11.11 外野手如何接球

工作紙

題目

STEP II 1998，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s2-q11

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　設擊球手位於原點，外野手在距離 D 處。若球位於 (x, y)，$\tan\theta$ 是甚麼？

階段 1 位置恰到好處的外野手

涵蓋：靜止不動的外野手

想一想 把擊球員（batsman）放在原點（origin），外野手（fielder）則在距離 D 處。當球位於 (x, y) 時，$\tan\theta$ 是甚麼？

停一停，試一試 設球在時間 T 落到與眼睛同高的位置，而該處正是外野手所在之處。試以 t 和 T 表示 y 和 $D - x$。你能否把 y 因式分解（factorise），使某些項可以約去？

階段 2　奔跑中的外野手

涵蓋：奔跑中的外野手

想一想　現在外野手從距離 D 處出發，以速率 v 跑向擊球員。若她在時間 T 接到球，D 是多少？把剛才的計算再做一遍。

停一停，試一試　至於逆命題（converse），假設 $\tan\theta$ 以恆定的速率 c 上升，即 $\tan\theta = ct$。先消去分母，再比較 t 的係數（coefficient）和常數項（constant term）。由此你能看出 D 是甚麼嗎？

背後的數學

光學加速度抵消

Chapman 的法則現稱為*光學加速度抵消*（optical acceleration cancellation）：外野手移動自己的位置，使「光學加速度」$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tan\theta$ 保持為零。假如球的影像加速上升，球就會越過她的頭頂，所以她要後退；假如影像減速，球就會落在她身前，所以她要向前跑（圖 11.11.1（見網上該節的完整版））。這個策略沒有告訴她球會落在哪裏，卻能把她帶到那裏。這是一條反饋控制律（feedback control law），與導引導彈所用的同出一轍：導彈採用*比例導引*（proportional navigation），使指向目標的視線角保持不變，那正是同一

個想法的橫向版本。

外野手實際怎樣做

真實的外野手是否採用 Chapman 的法則？1990 年代有人把攝影機裝在棒球外野手的頭上做實驗，結果並不一致。Michael McBeath 及其同事於 1995 年在 *Science* 上提出，對於打向一側的球，外野手會沿彎曲的路線奔跑，使球的影像在視野中沿直線移動（即「線性光學軌跡」，linear optical trajectory），這同樣能把他們帶到接球的位置。其後的研究顯示，這兩種策略以及兩者的混合都有人使用，而且外野手往往並非以恆定速率奔跑。2004 年的一項研究發現，接飛碟的狗所走的路線，與同樣的光學法則吻合。無論細節如何，這個令人驚嘆的結論依然成立：接球並不需要預測，只需要正確的反饋。

Chapman 的論文

Seville Chapman 的「Catching a baseball」於 1968 年刊登在 *American Journal of Physics*，全文只有三頁，內容基本上就是本題的計算。他指出這個策略只在沒有空氣阻力時才成立，而真實棒球的軌跡會因阻力和旋轉而變形，令情況變得複雜。儘管如此，大腦利用視野中簡單的不變量來解決複雜的控制問題，這個想法在心理學和機械人學中已變得十分重要。

延伸練習

1. **向後跑。**假如球會落在外野手起步位置的後方，證明她應該背離擊球手奔跑，而同一條法則依然適用。

2. **不是 θ 本身。**證明對於位置恰到好處的外野手，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 並非常數。為甚麼 $\tan\theta$ 才是應該留意的量？

3. **眼睛的高度。**假如球是從外野手眼睛高度以下 h 的位置擊出，對於位置恰當的外野手，$\tan\theta$ 是否仍然是 t 的線性函數？（假設她在眼睛的高度接球。）

4. **空氣阻力。**在線性空氣阻力之下，水平速度會按指數衰減。對於位置恰當的外野手，$\tan\theta$ 是否仍然是 t 的線性函數？

延伸閱讀

- **Seville Chapman，「Catching a baseball」**，*American Journal of Physics* 36 (1968)。
- **Michael McBeath、Dennis Shaffer 及 Mary Kaiser，「How baseball outfielders determine where to run to catch fly balls」**，*Science* 268 (1995)。

► **Dennis Shaffer 等，「How dogs navigate to catch Frisbees」**，*Psychological Science* 15 (2004)。

完整的引導式解答見第 11.11 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/fielders.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com