1.5 無窮遞降法

工作紙

題目

STEP III 2022，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　在第 (i) 部分，看看 $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$。三項之中有兩項明顯是偶數。這告訴你第三項有甚麼性質？

階段 1 第一次遞降

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 設 $a = 2p$ 並化簡。新方程的形式與原來相同，只是各係數換了位置。對 b 重複這個步驟，然後再對 c 做一次。

停一停，試一試 你現在得到一組解 (p, q, r)，滿足 $|p| < |a|$。為甚麼這就表示方程根本沒有解？試考慮 $|a|$ 盡可能小的一組解。

階段 2　換一個質數

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　這裏除以 2 是行不通的。哪一個質數（prime）能整除三個係數中的兩個？

停一停，試一試　證明 3 整除 b，然後整除 c，再整除 a，並逐步代入。你得回的方程是否與原來的完全相同？

階段 3 模 3 的平方數

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想 第一個結果：把一個不是 3 的倍數的數寫成 $3n \pm 1$，然後取平方。平方數除以 3 時，餘數（remainder）可以是甚麼？

想一想 然後列出 $a^2 + b^2$ 所有可能的餘數。它在甚麼情況下是 3 的倍數？

停一停，試一試 利用這一點證明 3 整除 a 和 b，繼而整除 c。然後仿照第 (i) 部分的方法論證。

階段 4　變化：方程變了

涵蓋：第 (iv) 部分

想一想　考慮除以 4 的餘數。偶數的平方和奇數的平方，餘數分別可以是甚麼？

想一想　如果 a、b 和 c 全是偶數，把它們各自減半。新方程與舊方程相同嗎？

停一停，試一試　係數改變了，所以要證明一個更強的結論：對任何 $k \geq 2$，$a^2 + b^2 + c^2 = 2^k abc$ 都沒有解。減半之後，方程是否仍在這個方程族之內？

背後的數學

費馬、遞降法與他的最後定理

費馬用無窮遞降法證明了 $x^4 + y^4 = z^2$ 沒有正整數解。在他著名的「最後定理」之中，這是他唯一留下證明的情況，它解決了 $x^n + y^n = z^n$ 在 $n = 4$ 時的情形。歐拉（Euler）其後用遞降法處理 $n = 3$ 的情形，當中有一個漏洞，後來才被補上。遞降法至今仍是現代理論的起點：關於 Section 1.9 中那類曲線的莫德爾–韋伊定理（Mordell–Weil theorem），其證明就是一個精密的遞降。

局部障礙

本節的每一個證明，都是靠考察模某個數的餘數來完成的。如果一條方程對某個 n 而言模 n 無解，或者沒有實數解，它當然沒有整數解。這類理由稱為*局部障礙*（local obstructions）；到了大學，你會遇到*p 進數*（p-adic numbers），那是一種同時研究模 $p, p^2, p^3, \ldots$ 所有餘數的方法。

哈塞（Hasse）與閔可夫斯基（Minkowski）有一個精彩的定理：對於像 $a^2 + b^2 = 3c^2$ 這樣的二次方程，局部障礙就是僅有的障礙——如果沒有任何「局部」的理由令它無解，它就確實有有理數解。對三次方程而言，這個結論卻徹底失效。Ernst Selmer 在 1951 年證明了

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$$

模任何整數都有解，在實數中也有解，但沒有非零整數解。解釋「局部到整體」原理何時失效、為何失效，是現代數論的一大主題。

一條確實有解的方程

第 (iv) 部分有一個著名的近親：$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$，即*馬爾可夫方程*（Markov equation）。它有無窮多個正整數解，由 $(1,1,1)$、$(1,1,2)$、$(1,2,5)$、$(1,5,13)$ 和 $(2,5,29)$ 開始，而這些解與無理數能被分數逼近到甚麼程度有關。見練習 4。

延伸練習

1 **STEP I 熱身題。**（*STEP I 2010 第 8 題。*）證明 $a^3 + 3b^3 = 9c^3$ 的唯一整數解是 $a = b = c = 0$。然後，藉考慮末位數字，證明 $p^4 + 2q^4 = 5r^4$ 也有同樣的結論。

2 **只用模運算，毋須遞降。**只用模 4 運算，證明 $x^2 + y^2 = 4z + 3$ 完全沒有整數解。

3 **有理點。**利用第 (iii) 部分，證明圓 $x^2 + y^2 = 3$ 上沒有坐標為有理數的點。（試與 $x^2 + y^2 = 2$ 對比，後者包含 $(1, 1)$。）

4 **馬爾可夫三元組。**證明若 (x, y, z) 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$，則 $(x, y, 3xy - z)$ 亦滿足。由 $(1, 1, 1)$ 出發，生成上文列出的三元組。（這個「跳躍」技巧正好與遞降相反。）

延伸閱讀

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***，第 2 及第 5 章。
- **Joseph Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory***（Pearson）。非常易讀；包括費馬對 $x^4 + y^4 = z^2$ 的遞降證明。
- **Simon Singh, *Fermat's Last Theorem***（Fourth Estate）。為一般讀者而寫的故事，由費馬的頁邊筆記講到懷爾斯（Wiles）的證明。

完整的引導式解答見第 1.5 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/infinite-descent.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com