1.4 e 是無理數，e^2 也是

工作紙

本節會用到兩道題目。第一道出自 1997 年，證明 e 是無理數（irrational number）。第二道出自 2024 年，把同一個想法用得更巧妙，證明 e^2 是無理數，而這原來確實困難得多。

熱身題

STEP III 1997，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q7

主題目

STEP III 2024，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　假設 $e = p/q$。把 e 乘以 q 會得到整數。那麼乘以 $q!$ 又會對 e 的級數的每一項有甚麼影響？

階段 1 熱身：e 是無理數（irrational）

涵蓋：熱身題，STEP III 1997

想一想 b_n 是一個等比級數（geometric series）。它的首項（first term）和公比（common ratio）是甚麼？由此可知它的和是多少？

停一停，試一試 把 a_n 和 b_n 逐項比較：a_n 中每個分母都是若干個因子的乘積，而這些因子全都不小於 $n+1$。哪一個級數較大？

想一想 把 e 的級數乘以 $n!$。直至 $1/n!$ 為止的各項合起來是一個整數；餘下的各項組成哪一個級數？若 $e = p/q$，取哪一個 n 值便會得出矛盾（contradiction）？

階段 2　為何 e^2 較難

涵蓋：由熱身題過渡到主題，STEP III 2024

想一想　試把熱身題的方法用於 $e^2 = \sum \frac{2^r}{r!}$。為甚麼尾項（tail）不再變小？若 $e^2 = \frac{p}{q}$，關於 qe 和 $\frac{p}{e}$ 你能說些甚麼？

階段 3 兩條尾項

涵蓋：主題，第 (i) 及 (ii) 部分

想一想 第 (i) 部分是把熱身題的比較再做一次，只是以 $f(n)$ 代替 a_n。

想一想 $g(n)$ 各項的正負號交替出現。它們是否愈來愈小？

停一停，試一試 把各項兩兩分組，分法有兩種：由第一項開始，以及由第二項開始。每種分組各給出其中一個不等式（inequality）。

階段 4　再遇整數

涵蓋：主題，第 (iii) 部分

想一想　寫出 $e = \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!}$，然後乘以 $m!$，其中 $m = 2n$。哪些項會變成整數？

想一想　餘下的各項，即 $r > m$ 的那些項，加起來是甚麼？把它們與 $f(m)$ 的定義比較。

停一停，試一試　對 $\frac{1}{e} = \sum_{r \geq 0} \frac{(-1)^r}{r!}$ 作同樣的處理。把尾項與 $g(m)$ 對應起來時，為甚麼 $m = 2n$ 是偶數這一點至關重要？

階段 5 矛盾

涵蓋：主題，第 (iv) 及 (v) 部分

想一想 利用第 (iii) 部分，把 $f(2n)$ 和 $g(2n)$ 寫成整數加上或減去 e 或 $\frac{1}{e}$ 的某個倍數。

停一停，試一試 把這些式子代入 $q\,f(2n) + p\,g(2n)$。$qe = \frac{p}{e}$ 在哪裏派上用場？

想一想 假設 $e^2 = \frac{p}{q}$。那麼第 (iv) 部分對每一個 n 都適用。

停一停，試一試 第 (i) 及 (ii) 部分把 $q\,f(2n) + p\,g(2n)$ 夾在 0 與一個很小的數之間。n 要有多大，這個整數才會嚴格介乎 0 與 1 之間？

背後的數學

e 有多「無理」？

劉維爾（Joseph Liouville）在 1840 年證明了 e^2 是無理數，而且事實上它不滿足任何整數係數的二次方程。1873 年，埃爾米特（Charles Hermite）走得遠得多：他證明了 e 是*超越數*（transcendental number），意思是它不是任何整數係數多項式的根。他的證明正是上述論證的精密版本：構造一個整數，再證明它嚴格介乎 0 與 1 之間。九年後，林德曼（Ferdinand von Lindemann）改造了埃爾米特的方法，證明 π 是超越數，終於證實以尺規「化圓為方」這個古老問題是不可能做到的。

我們仍未知道的事

儘管這些方法威力強大，一些簡單得令人尷尬的問題卻仍未解決。$e + \pi$ 是無理數嗎？$e\pi$ 呢？沒有人知道，雖然兩者之中至少有一個必定是超越數（練習 4）。$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$ 是無理數嗎？是的：阿培里（Roger Apéry）在 1978 年證明了這一點，震驚了整個數學界。$\zeta(5)$ 呢？沒有人知道。

逼近

這些證明背後有一個更深刻的想法：如果一個數能被分數逼近得*太好*，它就是無理數。e 的級數的部分和（partial sum）都是分數，而且很快就非常接近 e；一個分數不可能被其他分數逼近得那麼好。這就是*丟番圖逼近*（Diophantine approximation）的起點。它是數論的一個分支，你可以在 Section 2.9 進一步探索，那裏會用另一族積分得出更好的分數，步步逼近 e。

延伸練習

1 **只用 $1/e$。**假設 $1/e = p/q$，並只利用 $1/e$ 的交錯級數，證明 e 是無理數。

2 $\sin 1$ **是無理數。**利用 $\sin 1 = 1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} - \cdots$ 證明 $\sin 1$ 是無理數。（乘以一個合適的奇數的階乘。）

3 **為何 π 不行？**解釋為何這個方法不能直接用於 π。然後查閱 Ivan Niven 在 1947 年發表、只有一頁的 π 是無理數的證明，當中用的是積分而不是級數。能力強的高級程度（A-level）學生應可讀懂。

4 **其中一個是超越數。**較難 證明 e 和 π 是 $x^2 - (e+\pi)x + e\pi = 0$ 的根。你可以假設：若一個多項式的係數都是代數數（algebraic number），則它的根本身也是代數數；以及 π 不是代數數（林德曼）。由此推出 $e+\pi$ 和 $e\pi$ 之中至少有一個是超越數。

延伸閱讀

- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，第 8 章「Some irrational numbers」（一些無理數）。正是用這些想法，證明 e、e^2、e^4 和 π^2 都是無理數。
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。一本篇幅不長的經典，內容由 $\sqrt{2}$ 一直談到超越性。
- **Julian Havil, *The Irrationals***（Princeton University Press）。一本淺白易讀的無理數歷史。

完整的引導式解答見第 1.4 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/e-irrational.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com