11.2 簡正模式

工作紙

題目

STEP III 2014，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s3-q10

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　設 X 與 P 的距離為 $a+x$，Y 與 Q 的距離為 $a+y$，那麼中間的彈簧 XY 有多長？當 x 和 y 皆為正數時，哪些彈簧被拉長，哪些被壓縮？

階段 1　運動方程（equations of motion）

涵蓋：運動方程

想一想　已知 $XP = a+x$ 及 $YQ = a+y$，那麼 XY 有多長？哪些彈簧（spring）被拉長，哪些被壓縮？求出每條彈簧作用於 X 的力，並小心留意方向。然後利用對稱性（symmetry）處理 Y。

階段 2 解耦（decoupling）

涵蓋：組合 $x-y$ 與 $x+y$

停一停，試一試 每條方程都同時含有 x 和 y。先把兩式相減，再把兩式相加。$x-y$ 和 $x+y$ 各自滿足甚麼方程？

階段 3 初始條件（initial conditions）

涵蓋：組合 $x-y$ 與 $x+y$

想一想 開始時 x 和 y 分別是多少？兩個質點（particle）當時是否在運動？利用這些資料確定你那兩個解中的常數。

階段 4　永不返回

涵蓋：Y 永不返回

> **停一停，試一試**　把 y 用 t 表示。若 Y 要回到起始位置，兩個餘弦必須各等於甚麼？這對 $\sqrt{3}$ 意味着甚麼？

背後的數學

簡正模態就是特徵向量

把兩條方程寫成一條矩陣方程：

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{\lambda}{a}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

能夠解耦的組合，正是這個矩陣的特徵向量（eigenvectors）：$(1,-1)$，其特徵值（eigenvalue）為 1；以及 $(1,1)$，其特徵值為 3（Section 7.2）。在第一個模態中，$x=-y$：兩個質點沿直線同向運動（記住 x 和 y 是從相反的兩端量度的），中間的彈簧長度保持不變。在第二個模態中，$x=y$：兩個質點反向運動，把中間的彈簧一壓一拉，頻率因而較高。頻率的平方就是特徵值乘以 $\frac{\lambda}{ma}$。

無論有多少個質點和彈簧，這個方法都適用。一個由 N 個耦合振子（coupled oscillators）組成的系統有 N 個簡正模態，它們由一個對稱矩陣的特徵向量給出，而譜定理（spectral theorem）保證這些模態必定存在，並且互相垂直。分子以簡正模態振動，化學家正是憑分子所吸收的紅外光來辨認它們。建築物和橋樑也有簡正模態，工程師必須令這些模態的頻率遠離風和地震的頻率。當質點的數目趨向無限時，簡正模態就變成振動弦線的諧波（harmonics），這正是傅立葉分析（Fourier analysis）的起點。

接近而不到達

雖然 Y 永遠不會剛好返回，但它可以接近到任意程度。原因是克羅內克（Kronecker）的一條定理：若 α 是無理數，則各倍數 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ 取模 1 之後，可以任意接近 $[0,1]$ 內的每一個數。因此我們可以找到一些時刻，使 ωt 是 2π 的倍數，而 $\sqrt{3}\,\omega t$ 與另一個這樣的倍數之差小於任何指定的容許誤差。這種運動是**準週期**（quasi-periodic）的：它在一個環面（torus）上不斷纏繞（每個模態對應一個角），卻永遠不會閉合。有理與無理頻率比之間的這種區別，同樣是關於太陽系穩定性的 KAM 定理的核心。

延伸練習

1 **能量。**證明總能量 $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\lambda}{2a}\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)$ 是常數，並證明它可以分拆成兩項之和，每個簡正模態各佔一項，而每一項本身都是常數。

2 **純模態。**應該怎樣讓兩個質點開始運動，才能使運動是週期性的，且週期為 $\frac{2\pi}{\omega}$？若週期為 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\omega}$ 又如何？

3 **較硬的中間彈簧。**若中間彈簧的彈性模量（modulus of elasticity）是 μ 而不是 λ，求兩個簡正模態的頻率。當 μ/λ 取哪些值時，所有運動都是週期性的？

4 **三個質點。**三個質量相等的質點排成一線，由四條相同的彈簧連接在兩個固定點之間。求對應的矩陣及其特徵值（$2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}$），並描述三個簡正模態。

延伸閱讀

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series），第 5 章，講述耦合振子與簡正模態。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge），關於特徵值的一章，當中以彈簧與質點作為主要例子。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press），第 8 章，講述環面上的準週期運動。

完整的引導式解答見第 11.2 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/normal-modes.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com