11.3 真實的擺

工作紙

題目

STEP III 1998，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s3-q11

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　擺錘沿半徑為 l 的圓周運動。以 θ 和 $\dot{\theta}$ 表示，它的速率和高度（相對於最低點）分別是甚麼？

階段 1　能量

涵蓋：能量方程（energy equation）

> **想一想**　把擺錘（bob）的速率和高度用 θ 和 $\dot{\theta}$ 表示。當 $\theta = \gamma$ 時，擺錘處於靜止。運用能量守恆（conservation of energy）。

階段 2 以積分表示週期（period）

涵蓋：週期

想一想 對兩個餘弦都使用 $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$。由 $\theta = 0$ 擺到 $\theta = \gamma$ 所需的時間佔週期的幾分之幾？把時間寫成 $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\bar{\theta}}$。

階段 3 消去奇點（singularity）

涵蓋：小振幅近似（small-amplitude approximation）

停一停，試一試 設 $k = \sin\frac{\gamma}{2}$ 及 $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\phi$。$\phi$ 需要取甚麼範圍？以 $\mathrm{d}\phi$ 表示 $\mathrm{d}\theta$。哪些因子可以約去？

階段 4　第一個修正項

涵蓋：小振幅近似

> **想一想**　當 k 很小時，用二項式定理(binomial theorem)展開 $(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}$，保留兩項。然後使用 $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,d\phi$ 以及 $k\approx\frac{\gamma}{2}$。

背後的數學

橢圓積分

積分

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

稱為**第一類完全橢圓積分**（complete elliptic integral of the first kind），這個名稱的由來，是因為與它相近的另一個積分給出橢圓的周界。精確的週期是 $P=4\sqrt{l/g}\,K(\sin\frac{\gamma}{2})$。把被積函數完全展開，再利用 Section 4.4 中的沃利斯積分(Wallis integrals) $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\phi\,d\phi$ 逐項積分，便得

$$P=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+(\tfrac{1}{2})^2k^2+(\tfrac{1\cdot3}{2\cdot4})^2k^4+(\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6})^2k^6+\cdots\right).$$

$K(k)$ 無法以有限個熟悉的函數組合而成；它是一個名副其實的新函數。

高斯的非凡公式

計算 K 有一個好得多的方法。你在 Section 2.6 已見過**算術幾何平均**（arithmetic–geometric mean）：由 a 和 b 開始，反覆以它們的算術平均和幾何平均取代它們。高斯在 1799 年發現

$$K(k)=\frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}(1,\sqrt{1-k^2})},$$

所以振幅為 γ 的單擺，其週期恰好是

$$P = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{\mathrm{AGM}(1, \cos\frac{\gamma}{2})}.$$

AGM 收斂得極快：擺幅在大約 160° 以內時，只需三四步便可求得準確至十位有效數字的週期，圖 11.3.1（見網上該節的完整版）中的數值正是這樣算出來的。接近 180° 時，兩個初始值 1 和 $\cos\frac{\gamma}{2}$ 相距甚遠，需要多走一兩步，但即使在 179°，五步也已足夠。高斯在日記中寫道，這項發現「開闢了一個全新的分析領域」，而他說得一點不錯：把橢圓積分反演，引領阿貝爾（Abel）和雅可比（Jacobi）發現了橢圓函數（elliptic functions），而橢圓函數又引出了橢圓曲線（elliptic curves）。橢圓曲線如今是數論的核心（它們正是證明費馬最後定理（Fermat's Last Theorem）的關鍵），也是保障互聯網安全的密碼學的核心。

伽利略的吊燈與惠更斯的時鐘

伽利略大約在 1602 年提出，單擺的週期與振幅無關；對於他所研究的小幅擺動，這是個很好的近似。惠更斯（Christiaan Huygens）意識到這並不精確，並在 1659 年找到了一條曲線，沿着它擺動時週期確實與振幅無關：那就是擺線（cycloid），即 Section 11.4 的主題。他由 1656 年起製造的擺鐘，把計時的誤差由每天約一刻鐘減至約十五秒。航海天文鐘（marine chronometer）解決了在海上測定經度的難題，它後來完全捨棄了單擺，但直至 1920 年代，擺鐘仍然是世上最準確的計時器。

延伸練習

1. **繫着的質點。**試做 STEP III 2015，第 9 題（step.maths.org/questions/15-s3-q9）：這個振子即使在小幅振動時，週期也取決於振幅。為甚麼它會這樣，而單擺卻不會？
2. **下一項。**把二項式展開多取一項，證明 $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{\gamma^2}{16} + \frac{11\gamma^4}{3072})$。
3. **徒手計算 AGM。**用三步 AGM 估算振幅為 90° 的單擺的週期，並與圖中的數值 1.1803 比較。
4. **時鐘。**一座擺鐘經調校後，在振幅為 4° 時走時完全準確。若它的振幅增至 5°，它每天會慢多少秒？

延伸閱讀

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 4 章，當中討論了大振幅的單擺。

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。高斯的發現及其應用，包括計算 π 的最快方法。
- **Dava Sobel, *Longitude***（Fourth Estate）。海上計時的故事，講述單擺以外的發展。

完整的引導式解答見第 11.3 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/real-pendulum.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com