11.12 橡皮繩上的螞蟻

工作紙

題目

STEP II 2018，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s2-q10

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　繩子是均勻拉伸的：每一小段都按相同的倍數伸長。在時間 t，繩長為 $a+ut$。若距離釘子 x 的一點位於全長的 $\frac{x}{a+ut}$ 處，這一點移動得有多快？

階段 1 螞蟻的方程

涵蓋：螞蟻的方程

想一想 螞蟻相對於繩子以速率 v 前進，另外還要加上牠腳下那段繩子本身的速率。寫出 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$。

停一停，試一試 用商法則（quotient rule）對 $\frac{x}{a+ut}$ 求導，再代入你所得的 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 方程。最後剩下甚麼？

階段 2　到達終點

涵蓋：到達終點所需的時間

? **想一想**　由 0 積分至 t。當分數 $\frac{x}{a+ut}$ 等於 1 時，螞蟻便到達終點。

階段 3 回程

涵蓋：回程

想一想 往回走時，螞蟻沿繩子的速度是 $-v$。這時該分數的變化率是多少？它在時間 T 時由 1 開始，何時會降至 0？

背後的數學

調和級數的版本

這個謎題通常是以離散的拉伸來敍述的。一條繩長 1 公里；螞蟻在第一秒走 1 厘米；然後繩子拉長 1 公里；然後螞蟻再走一厘米，如此類推。在第 n 秒，螞蟻在長 n 公里的繩上走了 1 厘米：所佔比例為 $\frac{1}{100\,000\,n}$。拉伸不會改變牠所佔的比例，所以 N 秒之後，牠已走過繩子的

$$\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)\approx\frac{\ln N+0.577}{100\,000}$$

。當 $H_N \approx 100\,000$ 時牠便到達，那大約是 $e^{100\,000}$ 秒之後，這個數有超過 43 000 位數字。（作為比較，宇宙的年齡約為 4×10^{17} 秒。）我們的連續版答案與此吻合：$k=\frac{u}{v}=100\,000$，而 $T\approx\frac{a}{u}e^{k}$。

膨脹宇宙中的光

繩上的螞蟻，正是光穿越膨脹宇宙的一個模型。遙遠的星系被空間本身的膨脹帶着遠離我們，而它們發出的光則以速率 c 在膨脹的空間之中向我們傳播，就像螞蟻沿着拉伸中的繩子行走一樣。遙遠星系的光最終能否到達我們這裏，取決於膨脹率如何隨時間變化。在一個以穩定速率膨脹的宇宙中，就像那條繩子一樣，光最終總會到達。而在一個加速膨脹的宇宙中（我們的宇宙看來正是如此），有些星系的光永遠不會到達我們這裏：這就是*宇宙事件視界*（cosmic event horizon）。對螞蟻來說，相應的情況是一條按指數拉伸的繩子，繩端的速率與繩長成正比地增長（可在練習中試試）。

加德納的螞蟻

這個謎題似乎是法國數學家 Denys Wilquin 在 1972 年發明的，當時說的是橡皮筋上的一條蟲；其後馬丁·加德納（Martin Gardner）在他的 *Scientific American* 專欄和著作 *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments* 中介紹，令它廣為人知。它是最著名的例子之一：結果違反直覺，卻又容易證明；它也是人們說明調和級數發散時最愛用的例子。

延伸練習

1. **中途。**螞蟻何時走到繩子的一半？那是在時間 $\frac{T}{2}$ 之前還是之後？

2. **指數拉伸。**假設繩長改為 $ae^{\lambda t}$。證明螞蟻僅當 $v > \lambda a$ 時才能到達盡頭。（這就是宇宙事件視界。）

3. **加速的繩子。**若繩長為 $a + \frac{1}{2}bt^2$，螞蟻是否總能到達？

4. **離散的謎題。**在離散版本中，螞蟻需要多少秒才能走過繩子的 1%？請使用 $H_N \approx \ln N + 0.577$。

延伸閱讀

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments***（W. H. Freeman）。書中收錄了橡皮繩上的螞蟻。
- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。調和級數，以及這隻螞蟻。
- **Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology***（Cambridge University Press）。膨脹的空間、視界與共動坐標，屬大學本科程度。

完整的引導式解答見第 11.12 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/rubber-rope.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com