10.8 排成三角形的三顆恆星

工作紙

題目

STEP I 1999，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s1-q11

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　一顆星要以角速度（angular velocity）ω 沿半徑為 R 的圓運動，它所受的總力必須是甚麼？

階段 1　幾何關係

涵蓋：三顆星

> **想一想**　邊長為 a 的等邊三角形（equilateral triangle），每個頂點與中心相距多遠？可利用以下事實：中心位於每條中線（median）上，與頂點的距離為中線長度的三分之二。

階段 2 一顆星所受的力

涵蓋：三顆星

停一停，試一試 另外兩顆星各以大小為 $\frac{\gamma m^2}{a^2}$ 的力沿三角形的邊拉它。這兩個拉力之間的夾角是多少？求它們的合力（resultant），並說明合力指向何處。

階段 3 角速度（angular velocity）

涵蓋：三顆星

想一想 令合力等於 $m\omega^2 R$，其中 R 是該星與中心的距離，然後解出 ω。

階段 4　位於中心的第四顆星

涵蓋：在中心加入第四顆星

> **想一想**　位於中心的星所受的淨力是否為零？它對每顆位於頂點的星額外施加了多大的拉力？把這個力加到合力上，再次解出 ω。

背後的數學

喬裝的開普勒定律

把答案寫成 $\omega^2 a^3 = \gamma(3m)$。對於相距 a、沿圓形軌道運行的兩個天體，開普勒（Kepler）第三定律（Section 10.6 的一道練習）指出 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2)$，右邊出現的是總質量。三顆星遵從同一條定律，總質量為 $3m$。事實上，拉格朗日證明了等邊三角形解對任意三個質量都存在，而不限於相等的質量：三角形繞質心旋轉，並且 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2 + m_3)$。歐拉（Euler）在幾年前已找到第二族解，其中三個天體位於一條旋轉的直線上。這五種位形（三種共線、兩種三角形，不計標號的差別）是三個天體能保持形狀不變的僅有情況。

拉格朗日點

取 m_1 為太陽，m_2 為一顆行星，m_3 為一顆微小的小行星。等邊三角形解告訴我們，小行星可以停留在與太陽和行星構成等邊三角形的第三個頂點上，在行星軌道上位於行星的前方或後方。這就是拉格朗日點（Lagrange points）L_4 和 L_5；歐拉的共線解則給出 L_1、L_2 和 L_3。木星有超過一萬顆已知的「特洛伊」小行星，聚集在它的 L_4 和 L_5 點附近。詹姆斯·韋伯太空望遠鏡（James Webb Space Telescope）在日地系統的 L_2 點附近運行，位於地球以外 1.5 百萬公里處，在那裏它可以把太陽、地球和月球全部擋在遮陽罩之後。

穩定性

造星者的三角形能維持下去嗎？對於相等的質量，答案是不能：最輕微的擾動也會不斷增長，幾顆星最終不是四散飛離，就是互相碰撞。Edward Routh 在 1875 年證明，拉格朗日的三角形只有在其中一個質量佔絕對優勢時才是穩定（stable）的，確切的條件是

$$27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2.$$

對於太陽和木星，這個條件綽綽有餘地成立，這就是特洛伊小行星得以長存的原因。對於三個相等的質量，$27 \times 3m^2 > 9m^2$，所以這個位形並不穩定。

龐加萊的錯誤與 8 字形軌道

1887 年，瑞典國王奧斯卡二世（Oscar II）懸賞徵求多體問題的解。龐加萊在 1889 年憑一篇關於三體問題的長篇論文獲獎，但論文付印期間，一位編輯發現了其中一處漏洞。在修正的過程中，龐加萊發現有些解的表現「複雜得驚人，我甚至無法嘗試把它畫出來」：這是人類對混沌的第一瞥。已印好的論文全數收回銷毀，費用由龐加萊承擔。新的特殊解至今仍不斷被發現：1993 年 Cristopher Moore 以數值方法發現，而 2000 年 Alain Chenciner 與 Richard Montgomery 證明，三個相等的質量可以沿一條 8 字形曲線互相追逐。此後，人們借助電腦又找到了數以千計的周期軌道。

延伸練習

1. **正方形上的四顆星。**四顆質量為 m 的星位於邊長為 a 的正方形的四個頂點。證明它們可以繞中心作剛性旋轉，其中 $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$。

2. **兩顆相同的星和一顆行星。**兩顆質量為 M 的星相距 a，繞它們的質心運行。一顆質量可忽略的行星位於中心。它是否處於平衡？對於沿兩星連線方向的微小位移，它是否穩定？垂直於連線的方向又如何？

3. **不相等的質量。**質量分別為 m_1、m_2、m_3 的三顆星位於邊長為 a 的等邊三角形的三個頂點，並繞它們的質心 G 旋轉。證明 m_1 所受的引力為 $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}\overrightarrow{P_1G}$，其中 P_1 是它的位置。（提示：把各力寫成向量，並利用質心的定義。）由此推導出拉格朗日的結果。

4. **n 顆星。**n 顆相同的星位於一個正 n 邊形的各個頂點，該正多邊形內接於半徑為 R 的圓。求剛性旋轉的 ω^2，並把它表示成 $\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$ 對 k 求和的形式。

延伸閱讀

- **June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem***（American Mathematical Society）。講述那次懸賞以及龐加萊發現混沌的故事。
- **Richard Montgomery, "A new solution to the three-body problem"**, *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001)。由 8 字形軌道的其中一位發現者親自講解；可於網上免費閱讀。
- **Florin Diacu & Philip Holmes, *Celestial Encounters***（Princeton University Press）。一部關於三體問題與混沌的通俗歷史。

完整的引導式解答見第 10.8 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/three-stars.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com