是辛普森法則。對稱性還帶來額外的收穫：這條法則對 $f = x^3$ 也精確成立，因為兩邊都等於零，所以辛普森法則能精確地積分三次多項式，而它對光滑函數的誤差與四階導數成正比。因此，一根棒與它的三個質點不僅在質量、質心和轉動慣量上吻合，連三階矩也吻合。

高斯求積法與慣性張量

如果位置和質量都可以自由選擇，兩個質點便已足夠：在 $\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ 兩點各放一半質量。驗算：$2 \cdot \frac{1}{2}m \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{1}{3}ma^2$。這就是兩點高斯－勒讓德法則（Gauss–Legendre rule）$\int_{-a}^{a} f \approx a\big(f(-\frac{a}{\sqrt{3}}) + f(\frac{a}{\sqrt{3}})\big)$，它同樣對三次多項式精確成立。高斯（Carl Friedrich Gauss）在 1814 年證明，只要巧妙地選取 n 個點，便能精確地積分次數為 $2n-1$ 的多項式；高斯求積法（Gaussian quadrature）如今已是數值分析（numerical analysis）的標準方法。

在力學中，一個物體對通過其中心的所有軸的轉動慣量，都記錄在一個 3×3 對稱矩陣之中，稱為慣性張量（inertia tensor）。兩個物體若質量、質心和慣性張量都相同，對所

有力的反應便完全一樣，這就是為甚麼工程師在模擬中可以用幾個質點取代一個複雜的部件。慣性張量的特徵向量（eigenvector）就是*主軸*（principal axes），即物體可以繞之穩定旋轉的軸。

延伸練習

1 **辛普森法則。**用只有一個區間的辛普森法則估算 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，並與 $\frac{\pi}{4}$ 比較。驗證這條法則對 $\int_{-1}^1 x^3\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x$ 精確成立，但對 $\int_{-1}^1 x^4\,\mathrm{d}x$ 則不然。

2 **所有軸都一樣。**證明正方形薄片對在其平面上通過中心的任何軸的轉動慣量都是 $\frac{1}{3}Ma^2$。（*提示*：九個等效質點在旋轉 90° 之下是對稱的；這對一個關於 $\cos\psi$ 和 $\sin\psi$ 的二次式說明了甚麼？）

3 **三角形。**證明一塊質量為 M 的均勻三角形薄片，與位於其三邊中點、質量各為 $\frac{1}{3}M$ 的三個質點動力等效。

4 **實心立方體。**為一個均勻實心立方體找出一個由 27 個質點組成的動力等效系統，並用它求出邊長為 $2a$ 的立方體對其一條棱的轉動慣量。

延伸閱讀

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），關於剛體和轉動慣量的一章。
- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press），關於數值積分的各章，包括辛普森法則和高斯求積法。
- **Philip Davis & Philip Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration***（Dover）。經典參考書。

完整的引導式解答見第 11.7 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/simpsons-rod.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com