10.4 一個分子與一個活塞

工作紙

題目

STEP I 2002，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/02-s1-q10

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> ? **想一想**　一個以速率 w 運動的球，撞上一堵以速率 u 迎面移來的牆，並作彈性（elastic）反彈。反彈後球的速率是多少？（試在牆的參考系中思考。）

階段 1　n 次反彈後的速率

涵蓋：速率

> ? **想一想**　試在活塞（piston）的參考系（frame）中考慮一次碰撞（collision）。碰撞前後，粒子相對於活塞的速率（speed）是多少？回到地面參考系後又是多少？粒子從固定端反彈時，速率會改變嗎？

階段 2 長度的遞歸關係

涵蓋：距離

> **停一停，試一試** 第 n 次與第 $(n+1)$ 次碰撞之間相隔時間 t_n，其間活塞移動了多遠？粒子又走了多遠？把兩者都用 d_n 和 d_{n+1} 表示，再將兩式相除以消去 t_n。

階段 3 裂項相消

涵蓋：d_n 的公式

> **想一想** 反覆運用遞歸關係（recurrence），把 d_n 寫成 d_1 乘以一連串分數的積。哪些項會互相抵消（telescoping）？

階段 4　$v = u$ 的情況

涵蓋：$v = u$ 的情況

> **想一想**　把 $v = u$ 代入你求得的 d_n 公式，然後利用 $ut_n = d_n - d_{n+1}$，並分解成部分分式（partial fractions）。

背後的數學

一個絕熱不變量

把速率乘以長度：

$$v_n d_n = (v + 2nu) \cdot \frac{v + u}{v + (2n-1)u}\, d_1 \approx (v + u) d_1$$

這在 n 很大時成立，在 u 遠小於 v 時亦然。所以

$$\text{速率} \times \text{長度} \approx \text{常數}.$$

如果活塞相對於分子移動得很慢，那麼無論活塞移動多遠，乘積 vd 都幾乎不變。像這樣在系統緩慢改變時幾乎保持不變的量，稱為**絕熱不變量**。一般而言，往復運動的絕熱不變量是 $\oint p\,\mathrm{d}q$，即動量（momentum）沿一個週期的積分；在這裏它就是 $mv \times 2d$。

從一個分子到一團氣體

由於 $v \propto 1/d$，動能 $\tfrac{1}{2}mv^2$ 與 $1/d^2$ 成正比。對於由許多沿同一方向運動的分子組成的氣體，溫度與平均動能成正比，所以 $T \propto 1/d^2$：長度減半，溫度便變成四倍。在三維空間中，能量由三個運動方向分擔，而同樣的論證（費曼（Feynman）在他的 *Lectures* 中給出了這個論證）可推出單原子氣體（monatomic gas）的絕熱壓縮定律，

$$TV^{2/3} = \text{常數}, \qquad \text{或等價地} \qquad pV^{5/3} = \text{常數}.$$

指數 $\tfrac{5}{3}$ 就是單原子氣體著名的比熱比（ratio of specific heats）γ。把單車氣泵內的空氣壓縮至原來體積的五分之一，如果做得夠快而且沒有熱量散失，其絕對溫度會升高至原

來的 $5^{0.4} \approx 1.9$ 倍（空氣分子有兩個原子，因而 $\gamma = 1.4$）：由 20°C 升至約 280°C。氣泵之所以沒有那麼熱，只是因為壓縮得慢，熱量又會散走。

費米的宇宙射線

1949 年，恩里科·費米（Enrico Fermi）提出，宇宙射線（cosmic rays）這些從太空而來、能量極高的粒子，其加速方式與本題的分子如出一轍：它們在星際氣體雲中運動的磁場上反覆反彈，每次獲得一點能量。現時認為，「費米加速」（Fermi acceleration）在超新星殘骸的激波處發生，粒子在那裏來回穿越激波，就像分子在活塞與牆壁之間往返一樣。絕熱不變量在量子力學的誕生中也扮演過一個角色：保羅·埃倫費斯特（Paul Ehrenfest）在 1916 年指出，被量子化的量必定是絕熱不變量，因為緩慢的改變不可能令系統在量子態之間躍遷。

延伸練習

1. **不變量的精確形式。**證明 $v_n d_n - (v+u)d_1 = \frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$，並由此推出當 $n \to \infty$ 時 $v_n d_n \to (v+u)d_1$。

2. **把活塞拉出。**設活塞改為以速率 $u < v$ 向外抽出，把題目重做一次。證明質點會減速，並求 $v_n d_n$。（氣體膨脹時會冷卻。）

3. **能量。**在 $v = u$ 的情況下，隨着活塞逼近末端，分子的速率會無止境地增長。求第 n 個週期內活塞所受的平均力（動量的改變除以 t_n），並證明它按 n^3 的速度增長。這說明了把活塞一直推到盡頭所需的功有甚麼特點？

4. **彈跳的球。**一個球在重力作用下於地板上作彈性彈跳，而地板被緩慢地升高。試猜出這個運動的一個絕熱不變量。（提示：與 vd 相對應的量是平均速率乘以彈跳的高度，或等價地，能量乘以兩次彈跳之間的時間。）

延伸閱讀

- **Richard Feynman, Robert Leighton & Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I**（《費曼物理學講義》第一卷，可在網上免費閱讀），第 39 章「The kinetic theory of gases」（氣體動力論）。同一個活塞論證，並推廣至三維。

- **Stephen Blundell & Katherine Blundell, *Concepts in Thermal Physics***（Oxford University Press）。大學一年級程度的絕熱過程與氣體動力論。

- **Lev Landau & Evgeny Lifshitz, *Mechanics***（Butterworth-Heinemann），§49。對絕熱不變量的精簡論述，留待日後閱讀。

完整的引導式解答見第 10.4 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/piston.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com