1.3 最小反例

工作紙

題目

STEP III 2015，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q5

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　第 4 步說「定義 k 為 S 中最小的正整數」。我們憑甚麼可以這樣做？假如 S 是一個由正實數組成的集合，這樣做還可以嗎？

階段 1　第 3 步：S 非空

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　若 $\sqrt{2} = p/q$，哪一個正整數（positive integer）乘以 $\sqrt{2}$ 之後會得到整數？

階段 2 第 5 步：更小的元素

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 關於 $n = (\sqrt{2}-1)k$，你需要兩個事實：它是正整數，而且 $n\sqrt{2}$ 是整數。設 $k\sqrt{2} = m$，這是一個整數，然後把 n 和 $n\sqrt{2}$ 都用 k 和 m 表示出來。

階段 3 第 6 步：矛盾

涵蓋：第 (i) 部分

停一停，試一試 $\sqrt{2}-1$ 有多大？比較 $(\sqrt{2}-1)k$ 與 k，並回想 k 在第 4 步是怎樣選取的。

階段 4　立方根：把兩個數聯繫起來

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　設 $a = 2^{1/3}$。若 a 是有理數（rational），a^2 是否也是有理數？若 a^2 是有理數，你能否把 a 用 a^2 和 $a^3 = 2$ 表示出來？

階段 5 **改寫論證**

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 試照搬第 (i) 部分的做法，把 $\sqrt{2}-1$ 換成 $a-1$。照搬到哪一步就行不通？

停一停，試一試 改用一個記錄更多資料的集合（set）：所有使 na 和 na^2 同時為整數的正整數 n。驗證這個集合非空（non-empty），並驗證只要 k 屬於這個集合，$(a-1)k$ 也屬於它。

背後的數學

一個畫得出來的證明

第 (i) 部分背後有一幅優美的圖，出自 Stanley Tennenbaum。若 $\sqrt{2} = a/b$，則 $a^2 = 2b^2$：一個邊長為 a 的正方形，面積等於兩個邊長為 b 的正方形面積之和。如圖 1.3.1 所示，把兩個邊長為 b 的正方形放在邊長為 a 的正方形的兩個對角。它們重疊之處是一個小正方形，另外還有兩個小正方形沒有被蓋住。由於面積相等，重疊部分必定等於兩個未被蓋住的正方形之和，於是得到一對更小而具有同樣性質的整數。整數對不可

能無止境地愈變愈小，所以這樣的正方形並不存在。這對較小的整數正是 $(2b - a,\ a - b)$，也就是我們那一步 $(\sqrt{2} - 1)k$ 的化身。

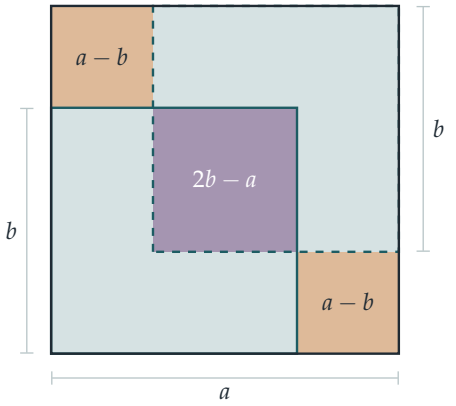

圖 1.3.1　Tennenbaum 的證明。兩個邊長為 b 的正方形（藍綠色）放在邊長為 a 的正方形的兩個對角。若 $a^2 = 2b^2$，則被計算了兩次的面積（紫紅色的重疊部分）必定等於沒有計算到的面積（兩個琥珀色的角落），所以 $(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$：一個更小的解。

良序、歸納與遞降

良序原理與歸納法原理在邏輯上等價：兩者可以互相推導。到了大學，你會看到兩者都被用作自然數的基礎。在 Section 1.5 中，我們會以另一種形式運用同一個原理，那就是費馬（Fermat）的*無窮遞降法*（method of infinite descent）：不存在由正整數組成的無窮嚴格遞減數列。

它能走多遠？

這個論證可以證明，只要 N 不是完全平方數（perfect square），$\sqrt{N}$ 就是無理數（見練習）；更一般地，一個整數的 n 次方根要麼是整數，要麼是無理數。到了大學，這會變成一個關於*代數整數*（algebraic integers）的命題：若一個有理數滿足某個整數係數的首一多項式（monic polynomial）方程，例如 $x^3 - 2 = 0$，它就必定是整數。你會在 Section 6.3 再次遇到這個想法。

相傳畢達哥拉斯學派（Pythagoreans）因為希帕索斯（Hippasus）洩露了 $\sqrt{2}$ 是無理數而把他淹死，這個傳說多半並不屬實。屬實的是，這個發現迫使希臘數學家把對數的研究與對長度的研究分開；這道裂痕要等到十九世紀，待戴德金（Dedekind）構造出實數，才得以彌合。

延伸練習

1 **其他平方根。**改造這個論證，證明 $\sqrt{3}$ 是無理數。哪一個數擔當了 $\sqrt{2}-1$ 的角色？

2 **所有非平方數。**設 N 為一個不是完全平方數的正整數，並設 m 為滿足 $m < \sqrt{N} < m+1$ 的整數。考慮 $(\sqrt{N}-m)k$，從而證明 $\sqrt{N}$ 是無理數。

3 **找出漏洞。**試把這個論證套用於 $\sqrt{4}$。究竟是哪一步行不通？

4 **Tennenbaum 的圖。**利用圖 1.3.1 證明：若 $a^2 = 2b^2$，則 $(2b-a)^2 = 2(a-b)^2$。再用代數方法驗證這個恆等式。

延伸閱讀

- **Daniel Velleman, *How to Prove It***（Cambridge University Press）。一本全面的證明入門書，內容包括歸納法和良序原理。
- **R. P. Burn, *A Pathway into Number Theory***（Cambridge University Press）。全書由精心編排次序的問題組成，是修讀大學一年級課程前的理想準備。
- **John Conway & Joseph Shipman, "Extreme proofs I: the irrationality of $\sqrt{2}$"**（*Mathematical Intelligencer*，2013）。同一個事實的多個證明，比較得妙趣橫生。

完整的引導式解答見第 1.3 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/well-ordering.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com