11.1 共振

工作紙

題目

STEP II 1991，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s2-q12

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

? **想一想**　質點懸掛在平衡位置，繩的伸長量（extension）為 c。若繩的彈性模量（modulus）為 λ，則 λ、a、c、m 與 g 之間有甚麼關係？當頂端向下移動了 $b\sin pt$，而質點向下移動了 x 時，伸長量是多少？

階段 1　運動方程（equation of motion）

涵蓋：運動方程

? **想一想**　取向下為正方向。當頂端向下移動了 $b\sin pt$，而質點(particle)向下移動了 x 時，伸長量（extension）是多少？寫出牛頓第二定律（Newton's second law），並利用平衡（equilibrium）條件消去 mg。

階段 2 求解

涵蓋：求解 $x(t)$

想一想 把方程寫成 $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin pt$。試用特別積分（particular integral）$x = C \sin pt$，然後加上餘函數（complementary function）。

停一停，試一試 質點起初在平衡位置靜止，所以 $x(0) = 0$ 及 $\dot{x}(0) = 0$。利用這兩個條件求出兩個常數。

階段 3　保持繃緊

涵蓋：繩子何時保持繃緊（taut）

想一想　當伸長量 $c + x - b\sin pt$ 為正數時，繩子便是繃緊的。把它以 t 表示並化簡。

停一停，試一試　$p\sin pt - n\sin nt$ 最小可以負到甚麼程度？由此找出一個能使伸長量保持為正數的條件。

背後的數學

共振極限

在解中令 $p \to n$。分子和分母都趨於零，計算極限（或使用洛必達法則（l'Hôpital's rule），對 p 求導）可得

$$x(t) \to \frac{b}{2}(\sin nt - nt\cos nt).$$

$nt\cos nt$ 這一項會無止境地增大：恰好以固有頻率驅動時，振幅隨時間線性增長，每一下推動都與運動同步，為它再添一分。在略低於共振的頻率下，兩個頻率時而同步、時而錯開，產生拍（beats）：振幅以緩慢的頻率 $n - p$ 時漲時落（圖 11.1.1）。兩條結他弦的音高幾乎調準時，聽到的也是同樣的拍。

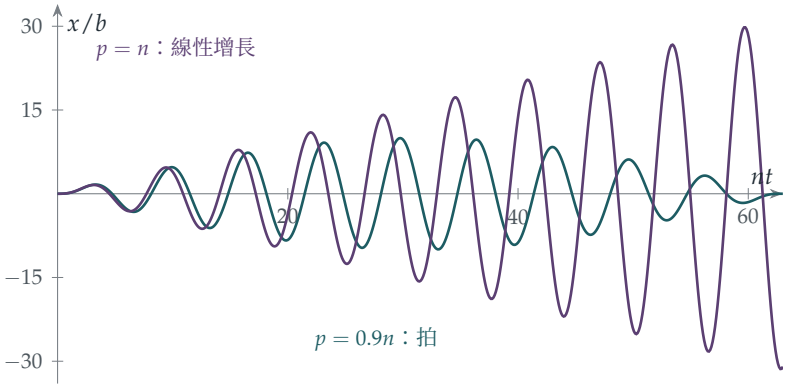

圖 11.1.1 質點的響應（不考慮繩子鬆弛），以搖動振幅 b 為單位。當 $p = 0.9n$（藍綠色）時，響應增大至約為 b 的十倍，然後再度消退，拍的周期為 $\frac{2\pi}{n-p}$。在恰好共振，即 $p = n$（紫紅色）時，振幅無止境地增長。

阻尼與共振曲線

現實中的系統會因摩擦或空氣阻力而損失能量，這就限制了振幅的增長。有阻尼（damping）時，系統對頻率為 p 的驅動力的穩態響應，其振幅在固有頻率附近達到峯值；峯愈尖銳，阻尼就愈小。工程師用品質因數（quality factor）Q 來描述這一點：粗略地說，它是系統在失去大部分能量之前所完成的振動次數。酒杯的 Q 數以千計，所以一個恰好等於其固有頻率的持續音可以把它震碎。汽車的懸掛系統則刻意設計成 Q 值很低，以免路面顛簸令車身彈跳不止。

會動的橋

1831 年，一隊士兵以整齊步伐操過曼徹斯特附近的布勞頓吊橋（Broughton Suspension Bridge），令橋身振動，最終倒塌；自此以後，軍隊過橋時都奉命打亂步伐。倫敦千禧橋（London Millennium Bridge）於 2000 年 6 月啟用，人羣一踏上橋，橋身便開始左右搖擺：行人不自覺地調整步伐去配合搖擺，同步地為它注入能量，結果該橋關閉了兩年，以便加裝阻尼器。1940 年塔科馬海峽吊橋（Tacoma Narrows Bridge）那次著名的倒塌，常被說成是共振，但其實是另一種現象，即氣動彈性顫振（aeroelastic flutter），當中風所施的力取決於橋本身的運動。要分析它，需要用到自激振動（self-excited oscillation）和極限環（limit cycle）的概念（Section 8.4）。

延伸練習

1 **下墜的升降機。**試做 STEP II 1996，第 11 題（step.maths.org/questions/96-s2-q11）：升降機內有一個質量繫於彈性繩上，升降機先開始加速，其後停止加速。留意最終的

振幅如何取決於加速持續的時間。

2 **共振之時。**試用特解 $x = Ct\cos nt$，直接解 $\ddot{x} + n^2x = n^2b\sin nt$，其中 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$。驗證所得結果與上文的極限一致。

3 **拍。**證明 $n\sin pt - p\sin nt$ 可寫成兩項之和，而當 p 接近 n 時，其中一項近似於 $2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2}$。由此解釋拍的周期為何是 $\frac{2\pi}{n-p}$。

4 **有阻尼的共振。**對於 $\ddot{x} + 2k\dot{x} + n^2x = F\cos pt$，其中 $k > 0$ 且很小，求穩態振幅，並證明當 $p^2 = n^2 - 2k^2$ 時振幅最大。

延伸閱讀

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series）。第 4 章講述受迫振動與共振，是這個課題的經典論述。
- **Steven Strogatz, *Sync***（Penguin）。講述事物如何趨於同步，從螢火蟲談到千禧橋。
- **Henry Petroski, *To Engineer Is Human***（Vintage）。講述工程上的失敗個案，包括歷史專欄中提到的幾座橋。

完整的引導式解答見第 11.1 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/resonance.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com