10.2 疊球效應

工作紙

題目

STEP II 2010，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s2-q10

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　根據 Section 10.1：若質量為 M、以速率 u 運動的物體與質量為 m 的靜止物體發生彈性碰撞（elastic collision），碰撞後 m 的速率是多少？

階段 1 速率上限

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 運用動量守恆（conservation of momentum）和彈性碰撞（elastic collision）（或運動中的物體撞向靜止物體的結果），求出 A 的速率，並以 b 和 u 表示。

停一停，試一試 把 $\frac{2b}{b+1}$ 寫成 2 減去某個正數。當 $b \to \infty$ 時會怎樣？

階段 2　沿着一串粒子傳下去

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　每個粒子的質量都是下一個粒子的 λ 倍。因此每次碰撞都相當於第 (i) 部分取 $b = \lambda$ 的情況。每碰撞一次，速率會乘以甚麼倍數？

停一停，試一試　經過 n 次碰撞後，速率是 u 乘以該倍數的 n 次方。這個倍數與 1 相比，在 $\lambda > 1$ 時是較大還是較小？

階段 3 快二十倍

涵蓋：$\lambda = 4$ 的情況

> **想一想** 取 $\lambda = 4$ 時，你需要 $1.6^n > 20$。取以 10 為底的對數（logarithm），並寫成 $1.6 = 16/10$ 及 $20 = 2 \times 10$。

背後的數學

籃球與網球

設兩個球從高度 H 一起落下，到達地面時的速率為 $U = \sqrt{2gH}$。假設一切碰撞都是完全彈性的，而且籃球比網球重得多。籃球從地面反彈，以速率 U 向上運動，隨即遇上仍以速率 U 向下運動的網球。在籃球的參考系（frame）中，網球以 $2U$ 的速率迎面而來，撞上一個非常重的物體後反彈，再以 $2U$ 的速率離開。回到地面參考系，那就是以 $2U + U = 3U$ 的速率向上運動（圖 10.2.1）。由於上升高度與拋射速率的平方成正比，網球會升到 $9H$ 的高度。

現實中的球並不是完全彈性的。若恢復系數（coefficient of restitution）為 e，質量比為 M/m，網球離開時的速率就是 $\frac{Me(2+e)-m}{M+m}U$。練習中的 STEP I 2014 Q10，就是由量度所得的高度反推質量比。

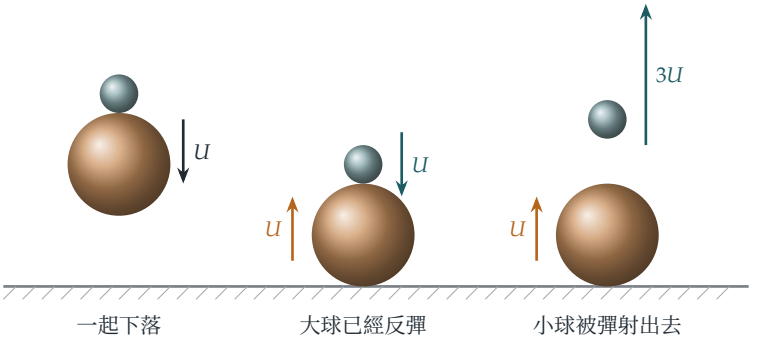

圖 10.2.1　疊球效應：兩個球都是完全彈性的，而且下面的球重得多。大球以速率 U 向上反彈，遇上以速率 U 落下的小球。相對於大球，小球以 $2U$ 的速率到達，又以 $2U$ 的速率離開，所以在地面參考系中它以 $3U$ 的速率離開，升到原來高度的九倍。

引力彈弓

太空探測器飛掠行星時並沒有碰到行星，但引力的作用就像與一個非常重的物體發生一次非常柔和的彈性碰撞。在行星的參考系中，探測器繞過行星，離開時的速率與到達時相同。如果行星正以速率 V 朝探測器運動，那麼在太陽的參考系中，探測器的速率最多可以增加 $2V$，與網球的情況完全一樣。1977 年發射的兩艘航行者號（*Voyager*）探測器，利用了外行星一次罕見的排列，從木星飛往土星（航行者 2 號（*Voyager* 2）更繼續飛往天王星和海王星），每次與行星相遇都獲得加速。假如沒有這些引力助推（gravity assist），前往海王星的旅程就要花上大約三十年，而不是十二年。能量來自行星，而行星因此減慢的幅度小得無法量度。

彈力球與超新星

1968 年，W. R. Mellen 在 *American Journal of Physics* 上描述了一種「彈力球反彈拋射體」（superball rebound projectile）：把幾個由大至小的球疊起來，最頂的球可以用撞擊速率的許多倍彈射出去。天體物理學家指出，這與核心塌縮超新星（core-collapse supernova）有一點粗略的相似之處：恆星向內墜落的外層物質撞上堅硬而緻密的核心後反彈，衝擊波（shock wave）把動量（momentum）向外帶進密度愈來愈低的物質，把這些物質加速到極高的速率。疊球效應的示範常用來向學生解釋這個想法，不過真實的超新星所涉及的物理比彈跳的球多得多，中微子（neutrino）就是其中之一。

延伸練習

1 **真實的情況。**試做 STEP I 2014，第 10 題（step.maths.org/questions/14-s1-q10）：這是帶有真實數據、反彈並不完美的疊球問題。

2 **非彈性的鏈。**試做 STEP I 2017，第 10 題（step.maths.org/questions/17-s1-q10）。這一題讓碰撞沿着一串質量按幾何級數增長的粒子傳遞下去。在甚麼情況下，每個粒子都恰好參與兩次碰撞？

3 **三個球。**把三個完全彈性的球疊起來，每個球都比它下面的球輕得多。證明最頂的球以 $7U$ 的速率離開，並升到 $49H$ 的高度。若有 k 個球，證明最頂的球以 $(2^k - 1)U$ 的速率離開。

4 **能量從何而來？**在第 (ii) 部分，證明即使 A 的速率無界，總動能（kinetic energy）仍然守恆。那些重的粒子會怎樣？

延伸閱讀

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 5 章，當中包括疊球問題。
- **W. R. Mellen,「Superball rebound projectiles」**, *American Journal of Physics* 36 (1968)。篇幅短小，讀來有趣。
- **Gary Flandro,「Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy derived from the gravitational field of Jupiter」**, *Astronautica Acta* 12 (1966)。這篇論文提出了航行者號的「行星大巡遊」（grand tour）。

完整的引導式解答見第 10.2 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/stacked-balls.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com