1.8 點算有理數

工作紙

題目

STEP III 2020，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　在證明任何東西之前，先計算最初十五項左右。你留意到比值 u_n / u_{n+1} 有甚麼特別之處？

階段 1　奇數位勝過偶數位

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　若 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b)$，試以 a 和 b 表示 (u_{2k}, u_{2k+1}) 和 (u_{2k+1}, u_{2k+2})。

想一想　當 $n \geq 2$ 時，數對 (u_n, u_{n+1}) 是由位置 $k = \lfloor n/2 \rfloor$ 的數對得出的。把 $n = 2k$ 和 $n = 2k+1$ 兩種情況分開處理。

停一停，試一試　在每種情況中，數對的其中一項都是 $u_k + u_{k+1}$。為甚麼它比另一項大？利用每一項都是正數這個事實。

階段 2　相鄰兩項互質

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　若 d 整除 u_{2k} 和 u_{2k+1}，它還必定整除甚麼？對 u_{2k+1} 和 u_{2k+2} 作同樣的考慮。

停一停，試一試　因此，一個數對的公因數（common factor）也是較早出現的某個數對的公因數。取第一個具有大於 1 的公因數的數對，從而找出矛盾（contradiction）。

階段 3 沒有數對出現兩次

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想 取最早重複出現的數對 (a, b)。它可以是 $(1, 1)$ 嗎？

停一停，試一試 根據第 (i) 部分，比較 a 與 b 的大小，便知道該位置是奇數還是偶數。利用這一點，把兩個相同的數對同時往回推一步，得到一個更早重複出現的數對。

階段 4　每個互質數對都會出現

涵蓋：第 (iv) 部分

想一想　為甚麼 $a - b$ 和 b 互質（co-prime）？它們的任何公因數還會整除甚麼？

停一停，試一試　假如在數列（sequence）中某處 $a - b$ 之後緊接着 b，那麼其後會出現哪個數對？至於 $a < b$ 的情況，把兩者的角色對調即可。

階段 5 列出所有分數

涵蓋：第 (v) 部分

想一想 每個正有理數（positive rational）都可以寫成 p/q，其中 p 和 q 互質。你需要證明 (p, q) 會以相鄰數對的形式出現。

停一停，試一試 假設某個互質數對從不出現，並從中選取兩數之和最小的一個。第 (iv) 部分會給出矛盾。然後由第 (ii) 和第 (iii) 部分可知，f 不會兩次取同一個值。

背後的數學

Calkin–Wilf 樹

把正分數排成一棵樹：把 $\frac{1}{1}$ 放在頂端，並給每個分數 $\frac{a}{b}$ 兩個子節點，左邊是 $\frac{a}{a+b}$，右邊是 $\frac{a+b}{b}$。逐行由左至右讀這棵樹，得到的正是本題的列表 $f(1), f(2), f(3), \ldots$（圖 1.8.1）。階段 3 說明每個分數都有唯一的父節點，階段 4 說明每個分數都在樹中。2003 年，Moshe Newman 發現連這棵樹也不需要：列表中每個分數都可以由前一個分數算出，

公式是

$$x_{n+1} = \frac{1}{2\lfloor x_n \rfloor - x_n + 1}.$$

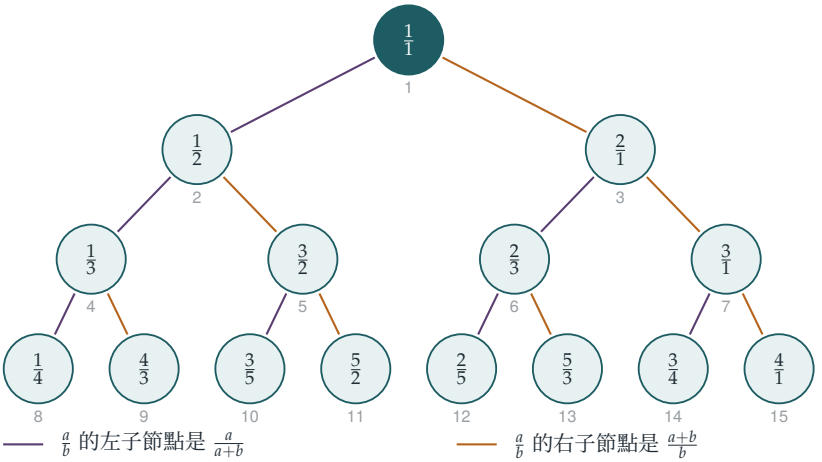

圖 1.8.1　Calkin–Wilf 樹的首四行。逐行由左至右讀，便得到 $f(1), f(2), f(3), \ldots$；灰色小數字是位置 n。每個正分數都以最簡分數的形式恰好出現一次。

不同大小的無窮

可以這樣逐一列出的集合稱為*可數*（countable）集合。分數是可數的，這令人意外，因為分數看來比整數多得多。在大學的第一個學期，你還會遇到康托爾的*對角論證法*（diagonal argument），它證明*實數*（real numbers）是不可數的：任何實數列表都必定有所遺漏。所以無窮確實有不同的大小，而實數所構成的無窮嚴格地大於有理數所構成的無窮。這是你在大學一年級課程中會遇到的最令人震驚的結果之一。

Stern 數列

數列 u_n 稱為 *Stern 雙原子數列*（Stern's diatomic sequence），它還有許多其他面貌。例如，u_{n+1} 等於把 n 寫成 2 的冪之和、而每個冪最多用兩次的方法數目。它與 *Stern–Brocot 樹*以及連分數（continued fractions）關係密切，而連分數能給出無理數的最佳有理逼近。

延伸練習

1 **找出分數。**對哪一個 n 有 $f(n) = \frac{3}{5}$？又 $f(n) = \frac{5}{3}$ 呢？利用父節點的規則倒推回 $\frac{1}{1}$。

2 **Newman 公式。**驗證由 $x_1 = 1$ 開始，Newman 公式能給出列表中的首十個分數。

3 **康托爾的對角論證法。**假設你有一個列表，以小數形式列出了 0 與 1 之間的所有實數。構造一個小數，使它與列表中第 n 個數在第 n 位數字上不同。為甚麼這就說明列表並不完整？（對於像 $0.0999\ldots = 0.1$ 這樣的小數，需要留意甚麼？）

4 **可數並集。** 較難 給出一個與正整數之間的明確雙射，從而證明由全體正整數數對 (m, n) 組成的集合是可數的。（試試 $2^{m-1}(2n-1)$。）

延伸閱讀

- **Neil Calkin & Herbert Wilf, "Recounting the rationals"**（*American Mathematical Monthly*，2000 年；〈重新數算有理數〉）。全文四頁，完全讀得懂。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***（《數學天書中的證明》），第 17 章 "Sets, functions, and the continuum hypothesis"（集合、函數與連續統假設），當中包括 Calkin–Wilf 樹。
- **Ian Stewart & David Tall, *The Foundations of Mathematics***（《數學基礎》，Oxford University Press）。可數性、康托爾與實數，內容與大學一年級課程相若。

完整的引導式解答見第 1.8 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/counting-rationals.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com