10.5 有限時間內的無限次反彈

工作紙

題目

STEP III 2002，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/02-s3-q11

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　當一個質點（particle）以恢復系數 e 撞向一面光滑的牆時，速度沿牆方向的分量會怎樣？垂直於牆的分量又會怎樣？

階段 1　離開時的角度

涵蓋：求 e 及 v_1/u_1

想一想　設質點（particle）離開 M_1 時與牆 OA 所成的角為 φ。把三角形 OM_1N_1 的內角加起來，以 θ 表示 φ。

停一停，試一試　在光滑（smooth）的牆上，速度沿牆方向的分量（component）保持不變，而垂直於牆的分量則乘以 e。利用這兩點，配合角 θ 和 φ，求出 e 及 v_1/u_1。

階段 2　規律重複出現

涵蓋：在有限時間內到達 O

想一想　在 N_1 處，質點以甚麼角度撞上牆 OB？與在 M_1 發生的情況比較一下。其後每一次反彈又會怎樣？

階段 3　兩個比

涵蓋：在有限時間內到達 O

停一停，試一試　在三角形 OM_1N_1 中運用正弦定理（sine rule），求出路徑每一段比前一段縮短的倍數。每次反彈後，速率（speed）都按 v_1/u_1 的比例下降。那麼每一段所需的時間按甚麼倍數改變？

階段 4 等比級數

涵蓋：在有限時間內到達 O

? **想一想** 總時間是一個等比級數（geometric series）。它的公比（ratio）在甚麼情況下介乎 0 與 1 之間？利用 $\sin X - \sin Y = 2\cos\frac{1}{2}(X+Y)\sin\frac{1}{2}(X-Y)$。

背後的數學

當 $\theta \geq 60°$ 時

當 $\theta = 60°$ 時，這個比恰好等於 1：每一段所需的時間都相同，質點雖然愈來愈接近 O，卻永遠到不了。（速率和每段的長度都按同一個因子縮小。）當 $\theta > 60°$ 時，每一段所需的時間愈來愈長。在所有情況下，質點都會趨近 O，並反彈無窮多次；只有當 $\theta < 60°$ 時，它才會在有限時間內到達。$e = \tan 30° / \tan 60° = \frac{1}{3}$ 這個值就是分界線。

彈跳的球與非彈性坍縮

同一現象最簡單的例子：一個球掉落到地板上，反彈至高度 e^2H，然後是 e^4H，如此類推。兩次彈跳之間的時間與每次彈跳時的速率成正比，而速率按因子 e 縮小，所以總時間是一個等比級數：設 $T_0 = \sqrt{2H/g}$ 為第一次下落的時間，則球在

$$T_0 + 2eT_0 + 2e^2T_0 + \cdots = T_0\,\frac{1+e}{1-e}.$$

之後停止彈跳。無窮多次彈跳，然後靜止。1992 年，Sean McNamara 和 William Young 證明了，在模擬排成一直線的多個非彈性質點時，同樣的事情也會發生：其中一組質點可以在有限時間內發生無窮多次碰撞，這就是「非彈性坍縮」。沙和顆粒流的模擬必須加入特別的規則來避免這種情況，而這個現象也有助解釋為何顆粒氣體會自發地聚集成團。

芝諾與收斂

芝諾的悖論約於公元前 450 年提出，困擾了哲學家兩千年。數學上的解答，即無窮和可以有有限的值，要到十九世紀才變得嚴謹，當時柯西（Cauchy）、魏爾斯特拉斯（Weierstrass）等人以極限（limit）來定義收斂（這是第 2 章的主題）。這道題目令人驚訝之處，在於這個過程在物理上是無窮的：確確實實有無窮多次碰撞，發生在有限時間之內。研究多邊形內的桌球運動和碰撞質點運動的數學家，把這種行為稱為芝諾現象（Zeno phenomenon）；要證明由互相碰撞的硬球組成的系統在所有時刻都有明確定義的運動，這正是其中一個微妙之處。

延伸練習

1. **總距離。**證明對於 30° 與 90° 之間的每一個 θ，由 M_1 到 O 所走的總距離都是有限的，並以 OM_1 和 θ 表示這個總距離。

2. **其他楔形。**把 30° 換成角 α 的楔形，重做這道題目。證明 $\varphi = \theta - \alpha$，並求出質點在有限時間內到達 O 時 θ 須滿足的條件。

3. **彈性牆。**若 $e = 1$，質點有可能到達 O 嗎？（提示：把楔形沿它的牆反覆反射，使路徑變成一條直線。圍繞 O 可以放下多少個 30° 的楔形？）

4. **彈跳的球。**一個球從 1 m 的高度掉下，$e = 0.8$。它會彈跳多久？它總共走了多遠？（取 $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$。）

延伸閱讀

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 5 章。書中有多道關於彈跳的球和無窮多次連續碰撞的題目。
- **Sean McNamara & William Young, "Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium"**（一維顆粒介質中的非彈性坍縮與聚團），*Physics of Fluids A* 4 (1992)。
- **Serge Tabachnikov, *Geometry and Billiards***（American Mathematical Society；可在網上免費閱讀）。講述桌球的數學，包括練習中用到的展開技巧。

完整的引導式解答見第 10.5 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/zeno-wedge.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com