11.13 鏟雪車問題

工作紙

題目

STEP III Specimen paper，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q11

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　第一輛剷雪車在時間 t 遇到的積雪深度為 $h + kt$。它的速率是多少？求 x 作為 t 的函數較容易，還是求 t 作為 x 的函數較容易？

階段 1　第一輛鏟雪車

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　在時間 t，第一輛鏟雪車遇到的積雪深度為 $h + kt$。寫出它的速率。把 t 看成 x 的函數會較易求解：把方程上下倒轉，然後求解。

階段 2 第二輛鏟雪車的方程

涵蓋：第 (ii) 部分：建立方程

停一停，試一試 在時間 t，第二輛鏟雪車位於 y。第一輛鏟雪車在時間 $t_1(y)$ 清理過該處。現在那裏的積雪有多深？寫出第二輛鏟雪車的速率，然後把它上下倒轉。

階段 3 求解

涵蓋：第 (ii) 部分：解方程

想一想 把 t 看成 y 的函數時，這個方程是線性（linear）的。使用積分因子（integrating factor）$e^{-\alpha y}$，並利用第二輛鏟雪車在時間 T 從 $y = 0$ 出發這個條件。

階段 4　相撞

涵蓋：第 (ii) 部分：兩車相遇之處

? **想一想**　兩輛鏟雪車在同一時間到達同一點時便會相遇。求 $t_2(y) - t_1(y)$。它何時等於零？

背後的數學

Agnew 的剷雪車

Ralph Palmer Agnew 的版本出自他 1942 年的教科書 *Differential Equations*：某天早上開始下起大雪，雪勢均勻不變；一輛剷雪車在正午出發，第一個小時走了 2 英里，第二個小時走了 1 英里；雪是甚麼時候開始下的？剷雪車的速率與積雪深度成反比，而深度則與開始下雪以來所經過的時間成正比。答案（見下面的一道練習）涉及黃金比（golden ratio）：雪大約在正午前 37 分鐘開始下。其後才陸續出現像本題這樣有兩輛剷雪車的版本。

會傳遞的資訊

第二輛車的運動取決於路面上記錄下來的歷史：每一點最後一次被清理的時間。這是具有記憶（memory）的系統的一個簡單例子，在這類系統中，某處的狀態取決於該處先前發生過的事。交通流、冰川的運動和山火的蔓延都有這種特性，而它們背後的數學，即一階偏微分方程（first-order partial differential equations）及其特徵線（characteristics）的理論，是大學二年級的標準課題。把時間寫成位置的函數（「前沿何時到達這裏？」），正是處理這類問題時所用的到達時間（arrival times）方法。

延伸練習

1 **Agnew 的問題。**雪在正午前某個未知的時間開始以穩定的速率落下。一輛剷雪車的速率與積雪深度成反比，它在正午出發，第一個小時走了 2 英里，第二個小時走了 1 英里。證明若雪在正午前 t_0 小時開始下，則 $(1+\frac{2}{t_0})^2 = (1+\frac{1}{t_0})^3$，由此推出 $\frac{1}{t_0}$ 是黃金比，並求雪何時開始下。

2 **驗證。**用求導驗證 $t_2(y)$ 滿足第 (ii) 部分的微分方程。

3 **時間差距。**證明若 $kT > h$，時間差距 $t_2(y) - t_1(y)$ 先增加，然後減少至零，並求它在何處最大。若 $kT \leq h$，又會怎樣？試解釋其意義。

4 **三輛剷雪車。**第三輛剷雪車在時間 $2T$ 出發。寫出它的運動方程。它追上第二輛車，是在第二輛車追上第一輛車之前還是之後？

延伸閱讀

- **Ralph Palmer Agnew, *Differential Equations***（McGraw-Hill, 1942）。剷雪車問題的原始出處。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press），書中討論了剷雪車問題和許多其他問題。
- **Richard Haberman, *Mathematical Models***（SIAM）。交通流與特徵線，程度淺易。

完整的引導式解答見第 11.13 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/snowplough.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com