10.1 牛頓擺

工作紙

題目

STEP II 1990，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s2-q14

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　一粒質量為 m 的彈珠以速率 u 運動，撞上一粒質量為 M 的靜止彈珠，而動能（kinetic energy）守恆。碰撞後兩者的速度是多少？若 $M = m$ 又如何？

階段 1 只有最後兩顆移動

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 假設碰撞之後只有 A_n 和 A_{n+1} 移動。寫出動量守恆（conservation of momentum）和動能（kinetic energy）守恆的方程。它們正是質量為 m 和 λm 的兩個物體發生一次碰撞（collision）時的方程。

停一停，試一試 解出 A_n 的速度。若 $\lambda > 1$，A_n 會向哪個方向移動？緊貼在它後面的是甚麼？

階段 2　三顆彈珠

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　現在只有 A_{n-1}、A_n、A_{n+1} 移動，速度分別為 a、b、c。在 A_{n-1} 後面靜止不動的是哪一顆彈珠？既然沒有彈珠可以越過它前面的那一顆，0、a、b、c 之間有甚麼不等式（inequality）關係？

停一停，試一試　把動量方程兩邊平方，再減去能量方程。當 $\lambda > 1$ 時，每一項的正負號是甚麼？由此必然得出甚麼結論？

階段 3 兩顆可以移動的彈珠

涵蓋：第 (iii) 部分

? **想一想** 第 (ii) 部分的論證排除了所有移動的彈珠都向前走的結果。因此必定有某顆彈珠向後移動。哪一顆彈珠後面甚麼也沒有？試試只讓那顆彈珠和 A_{n+1} 移動。

背後的數學

為甚麼只有一個球飛出

在由相等的球組成的牛頓擺中，假設有 k 個球以速率 w 一起離開。由動量得 $kw = u$，由能量得 $kw^2 = u^2$。兩式相除，得 $w = u$ 及 $k = 1$。所以在離開的球一起運動的各種結果之中，只有「一個球以原來的速率離開」同時符合兩條定律。兩個球以一半速率離開，動量正確，但能量只有一半；一個球以兩倍速率離開，則只有當它是半個球時動量才正確。

但問題並未就此解決。若有 n 個球，就有 n 個未知的速度，而守恆定律只有兩條，所以同時符合兩者的結果有無窮多個（試找出一個三個球以不同速率運動的結果）。實際出現哪一個，取決於各球在接觸期間如何變形。1980 年代初，Frank Herrmann 和他的同事證明，我們熟悉的現象有賴於衝擊沿着隊列傳遞時不會擴散開去，而堅硬的鋼球之間留有極小空隙時正是如此。若用軟球，或者把球緊緊壓在一起，牛頓擺的表現就沒有那麼乾淨利落；仔細的量度更顯示，其他的球總會稍為移動。

守恆定律與對稱

守恆定律從何而來？1918 年，諾特（Emmy Noether）證明了一條定理，它是現代物理學的基石之一：物理系統的每一種連續對稱（continuous symmetry），都對應一個守恆量（conserved quantity）。如果物理定律在這裏與在左邊一米處相同（空間平移對稱），動量就守恆。如果物理定律今天與明天相同（時間平移對稱），能量就守恆。如果物理定律

在每個方向都相同（旋轉對稱），角動量（angular momentum）就守恆。你會在大學二年級的拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）課程中學到諾特定理（Noether's theorem）；本章自始至終都在運用它的推論。

惠更斯、雷恩與沃利斯

1668 年，英國皇家學會（Royal Society）徵求物體碰撞問題的解答。沃利斯（John Wallis）處理了非彈性碰撞（inelastic collisions），而雷恩（Christopher Wren）和惠更斯（Christiaan Huygens）則各自獨立地解決了彈性（elastic）的情況。惠更斯的關鍵洞見是轉換參考系（frame）：在一艘隨質心（centre of mass）運動的船上觀察碰撞，這時兩個相等的球只是以相反方向、原來的速率彈回，然後再變換回岸上的觀點。他還注意到某一個量，即各質量乘以速率平方之和，在碰撞前後相同；不過要再過一個世紀，動能本身才被確認為一個守恆量。

延伸練習

1 **同一個問題再現。**試做 STEP I 2006，第 11 題（step.maths.org/questions/06-s1-q11）：槽中有一列粒子，末端是較重的一粒。哪些最終狀態是可能的？

2 **追蹤各次碰撞。**把第 (iii) 部分的撞擊看成一連串獨立的兩粒彈珠碰撞，由 A_0 撞上 A_1 開始。逐步追蹤這一連串碰撞，並證明最後得到的正是第 (iii) 部分所求得的運動。

3 **兩個球撞入。**在一個由五個相等的球組成的牛頓擺中，兩個球同時釋放，以速率 u 撞上其餘三個。證明「兩個球以速率 u 離開」與兩條守恆定律並無矛盾，並找出另一個同樣符合的結果。

4 **末端較輕。**若 $\lambda < 1$，追蹤一連串的兩粒彈珠碰撞。除了 A_n 和 A_{n+1} 之外，最後還有其他彈珠在運動嗎？

延伸閱讀

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 5 章。動量守恆與能量守恆，附有大量關於碰撞的習題。
- **Frank Herrmann & Peter Schmälzle, "Simple explanation of a well-known collision experiment"**，*American Journal of Physics* 49 (1981)。解釋牛頓擺為何行得通。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。深入淺出地講述對稱與守恆之間的聯繫。

完整的引導式解答見第 10.1 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/newtons-cradle.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com