11.5 加速火車中的重力

工作紙

題目

STEP II 2021，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　火車以加速度 a 向西（即沿負 x 方向）加速。對車上的觀察者來說，質量為 m 的物體看似受到怎樣的「假想」力作用？

階段 1　在原點無法靜止

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　假如小珠相對於火車一直停留在原點，它就會與火車有相同的加速度（acceleration）。這需要怎樣的力？在原點處金屬線是水平的：它的反作用力（reaction）可以沿哪個方向作用？

階段 2 一條能量方程

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試** 在火車的參考系（frame）中寫出牛頓第二定律（Newton's second law），加上因參考系加速而產生的力 ma，並包括法向反作用力（normal reaction）$\mathbf{N}$。然後與速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ 取點積（dot product）。為甚麼 $\mathbf{N}$ 會消失？

階段 3 能升多高？

涵蓋：第 (iii) 部分

> **想一想** 由於小珠從原點由靜止開始運動，常數為 0。在最高點，小珠瞬時靜止。利用 $ky = x^2$。

階段 4　最快的一點

涵蓋：第 (iv) 部分

> **想一想**　把速率的平方寫成只含 x 的函數。這個二次函數在哪裏取得最大值？然後求金屬線在該點的斜率（gradient）。

背後的數學

假想力

牛頓定律在慣性參考系(inertial frame)中成立，即沒有加速的參考系。在加速參考系中，只要加上假想力，牛頓定律便可繼續使用：對於加速度為 $\mathbf{A}$ 的參考系，要加上 $-m\mathbf{A}$；而在旋轉參考系中，則要加上離心力（centrifugal force）和科里奧利力（Coriolis force）。它們之所以稱為假想力，是因為沒有任何物體施加這些力；它們純粹是參考系造成的假象。但對身處其中的人來說，它們卻是千真萬確的。離心力使地球在兩極變得扁平；科里奧利力決定了颶風旋轉的方向（在北半球為逆時針），也令遠程炮彈偏離原來的方向。

等效原理

恆定的假想力 $-m\mathbf{A}$ 與質量成正比，這一點與重力完全相同。在一個密封的箱子內，沒有任何實驗能夠分辨箱子是靜止在行星上，還是在虛空中加速：這就是*等效原理*（equivalence principle）。愛因斯坦以它作為廣義相對論（general relativity）的出發點。既然光橫越一個加速中的箱子時看來會彎曲，光在重力場中也必定會彎曲；既然加速火箭的前端和後端的時鐘快慢不同，重力場中不同高度的時鐘也必定如此。這兩個預測都已得到證實，而每一顆 GPS 衛星都必須就第二個效應作出修正：單是這個效應，就令衛星上的時鐘每天比地面的時鐘快約 45 微秒。

愛因斯坦最快樂的想法

1907 年，愛因斯坦在伯爾尼的專利局工作，當時他正在撰寫一篇關於狹義相對論（special relativity）的綜述文章。據他後來憶述，就在這時，「我一生中最快樂的想法」出現了：一個從屋頂自由墮下的人，不會感覺到自己的重量。只要選取一個下墮中的參考系，重力就可以被「變換掉」。他再花了八年時間，並借助大量新的數學（由高斯（Gauss）和黎曼（Riemann）發展的彎曲空間微分幾何），才把這個想法變成 1915 年的廣義相對論。

延伸練習

1 **火車上的大炮。**試做 STEP I 2000，第 9 題（step.maths.org/questions/00-s1-q9）：在加速中的車廂內發射拋體（projectile），其中加速度的作用就如重力傾斜了一樣。

2 **逆風。**試做 STEP II 2006，第 11 題（step.maths.org/questions/06-s2-q11）：拋體迎着恆定的風飛行，風可以在它落地之前把它吹回你這邊。

3 **火車上的咖啡。**證明在加速中的火車上，一杯咖啡的液面是一個與水平面成 $\arctan(a/g)$ 角的傾斜平面。

4 **微小振動。**求珠子圍繞 $x = \frac{ak}{2g}$ 作微小振動的週期。（提示：在新的底部附近，金屬線近似於一個圓，其半徑等於金屬線在該處的曲率半徑（radius of curvature）。）

延伸閱讀

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），當中講述非慣性參考系與假想力的一章。
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（有多個版本）。愛因斯坦親自撰寫的普及讀物，當中包括加速箱子的討論。
- **Pedro Ferreira, *The Perfect Theory***（Little, Brown）。一部廣義相對論的傳記。

完整的引導式解答見第 11.5 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/accelerating-frame.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com