11.10 會朝你飛回來的球

工作紙

題目

STEP II 2019，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　為甚麼處理 OP^2 比處理 OP 容易？「OP 遞增」與「OP^2 遞增」是同一回事嗎？

階段 1　距離的平方

涵蓋：第 (i) 部分，OP 遞增

想一想　與其直接處理 OP，不如考慮 $OP^2 = x^2 + y^2$。把它寫成 t 的表達式，並利用 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ 化簡。

停一停，試一試　對 t 求導（differentiate），然後抽出因子 t，餘下的是一個 t 的二次式（quadratic）。它在甚麼情況下對所有 t 皆為正？

階段 2　更陡的拋射

涵蓋：第 (i) 部分，更陡的拋射

想一想　若 $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$，該二次式有兩個實根（real roots）。利用兩根之和與兩根之積，證明兩根皆為正。較小的那個根是否出現在質點（particle）着地之前？

階段 3 移動的觀察者

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 Q 位於 $(-vt, 0)$，所以水平距離為 $x + vt$。寫出 QP^2。它與 OP^2 有何不同？重複一次判別式（discriminant）的論證。

背後的數學

幾何觀點

OP 遞減的時候，正正就是 P 的速度指向「內側」的時候，即速度與向量 $\overrightarrow{OP}$ 成鈍角（obtuse angle），也就是 $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v} < 0$ 的時候。對於陡峭的拋擲，質點在接近飛行最高點時，位於拋球者的高處而略為偏前，幾乎是水平地向外移動，但已開始下墜；相對於 $\overrightarrow{OP}$ 的方向而言，一旦速度中向下的部分蓋過向外的部分，質點便會靠近。對於較平的拋擲，質點總是在前方足夠遠的位置，以致它的速度從不指回 O。臨界情況就是速度恰好只在一個瞬間與 $\overrightarrow{OP}$ 垂直，亦即圖 11.10.1（見網上該節的完整版）中距離停頓的那一刻。

單調性並非必然

許多「顯然」會增加的量，其實並不如此。月球與地球的距離會來回振盪；在彎曲的路上，即使其中一輛車一直領先，兩車之間的距離仍可以減少；獵物大量繁殖的時候，捕食者的數量卻可以下降。要證明一個量是單調的，通常就是要證明某個導數的正負號固定不變，而這裏所用的技巧（化為多項式，再檢查它的根或判別式）正是標準的做法。在分析學（analysis）中，單調性往往是證明收斂（convergence）的關鍵：有界的單調數列必定收斂，正如你在第 2 章所見。

延伸練習

1 **有多近？**對於 $\alpha = 80°$，求 OP 取得局部極大值（local maximum）和局部極小值（local minimum）的時間，以及該兩刻的距離，以 u^2/g 為單位。

2 **在斜面上。**把球沿一個與水平成 β 角的斜面向上拋出，並落在斜面上，就這個情況重做第 (i) 部分。臨界角（從斜面量起）會改變嗎？

3 **考慮空氣阻力。**假設球還受到一個與其速度成正比的阻力（resistance）。不作計算，你預期臨界角會大於還是小於 $70.5°$？為甚麼？

4 **從高處拋出。**若球從懸崖頂拋出，並落在遠低於崖頂的地方，證明無論以甚麼角度拋出，OP 最終都會遞增，並判斷是否存在某些角度，令它在某個階段遞減。

延伸閱讀

- **James Walker, *The Flying Circus of Physics***（Wiley）。數以百計出人意表的日常物理謎題。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 3 章，講述拋體運動，並附有數道有違直覺的題目。
- **J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。證明一樣東西恆大於另一樣東西的藝術。

完整的引導式解答見第 11.10 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/coming-back.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com