11.6 後旋

工作紙

題目

STEP III 1997，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q10

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　波子以 v 向前運動，並以 ω 向後旋轉。波子的最低點相對桌面移動得多快？摩擦力朝哪個方向作用？

階段 1 摩擦力的作用

涵蓋：為兩部分做準備

想一想 彈珠的最低點在桌面上滑動得有多快？方向如何？那麼摩擦力（friction）朝哪個方向作用？

停一停，試一試 設摩擦力為 F。以 F 表示 $m\dot{v}$ 和 $I\dot{\omega}$，其中 $I = \frac{2}{5}ma^2$。摩擦力會令回旋（backspin）增加還是減少？

階段 2　完全停下

涵蓋：第 (i) 部分

? **想一想**　要完全停下，v 和 ω 必須在同一時刻變為零。兩者各在何時變為零？

階段 3 **滾回來**

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試** 如果回旋較大，當 v 變為 0 時彈珠仍在旋轉，所以摩擦力會繼續作用。當 $v + a\omega = 0$ 時滑動（sliding）便會停止：那是甚麼時候？當時的 v 是多少？此後彈珠以恆速滾動（rolling）。

背後的數學

一個守恆量

要求最終速率，還有一個更快的方法。考慮波子對它與桌面接觸點的角動量（angular momentum）。摩擦力正正作用於該點，所以對該點沒有力矩，而法向反作用力（normal reaction）和重力都沿着通過該點的鉛垂線作用。因此波子滑動期間，這個角動量守恆（conserved）。它等於 mva（來自球心的運動）減去 $I\omega$（後旋以負值計算）：

$$L = mav - \tfrac{2}{5}ma^2\omega.$$

當波子以速率 V 滾動時，$a\omega = -V$，角動量為 $maV + \frac{2}{5}maV = \frac{7}{5}maV$。令它等於初始值，

$$\tfrac{7}{5}maV = mav_0 - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0, \qquad V = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7},$$

答案相同，卻完全不必提及摩擦力的大小，甚至不必理會它是否恆定。最終速率單憑守恆便已確定；摩擦力只決定要花多少時間才達到這個速率。

桌球、保齡球與網球

同樣的分析可以解釋許多運動中的現象。桌球被擊中正中央時，起初滑動，然後開始滾動，最終速率為初速的 $\frac{5}{7}$（在公式中取 $\omega_0 = 0$）。十瓶保齡球帶側旋擲出時，會沿球道滑行，到開始滾動時便「拐彎」。帶上旋（topspin）的網球會急速下墜，不過這裏的主

要效應來自空氣動力：旋轉的球會使周圍的空氣偏轉，這就是馬格努斯效應（Magnus effect）。

科里奧利與桌球

科里奧利（Gaspard-Gustave Coriolis）如今因旋轉參考系中的虛擬力（fictitious force）而為人所知（Section 11.5），他在 1835 年寫了一整本關於桌球數學的書：*Théorie mathématique des effets du jeu de billard*。他證明了不少結果，其中包括：帶旋轉擊出的球，在滑動期間沿拋物線運動，到滾動時才走直線；他亦精確地分析了本題的縮桿打法。研究這項運動的物理學家至今仍會引用此書。

延伸練習

1 **上旋。**若波子起初帶的是向前的旋轉 ω_0 而非後旋，求它最終的滾動速率。$v_0/(a\omega_0)$ 取甚麼值時它會加速？

2 **桌球。**一個球被擊中正中央，以 v_0 開始滑動而不帶旋轉。證明它最終以 $\frac{5}{7}v_0$ 滾動，並求動能（kinetic energy）損失的比例。（滾動時的動能為 $\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$。）

3 **圓環。**對一個在自身所在平面內滾動的薄圓環重做本題，其 $I = ma^2$。現在 $v_0/(a\omega_0)$ 為何值時，它會以 $\frac{v_0}{7}$ 返回？

4 **縮桿打法。**桌球球桿必須擊中球的甚麼位置（在球心以上多高，以 a 表示），球才會從一開始便只滾不滑？（提示：考慮衝量（impulse）作用期間對接觸點的角動量。）

延伸閱讀

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 8 章，講述角動量及帶滑動的滾動。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），關於剛體運動的各章。
- **David Alciatore, *The Illustrated Principles of Pool and Billiards***（Sterling）。這項運動的物理學，附有大量圖解。

完整的引導式解答見第 11.6 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/backspin.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com