10.7 球殼內的引力

工作紙

題目

STEP III 1999，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s3-q9

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　考慮圓環上兩小段位於同一直徑兩端的部分。畫出它們對質點（particle）所施的力。哪些分量（component）互相抵銷，哪些相加？

階段 1　圓環

涵蓋：圓環

> **想一想**　圓環上每一小段與質點（particle）的距離都相同，而它與質點的連線跟軸（axis）所成的角亦相同。一小段圓環的引力沿軸方向的分量（component）是多少？把它們全部加起來。

階段 2 把球殼切成圓環

涵蓋：球殼

想一想 把質點放在軸上，與球心相距 b。按球心處的角 ϕ 把球殼（shell）切成一個個薄圓環。圓環的半徑、它沿軸與質點的距離，以及它的質量分別是多少？

階段 3 合適的變數

涵蓋：球殼

停一停，試一試 分母含有 $a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$。把它記作 s^2：s 是甚麼？把積分變數（variable of integration）由 ϕ 換成 s。積分的上下限（limits）是甚麼？

階段 4　結果為零

涵蓋：球殼

? **想一想**　計算對 s 的積分，然後化簡。

背後的數學

牛頓的圓錐論證

牛頓本人的證明（《自然哲學的數學原理》（*Principia*）第一卷命題 70）完全沒有用到積分。以質點為頂點，畫一個狹窄的對頂圓錐，它在球殼上截出兩小塊曲面（圖 10.7.1）。這兩小塊的面積與它們到質點的距離的平方 r_1^2 和 r_2^2 成正比（兩小塊與圓錐所成的角相等，因為一條弦在兩端與圓所成的角相等）。所以它們的質量與 r_1^2 和 r_2^2 成正比，而它們的引力與質量除以距離平方成正比，因此大小相等、方向相反。每一個通過質點的對頂圓錐都互相抵銷，所以合力為零。這種抵銷之所以成立，正是因為平方反比定律（inverse-square law）：若換成距離的任何其他次方，球殼便會對質點產生推力或拉力。

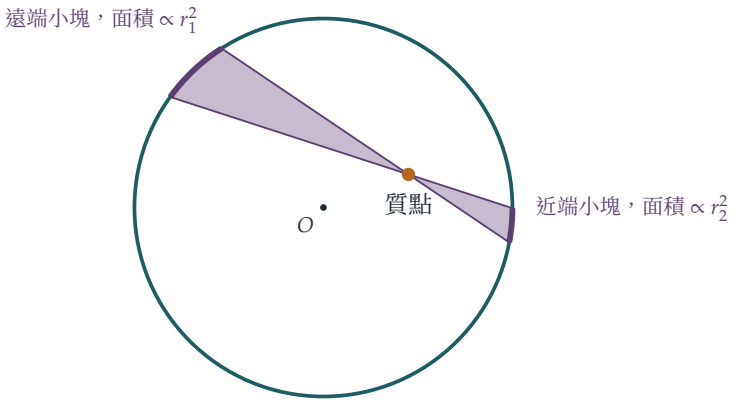

圖 10.7.1 牛頓的論證。由質點出發的一個細窄對頂圓錐在球殼上截出兩小塊。遠端的一塊較大，面積之比等於距離平方之比，但它的引力也恰好按同一比例減弱。兩個引力互相抵銷，其餘每一對亦然：在球殼之內，引力消失。

塌縮的雲團

STEP III 1987 Q14 把這個定理反過來用。在均勻球體之外，位於球面的質點所受的引力為 GMm/r^2，就如全部質量都集中在球心一樣。現在取一團靜止的均勻球狀塵埃雲，半徑為 R，質量為 M，讓它在自身引力下塌縮。球面上的質點只感受到它以內的質量，而在所有物質向內墜落的過程中，這質量一直是 M，所以它向內的速率 $v = -\dot{r}$ 滿足

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM}{r^2}, \qquad \text{所以} \qquad v^2 = 2GM\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\Big).$$

代入 $r = R\cos^2\alpha$（其中一道練習），可得到達半徑 r 所需的時間為 $\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\big(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\big)$。當 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 時，整團雲塌縮成一點，所需時間就是**自由落體時間**（*free-fall time*）

$$t_{\mathrm{ff}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}},$$

其中 ρ 是密度。值得注意的是，雲團的每一層球殼都在同一刻到達中心，因為這個時間只取決於密度（圖 10.7.2）。對於一團典型的星際雲，每立方米約有 10^{-17} kg，t_{ff} 約為 700 000 年：這決定了恆星形成的時間尺度。

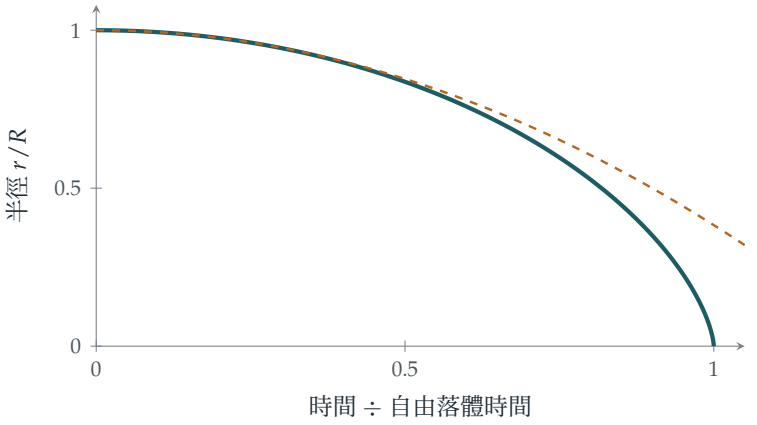

圖 10.7.2　塌縮中的均勻塵埃雲的半徑隨時間的變化（青綠色曲線）。它起初很慢，就像一塊剛放手的石頭（琥珀色虛線拋物線是恆定加速度的近似 $r = R - \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}t^2$），其後急劇加速，並在 $t = t_{\text{ff}}$ 時降至零。這條曲線是半條擺線（cycloid）。

牛頓的延遲與高斯定律

牛頓早在 1660 年代已掌握平方反比定律，但到 1687 年才發表他的引力理論。據一些歷史學家所說，其中一個原因是他在證明球殼定理之前，無法說明為何可以把地球當作點質量（point mass）；一旦證明了，《自然哲學的數學原理》的其餘部分便水到渠成。今天，這個定理只是高斯定律（*Gauss's law*）的一個簡短推論。高斯定律指出，穿過任何閉合曲面向外流出的引力場總量，與曲面內的質量成正比。在球殼內取一個同心的球面。它沒有包圍任何質量，所以穿過它的總流量為零。單憑這一點並不足以令場為零（均勻場穿過任何閉合曲面的總流量都是零，從一邊流入，從另一邊流出），但這裏對稱性幫了忙：場必定筆直指向球心或背離球心，而且在球面上各處強度相同，所以總流量為零就意味着場為零。同一條定律也支配電場，這就是為甚麼帶電金屬殼內沒有電場，也是為甚麼汽車能保護你免受雷擊。

延伸練習

1. **球殼之外。**完成「暫停思考」方框中的問題：證明在球殼之外，所受的力為 $\frac{GM}{b^2}$。由此推斷，質量為 M 的均勻實心球對球外質點的引力，就如其質量集中在球心一樣。

2. **塌縮時間。**試做 STEP III 1987，第 14 題（step.maths.org/questions/87-s3-q14）。這道題求一團塵埃雲在自身引力下塌縮需要多少時間；用三角代換（trigonometric substitution）便可算出積分。

3 **穿越地球的隧道。**證明在均勻實心球之內，與球心相距 b 處所受的力為 $\frac{GMb}{a^3}$，與 b 成正比。由此推斷，把一個球投進一條穿過地球中心的隧道，它會來回振盪，週期（period）為 $2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$，約 84 分鐘，與一顆貼着地面飛行的衛星的週期相同。

4 **另一種力的定律。**假如引力遵從立方反比定律，球殼內所受的力是否仍然為零？（重做第 3 階段，以 $\frac{1}{s^3}$ 取代 $\frac{1}{s^2}$。）

延伸閱讀

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），關於萬有引力的章節，當中包括球殼定理。
- **Subrahmanyan Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader***（Oxford University Press）。由一位諾貝爾獎得主講解牛頓的證明，包括命題 70 和 71。
- **Andrew Pontzen, *The Universe in a Box***（Riverhead）。講述引力、塌縮和模擬如何解釋宇宙的結構。

完整的引導式解答見第 10.7 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/shell-theorem.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com