# 11.4 等時曲線

**工作紙**

**題目**

**STEP III 1994，第 9 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/94-s3-q9

## 提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

**想一想**　碗面是光滑的。有哪些力作用在質點上？其中哪些力有作功？

### 階段 1　沿曲線的能量

涵蓋：常數

**想一想**　碗面是光滑（smooth）的。有哪些力作用在質點上？其中哪些力會作功？質點沿碗面的速率是 $\left|\frac{ds}{dt}\right|$。寫出能量守恆（conservation of energy）的式子。

### 階段 2 以 $s$ 表示的簡諧運動（simple harmonic motion）

涵蓋：到達 $V$ 所需的時間

**停一停，試一試** 利用 $s = 2\sqrt{ky}$，把 $y$ 換成 $s$ 的函數。將能量方程對 $t$ 求導。你得到的是哪一種運動？

### 階段 3 到達底部所需的時間

涵蓋：到達 $V$ 所需的時間

**想一想** 質點到達 $s = 0$ 所需的時間，佔一個週期（period）的幾分之幾？答案與 $h$ 有關嗎？

### 階段 4　兩個質點

涵蓋：兩個質點

**想一想**　兩個質點各自在甚麼時候到達 $V$？在 $V$ 處的速率與起始高度有甚麼關係？比較兩者的動量（momentum）。

**停一停，試一試**　碰撞時總動量為零，因此其後一直保持為零。利用恢復系數（coefficient of restitution）$\alpha$，求出剛碰撞後兩個質點的速率。

**階段 5** **整個運動過程**

涵蓋：兩個質點

**想一想** 現在每個質點會爬升到多高？它們下一次在甚麼時候到達 $V$？該次碰撞會發生甚麼事？往後每一次碰撞又如何？

## 背後的數學

### 為甚麼是擺線？

半徑為 $R$ 的輪子在一條直線下方滾動，描出擺線 $x = R(t + \sin t)$，$y = R(1 - \cos t)$。於是 $\frac{dx}{dt} = R(1 + \cos t)$ 及 $\frac{dy}{dt} = R\sin t$，所以沿曲線的速率是 $R\sqrt{2 + 2\cos t} = 2R\cos\frac{t}{2}$。積分後，由底部起計的弧長是 $s = 4R\sin\frac{t}{2}$，而 $y = 2R\sin^2\frac{t}{2}$。因此 $s^2 = 8Ry$：擺線正是滿足 $s = 2\sqrt{ky}$ 的曲線，其中 $k = 2R$。反過來說，要求回復力與 $s$ 成正比，就迫使曲線必定是擺線。

### 最速降線

1696 年，約翰·伯努利（Johann Bernoulli）向歐洲的數學家提出挑戰：一粒珠子從一點滑到較低的另一點（不在其正下方），沿哪一條曲線所需的時間最短？答案是最速降線（brachistochrone），它同樣是一條擺線。據說牛頓（Newton）收到題目後，一個晚上就解決了；他匿名發表了自己的解法，但伯努利認出了作者，說是「從爪認出獅子」。這個問題是*變分法*（calculus of variations）的開山例子，你在 Section 4.7 已經見過：找出使某個由積分定義的量取最小值的曲線。

#### 惠更斯的擺線鐘

惠更斯知道單擺計時並不完美，因為它的週期取決於振幅。他在《*Horologium Oscillatorium*》（1673 年）中說明了怎樣令擺錘沿擺線運動：把擺線掛在兩塊彎成擺線形狀的「夾板」之間，擺線便會貼着夾板捲繞，使擺錘本身描出一條擺線（擺線的*漸伸線*（involute）

是另一條擺線）。實際上，夾板因摩擦而引入的誤差比它消除的還要多，鐘錶匠於是改為保持小幅擺動。然而惠更斯的分析開創了漸屈線（evolute）與漸伸線的理論，他這部著作也是十七世紀力學的偉大作品之一。

## 延伸練習

1 **不同的高度。**一個質點在等時曲線碗內從高度 $h$ 放開。證明它在 $V$ 的速率是 $\sqrt{2gh}$（由能量守恆，必然如此），並驗證這與 $\omega s_0$ 一致。

2 **普通的碗。**在半徑為 $R$ 的半球形碗內，比較從很小的高度到達底部所需的時間與從碗邊出發所需的時間。哪一個較長？（利用 Section 11.3 的結果。）

3 **質量相等。**把題目的第二部分重做一次，這次兩個質點質量同為 $m$，分別從高度 $h_1$ 和 $h_2$ 放開，恢復係數為 $e$。它們是否仍然總是在 $V$ 碰撞？

4 **擺線的弧長。**證明擺線的一拱長度為 $8R$，而拱下的面積為 $3\pi R^2$，即滾動圓面積的三倍。

## 延伸閱讀

- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。書中包括等時曲線和最速降線，並附有相關歷史。
- **E. A. Whitman, “Some historical notes on the cycloid”**，*American Mathematical Monthly* 50 (1943)。講述擺線為何被稱為「幾何學家的海倫」。
- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。以歷史故事的方式講述最速降線及其他最優化問題。

完整的引導式解答見第 11.4 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/tautochrone.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com