11.14 是拋物線，不是懸鏈線

工作紙

題目

STEP I 1991，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s1-q10

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　在每個節點 A_i 上有三個力作用：相鄰兩段鏈的張力，以及吊桿上所掛的重量 w。重量無法影響張力的哪一個分量？

階段 1 各接點（joint）的方程

涵蓋：平衡方程（equilibrium equations）

想一想 在每個接點，重量都是垂直向下的。那麼，相鄰兩段的張力（tension）的水平分量（horizontal component）有甚麼關係？沿水平方向和垂直方向分解（resolve）各力。

停一停，試一試 在中間的接點，利用橋的對稱性（symmetry）。該處的兩段各自承托其支柱（strut）重量的多少？

階段 2　由重量求斜率（slope）

涵蓋：各個比

想一想　由中間向外逐段計算。每一段的張力的垂直分量是多少？把它除以共同的水平分量便得到斜率，然後以高度 y_i 和 h 表示每個斜率。

階段 3 **拋物線（parabola）**

涵蓋：拋物線

想一想 由中間向外數接點。把由中間接點起每段的下降量加起來：$1+3+5+\cdots+(2j-1)$ 等於甚麼？

背後的數學

拋物線還是懸鏈線？

把上述論證改為連續的版本，便能同時解釋這兩條曲線。對於一條水平張力恆為 H 的鏈 $y(x)$，張力的鉛垂分量為 Hy'，而在一小段上，它的變化等於該段所承受的負載：$H\,\mathrm{d}y' = \mathrm{d}W$。

- 若負載沿水平方向均勻分佈（沉重的路面，每單位路面長度的重量為 ρ），則 $Hy'' = \rho$，所以 y 是二次函數：一條拋物線。
- 若負載是鏈本身的重量，沿鏈身均勻分佈（每單位鏈長的重量為 ρ），則 $Hy'' = \rho\sqrt{1+y'^2}$，其解為懸鏈線 $y = c\cosh\frac{x}{c}$，其中 $c = H/\rho$。

在底部附近，鏈幾乎是水平的，兩者差不多一樣；它們在支承點附近才有分別，因為那裏的鏈較陡，同一段水平距離內包含較多的鏈。真實的懸索橋，橋面遠比纜索重，所以形狀十分接近拋物線。

倒轉的鏈與拱

鏈處於純張力狀態；把它的形狀上下倒轉，便得到一個處於純壓力（compression）狀態的拱，完全沒有彎曲的傾向。胡克（Robert Hooke）在 1675 年以一個字謎（anagram）的形式發表了這個發現，解開後的意思是：「柔軟的繩怎樣懸垂，倒轉過來，堅硬的拱便怎樣屹立。」雷恩（Christopher Wren）與胡克把這個想法用於聖保羅大教堂（St Paul's Cathedral）的圓頂，而高迪（Antoni Gaudí）設計巴塞隆拿的聖家堂（Sagrada Família）

時，則從天花板垂下掛着重物的繩子，再把照片倒轉來看。聖路易斯的拱門（Gateway Arch）就是一條（加權的）倒置懸鏈線。

懸鏈線的挑戰

1690 年，雅各布·伯努利（Jakob Bernoulli）向數學家提出挑戰：求出懸垂的鏈的形狀。不出一年，他的弟弟約翰（Johann）、萊布尼茲（Leibniz）和惠更斯都發表了解答。約翰·伯努利後來得意地憶述，出題的哥哥自己反而解不出來。懸鏈線是新興的微積分（calculus）最早的勝利之一，並引出了雙曲函數（hyperbolic functions）cosh 和 sinh；到了十八世紀，Vincenzo Riccati 和蘭伯特（Johann Heinrich Lambert）對這些函數作了有系統的研究。

延伸練習

1. **偶數條吊桿。**把題目改為 $2n$ 條吊桿再做一次，此時鏈的最低處是中間的一段水平線段。各節點是否仍然位於一條拋物線上？

2. **張力。**以 H、w 和 n 表示鏈中的最大張力。它出現在哪裏？

3. **懸鏈線。**驗證 $y = c\cosh\frac{x}{c}$ 滿足 $y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1+y'^2}$。證明懸鏈線由 $x = 0$ 到 $x = X$ 的長度為 $c\sinh\frac{X}{c}$。

4. **伽利略的錯誤。**一條長度為 $2L$ 的鏈懸掛在相距 $2d$ 的兩個支承點之間。當 L 只比 d 稍大時，證明懸鏈線的垂度（sag）與拋物線的垂度近似相同。為甚麼伽利略的實驗沒有顯示出兩者的分別？

延伸閱讀

- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press）。懸鏈線、拋物線及其相關曲線。
- **Jacques Heyman, *The Stone Skeleton***（Cambridge University Press）。由胡克的鏈說起，講述磚石拱和圓頂如何屹立不倒。
- **David Billington, *The Tower and the Bridge***（Princeton University Press）。橋樑的藝術與工程。

完整的引導式解答見第 11.14 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/bridge-parabola.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com