10.6 二體化為一體

工作紙

題目

STEP III 2004，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s3-q11

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　寫出每個質點的牛頓第二定律（Newton's second law）。每個力朝哪個方向作用？

階段 1　兩質點的間距

涵蓋：關於 z 的方程

> **想一想**　分別對 P 和 Q 寫出牛頓第二定律（Newton's second law），並留意每個力的方向。然後把兩式相減，得出一條只含 z 的方程。

階段 2 間距的能量方程

涵蓋：求解 z

想一想 寫成 $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$，分離變數（separate variables）後積分。在 $t = 0$ 時，z 和 $\dot{z}$ 分別是多少？

階段 3 出奇地簡單的解

涵蓋：求解 z

停一停，試一試 答案與 z^2 有關，所以設 $w = z^2$。先以 w 表示 $\dot{w}^2$，然後求導。$\ddot{w}$ 是甚麼？利用 w 和 $\dot{w}$ 的初始值（initial values）。

階段 4　**質心**

涵蓋：求 x_1 和 x_2

想一想　把兩條運動方程（equations of motion）相加，使各力互相抵消。由此可知 $2x_1 + x_2$ 有甚麼性質？再結合 $x_2 - x_1 = z$。

背後的數學

為甚麼 z^2 是二次式

對任何形如 $\ddot{z} = k/z^3$ 的力律，同樣的計算都給出 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(z^2) = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\dot{z}^2 + \frac{2k}{z^2} =$ 常數，因為 $\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{k}{2z^2}$ 正是守恆的能量。所以 z^2 必定是 t 的二次式。為甚麼？

隱藏的原因是這樣的。設想一個質點在平面上自由運動，即沿直線以恆定速率前進。它與原點的距離 r 滿足 $r^2 =$（一個二次式，變數為t），因為 $r^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2$。而在極坐標（polar coordinates）中，它的徑向運動方程是 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$；由於角動量（angular momentum）$h = r^2\dot{\theta}$ 是常數，方程變成

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3}.$$

立方反比的排斥力，正正就是隱藏的角向運動所產生的離心（centrifugal）效應。在我們的問題中，$z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = (2t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ 是某一點與原點距離的平方，該點以速率 2 沿一條直線運動，而這條直線與原點的距離為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$。一維上互相排斥的兩個質點，就是二維自由運動的影子。

二體問題

只要兩個物體之間的力僅取決於它們的間距，並沿兩者的連線作用，本題的方法便適用，一維如是，三維亦如是。質心作勻速運動，而間距向量 $\mathbf{r}$ 服從 $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$，其中 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$。對引力而言，這就是開普勒問題（Kepler problem），由牛頓在《自然哲學的數學原理》（*Principia*）中解決：間距描出的軌跡是橢圓、拋物線或雙曲線。地球和

太陽都繞着它們的共同質心運行，而這個質心位於太陽內部；地球和月球則繞着距離地心約 4700 km 的一點運行，這一點在地球內部，但離地心頗遠，所以地球每月都會擺動一次。天文學家正是靠偵測恆星的這種擺動，來尋找環繞其他恆星的行星。

可積系統

1969 年，Francesco Calogero 研究直線上多個質點以平方反比勢（即立方反比力）互相排斥的情況，發現無論質點數目多少，這個系統竟然都可以精確求解。Jürgen Moser 在 1975 年解釋了箇中原因，他用上一個矩陣，其特徵值（eigenvalues）在矩陣隨時間演化時保持不變：這就是 Section 7.7 的 *Lax* 對（Lax pairs）。*Calogero–Moser* 系統如今是可積系統（integrable system）的核心例子，所謂可積系統，就是守恆量多得足以完全求解的系統；它把力學與隨機矩陣、量子場論及孤立子理論聯繫起來。

延伸練習

1 **繩上的兩個質量。**試做 STEP III 2023，第 9 題（載於 OCR 提供下載的 2023 年試卷，www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip）。題目考察以繩相連的兩個質點，並利用質心把運動分離。留意其中一個質點何時向後移動。

2 **吸引力。**把力改為吸引力 $\frac{2}{z^3}$，重做本題。證明 z^2 仍然是 t 的二次式，並求兩個質點何時相撞。

3 **隱藏的平面。**就題目中的運動，求出平面上與原點距離為 $z(t)$ 的那條直線運動軌跡，以及掃過的角 $\theta(t)$。驗證 $z^2\dot{\theta}$ 是常數，且 $(z^2\dot{\theta})^2 = 3$。

4 **開普勒第三定律。**兩顆質量分別為 m_1 和 m_2 的恆星相距 a，在引力作用下繞它們的質心作圓周運動。證明週期 T 滿足 $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}$。

延伸閱讀

- **John Taylor, *Classical Mechanics***（University Science Books），第 8 章。二體問題、約化質量與軌道。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），第 10 章，論有心力。
- **Francesco Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments***（Springer）。給有志挑戰的讀者：精確可解系統的世界。

完整的引導式解答見第 10.6 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/two-body.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com