10.3 火箭與槍炮

工作紙

題目

STEP III 2017，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s3-q11

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　某一門炮發射之前，貨車以 V 行駛。發射之後，拋射體的速度是 $V - v$（即以速率 $v - V$ 向後運動）。拋射體相對於發射前的貨車的速度是多少？

階段 1　一次過發射

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　一切由靜止開始，所以總動量（momentum）為 0。由於 $V = 0$，每個拋射體（projectile）離開時的速度都是 $-v$。寫出動量的式子以求 u，然後把各個動能（kinetic energy）加起來。

階段 2 逐個發射

涵蓋：第 (ii) 部分

停一停，試一試 在第 r 次發射之前的一刻，貨車上載有多少個拋射體？那麼正在運動的質量是多少，其速率又是多少？發射之後，剛射出的拋射體的速率是多少？寫出動量守恆（conservation of momentum）的式子，再整理而得 $(*)$。

想一想 把由 $(*)$ 得出的增量 $u_r - u_{r-1}$ 加起來。將每一項與 $\frac{mv}{M}$ 比較。

階段 3　能量的帳單

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想　寫出 $K_r - K_{r-1}$：只有貨車連同車上的負載，以及剛射出的那個拋射體，速率才有改變。

停一停，試一試　把含 $u_r^2 - u_{r-1}^2$ 的一項按平方差（difference of two squares）分解因式，並利用 $(*)$ 代換 $(M + (n-r)m)(u_r - u_{r-1})$。然後對 r 求和：各增量會裂項相消（telescope）。

背後的數學

應該讓甚麼保持不變？

真正的炮或火箭引擎，是以相對於自身的固定速率拋出拋射體的，而這個速率是在拋射體剛離開之後量度的。本題的參照對象卻是貨車在發射之前的速率。對一枚細小的拋射體來說，兩者相差極微；但當 n 枚拋射體同時發射時，差別就很大：在第 (i) 部分，一大批沉重的拋射體以速率 v 被向後拋出，彷彿貨車完全沒有後座（recoil）一樣，這需要大量能量。

假如改為每枚拋射體都以相對於發射之後的貨車的速率 v 離開，結論就會逆轉。同時

發射得 $u = \frac{nmv}{M+nm}$；逐一發射得 $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{mv}{M+km}$，後者較大，因為每一項都至少是 $\frac{mv}{M+nm}$。這時逐一發射勝出：每枚拋射體都是從一輛已在運動的貨車上蹬出去的，而且越後發射的炮，要加速的質量越少。（請在練習中驗證這一點。）

火箭方程

現在讓拋射體變得極小而數目極多，並保持總質量 $\mu = nm$ 不變：這就是一枚連續燃燒燃料的火箭。u_n 的和變成一個積分（兩種約定給出相同的極限）：

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{mv}{M+km} \;\to\; \int_0^{\mu} \frac{v\,\mathrm{d}s}{M+s} = v \ln \frac{M+\mu}{M}.$$

這就是*齊奧爾科夫斯基火箭方程*：若火箭噴出的廢氣以相對於火箭的速率 v 離開，火箭所增加的速率為

$$\Delta u = v \ln \frac{m_{初}}{m_{末}}.$$

圖 10.3.1 比較了這三個答案。麻煩就出在對數（logarithm）上：若排氣速率約為 4.5 km/s（優良的化學燃料），要達到約 7.8 km/s 的軌道速率，質量比必須是 $e^{7.8/4.5} \approx 5.7$；一旦把空氣阻力和重力計算在內，這個比值更接近 10 或以上。火箭幾乎全是燃料。

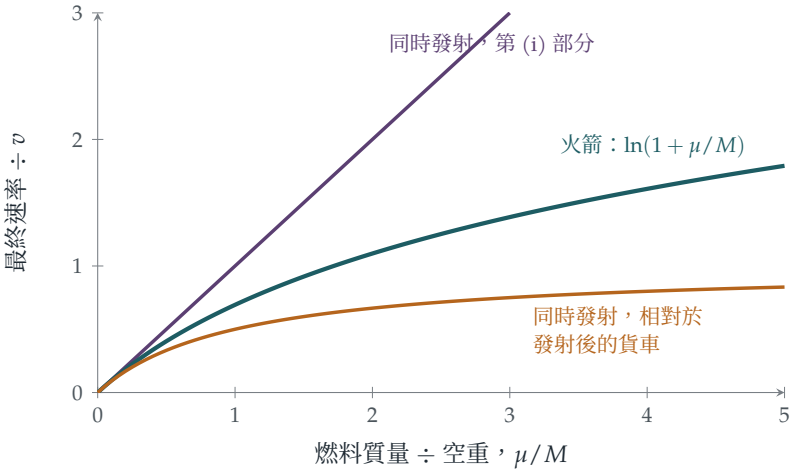

圖 10.3.1　最終速率與燃料質量對空重之比的關係。按題目的約定，全部同時發射得 μ/M（紫紅色）；但若排氣速率是相對於後座中的貨車量度，則只得 $\frac{\mu/M}{1+\mu/M}$（琥珀色）。連續發射的火箭介乎兩者之間，為 $\ln(1+\mu/M)$（藍綠色）。這幅圖所表達的就是不等式 $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$。

為甚麼火箭要分級

對數也解釋了分級（staging）的道理。火箭若在升空途中拋掉用完的燃料箱，就不必再加速這些無用的質量。各級所得的速率增量是*相加*的（就像那些炮一樣），而每一級的增

量則取決於該級質量的比，所以把火箭分成多級，就能達到總質量相同的單級火箭無法達到的速率。把太空人送上月球的土星五號（Saturn V）有三級；它的第一級在不足三分鐘內燒掉約 2000 公噸燃料。

齊奧爾科夫斯基

康斯坦丁．齊奧爾科夫斯基（Konstantin Tsiolkovsky）是俄羅斯外省小城卡盧加（Kaluga）一位失聰的教師，他在 1903 年一篇題為「利用反作用裝置探索外太空」的論文中發表了火箭方程。多級火箭、液態氫和液態氧燃料，以及太空站，他都一一推算過，比這些東西真正造得出來早了數十年。這條方程其實更早就在一些較不起眼的地方出現過（William Moore 在 1810 年已推導出其中一個版本），但齊奧爾科夫斯基是第一個看出它對太空飛行意味着甚麼的人。他寫道：「地球是人類的搖籃，但人不能永遠活在搖籃裏。」

延伸練習

1 **另一種約定。**假設每枚拋射體都以相對於發射之後的貨車的速率 v 離開，重做第 (i) 和第 (ii) 部分。證明這時逐一發射所得的最終速率較大。

2 **塵埃雲中的彗星。**試做 STEP III 2009，第 11 題（step.maths.org/questions/09-s3-q11）。它和火箭一樣是變質量（variable mass）問題，但彗星的質量是增加而不是減少。留意它的速率趨向甚麼值。

3 **兩級火箭。**一枚火箭的排氣速率為 v，空重為 M，燃料質量為 $9M$。求它的最終速率。現在把它分成兩級，每級的空重為 $\frac{1}{2}M$，燃料為 $4.5M$，第一級在燃料用盡後拋掉。比較兩個最終速率。

4 **不等式。**在 $[0, x]$ 上把 $\frac{1}{1+s}$ 分別與 1 和 $\frac{1}{1+x}$ 比較，從而證明當 $x \geq 0$ 時，$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$。

延伸閱讀

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），第 4 章。動量、變質量和火箭方程。
- **George Sutton & Oscar Biblarz, *Rocket Propulsion Elements***（Wiley）。工程學上的標準教科書；讀完本節後，開首幾章已可讀懂。
- **Hermann Oberth, *Ways to Spaceflight***（NASA 譯本，可在網上免費閱讀）。一位先驅的親身記述。

完整的引導式解答見第 10.3 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/rockets.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com