1.6 兩個平方數之和

工作紙

題目

STEP II 2023，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　若 $z = a + \mathrm{i}b$，其中 a 和 b 為整數，那麼 $|z|^2$ 是甚麼？

階段 1　模相乘

涵蓋：第 (i) 部分

停一停，試一試　把 zw 乘開，寫出 $|zw|^2$，然後展開。所得的式子能否因式分解（factorise）？

階段 2 加以運用

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 把 5 和 221 各自寫成兩個平方數之和。哪些複數（complex number）滿足 $|z|^2 = 5$ 和 $|w|^2 = 221$？

停一停，試一試 由第 (i) 部分，$|zw|^2 = 5 \times 221$。把 zw 乘開：它的實部（real part）和虛部（imaginary part）就是 h 和 k。要找第二個答案，可試試把其中一個因子換成它的共軛（conjugate）。

階段 3　先作因式分解

涵蓋：第 (iii) 及 (iv) 部分

想一想　8045 的末位數字是 5。把它因式分解。

停一停，試一試　另一個因子剛好比某個完全平方數（perfect square）大一點。大多少？這個差是否平方數？然後像第 (ii) 部分那樣相乘。

停一停，試一試　第 (iv) 部分：36 本身已是平方數。哪個複數的模（modulus）的平方是 36？乘以這個複數會有甚麼效果？

階段 4 三種寫法

涵蓋：第 (v) 部分

想一想 與第 (iii) 部分一樣，那個大數很接近某個完全平方數。先把它寫成兩個平方數之和。

停一停，試一試 25 可以用多於一種方式寫成 $|\alpha|^2$：5 是其中一個。有多少個高斯整數（Gaussian integer）滿足 $|\alpha|^2 = 25$？當中哪些會給出真正不同的數對？

階段 5　相除

涵蓋：第 (vi) 部分

想一想　把 1002037 和 109 各自寫成兩個平方數之和；同樣地，先找一個鄰近的完全平方數。

停一停，試一試　第 (ii) 至 (v) 部分做的都是乘法。這一部分則把想法倒過來用：把一個高斯整數除以另一個。如果除不盡，試試改用共軛。

背後的數學

費馬二平方和定理

哪些質數是兩個平方數之和？$2 = 1^2 + 1^2$、5、13、17、29、37、41 是；3、7、11、19、23、31 則不是。規律是：除 2 以外，一個質數是兩個平方數之和，當且僅當它除以 4 的餘數為 1。費馬（Fermat）於 1640 年提出這個結果；歐拉（Euler）於 1749 年給出證明。用高斯整數的語言來說：質數 $p \equiv 1 \pmod 4$ 會分裂（split）成 $p = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})$，而質數 $p \equiv 3 \pmod 4$ 則仍然是質數。例如 $5 = (2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})$，但 3 完全無法分解。

1990 年，Don Zagier 發表了二平方和定理的一個證明，它以全長只有一句而聞名。這

個證明連同解說收錄於 *Proofs from THE BOOK*。

一個擁有自己質數的新數系

高斯（Gauss）發現，高斯整數的表現與普通整數極為相似。它們有除法算法（division algorithm）和歐幾里得算法（Euclidean algorithm），而且每個高斯整數都可以唯一地分解成高斯質數（Gaussian prime）的乘積（不計乘以 ± 1 或 $\pm i$ 的差別）。結合 $(\star)$，你只需知道一個數的質因數分解，就能準確數出它有多少種方法寫成兩個平方數之和。

在大學裏，這是通往*代數數論*（algebraic number theory）的大門：研究 $\mathbb{Z}[i]$ 或 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 這類數系，藉此了解普通的整數。Section 1.7 說明了為甚麼需要創立這門學科：並非每個這樣的數系都像高斯整數那樣規矩。

四個平方數及其他

每個正整數都是*四*個平方數之和（拉格朗日（Lagrange），1770 年）。證明依賴 $(\star)$ 的四平方版本，它源自哈密頓（Hamilton）的*四元數*（quaternion），情形就如 $(\star)$ 源自複數一樣。你會在 Section 7.8 見到它。

延伸練習

1 **一個障礙。**證明沒有任何形如 $4k+3$ 的數是兩個平方數之和。（平方數模 4 是甚麼？）

2 **兩種寫法。**把 65 和 85 各自用兩種不同的方法寫成兩個平方數之和，並用高斯整數解釋你的答案。

3 **四種寫法。**$1105 = 5 \times 13 \times 17$。找出四種不同的方法，把 1105 寫成兩個正平方數之和。為甚麼是四種？

4 **高斯質數。**較難 證明若 $3 = (a+bi)(c+di)$，其中 a, b, c, d 為整數，則其中一個因數的模為 1。（取模的平方。）這說明 3 是高斯質數。

延伸閱讀

- **John Stillwell, *Elements of Number Theory***（Springer）。循序漸進講到高斯整數及更深入的內容，並附歷史背景。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，第 4 章，“Representing numbers as sums of two squares”（把數表示為兩個平方數之和）。

- **Joseph Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory***，有關平方和與高斯整數的各章。

完整的引導式解答見第 1.6 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/two-squares.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com