1.2 質數分佈得有多稀疏？

工作紙

題目

STEP III 2016，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s3-q5

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　第 (iv) 部分要求你對所有 $n \geq 2$ 證明一個命題。第 (iii) 部分則假設該命題對不超過 $2m$ 的每一個 k 都成立。這是哪一種歸納法（induction）？

階段 1 二項式係數不會太大

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 2^{2m+1} 從何而來？在 $(1+x)^{2m+1}$ 的二項展開式（binomial expansion）中代入 $x=1$。

想一想 該和式的每一項都是正數。其中哪兩項等於 $\binom{2m+1}{m}$？

停一停，試一試 $\binom{2m+1}{m}$ 的兩倍不超過整個和，而你需要的是嚴格不等式（strict inequality）。還有沒有尚未用到的項？

階段 2　哪些質數整除這個二項式係數？

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　用階乘（factorial）寫出 $\binom{2m+1}{m}$，然後乘開，消去所有分數。

想一想　取一個滿足 $m+1 < p \le 2m+1$ 的質數（prime）p。p 能整除 $(2m+1)!$ 嗎？它能整除 $m!\,(m+1)!$ 嗎？後者的因子全都不超過 $m+1$。

停一停，試一試　因此每個這樣的質數都整除 $\binom{2m+1}{m}$。為甚麼它們的乘積也整除它？第 (i) 部分又如何完成這一部分的證明？

階段 3 拆開乘積

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想 把不超過 $2m+1$ 的質數分成兩組：不超過 $m+1$ 的，以及大於 $m+1$ 的。這樣做對 $P_{1,2m+1}$ 有甚麼影響？

停一停，試一試 對其中一個因子使用這一部分的假設（hypothesis），對另一個因子使用第 (ii) 部分的結果。把兩個上界都寫成 4 的冪。

階段 4　所有 n

涵蓋：第 (iv) 部分

> **想一想**　對 n 使用強歸納法（strong induction）。第 (iii) 部分處理了哪些 n 的值？

> **停一停，試一試**　至於其餘的 n 值：大於 2 的偶數可以是質數嗎？由此可知 $P_{1,n}$ 與 $P_{1,n-1}$ 相比有甚麼關係？

背後的數學

從 4^n 到質數定理

對結果取對數：$\ln P_{1,n} < n \ln 4$，即

$$\sum_{p \le n} \ln p < (\ln 4)\, n \approx 1.39\, n.$$

在 1850 年代，切比雪夫（Pafnuty Chebyshev）證明了正是這一類的界（bound），而且上界和下界俱備，從而說明 $\sum_{p \le n} \ln p$ 的增長與 n 成正比。高斯（Gauss）在大約 15 歲時，已從數表中猜到不超過 n 的質數個數大約是 $n / \ln n$。這後來成為質數定理（Prime

Number Theorem），最終在 1896 年由阿達馬（Jacques Hadamard）和德拉瓦萊普桑（Charles de la Vallée Poussin）運用複分析（complex analysis）證明。它的對數形式是

$$\sum_{p \le n} \ln p \sim n,$$

所以不超過 n 的質數之積大約是 e^n。我們的界 4^n 其實相差不遠：圖 1.2.1 把三者一併畫出。

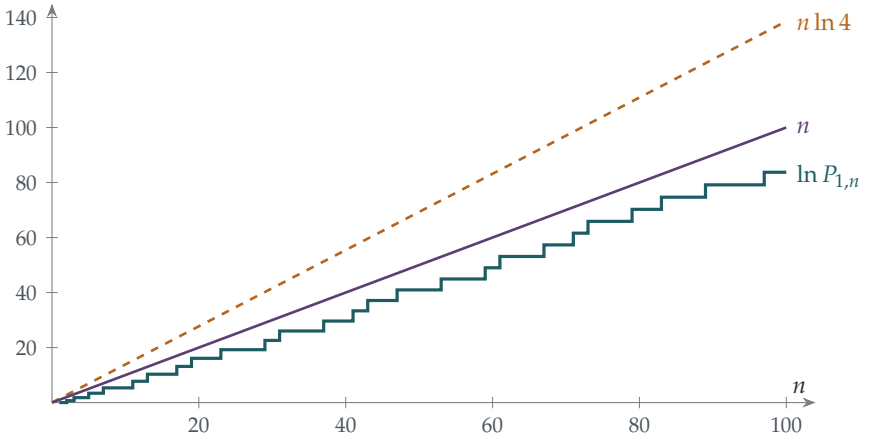

圖 1.2.1 不超過 n 的所有質數之積的對數（藍綠色），在每個質數 p 處跳升 $\ln p$。本節證明它始終低於 $n \ln 4$（琥珀色虛線）；質數定理則指出它的增長與 n 相若（紫紅色）。

伯特蘭公設

1845 年，伯特蘭（Joseph Bertrand）猜想：對每一個 $n \ge 1$，在 n 與 $2n$ 之間總有一個質數。這就是伯特蘭公設（Bertrand's postulate）。切比雪夫在 1852 年證明了它。八十年後，年僅 19 歲的艾狄胥找到了一個優美的初等證明。它的關鍵材料，就是本題的引理，再加上仔細考察哪些質數整除中間的二項式係數 $\binom{2n}{n}$。Martin Aigner 和 Günter Ziegler 把它選為 *Proofs from THE BOOK* 的第 2 章，該書匯集了數學中最優雅的證明。

接下來的方向

質數的精確分佈，由黎曼 ζ 函數（Riemann zeta function）

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots,$$

的零點（zero）所支配。你會在 Section 2.4 中遇見這個函數樸素得多的一面，那裏有 $\zeta(2) = \pi^2/6$。黎曼猜想（Riemann Hypothesis）預測了這些零點的確切位置；它若成

立，便能把質數定理中的誤差限定得緊無可緊。它也許是數學中最著名的未解難題，也是千禧年大獎難題（Millennium Prize Problems）之一。

延伸練習

1 **感受一下數字。**對 $n = 10, 20, 30$ 計算 $P_{1,n}$，並把它與 4^n 及 e^n 比較。（這裏可以使用計算機。）

2 **中間的二項式係數。**證明 $\binom{2m}{m}$ 是 $(1+1)^{2m}$ 展開式的 $2m+1$ 項中最大的一項，並由此推出 $\binom{2m}{m} \geq \dfrac{4^m}{2m+1}$。

3 **質數不會太多。**設 $\pi(n)$ 為不超過 n 的質數個數。介乎 $\sqrt{n}$ 與 n 之間的每個質數都大於 $\sqrt{n}$，而它們的積至多為 $P_{1,n} < 4^n$。由此推出

$$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) < \frac{2\ln 4}{\ln n}\, n,$$

從而得出 $\pi(n) < 2.8\, n/\ln n + \sqrt{n}$。把這個結果與質數定理的 $\pi(n) \approx n/\ln n$ 比較。

4 **驗證伯特蘭公設。**對 $n = 1, 2, \ldots, 50$ 驗證伯特蘭公設，即在每個情況下找出一個介乎 n 與 $2n$ 之間的質數。你能否利用一張簡短的質數表有效率地完成，使表中每個質數都小於前一個的兩倍？

延伸閱讀

- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，第 2 章「Bertrand's postulate」（伯特蘭公設）。
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***（Fourth Estate）。一部講述質數定理與黎曼猜想歷史的普及讀物。
- **G. J. O. Jameson, *The Prime Number Theorem***（Cambridge University Press）。嚴謹而平易近人，為大學本科生而寫；開首幾章只需要高級程度（A-level）的微積分。

完整的引導式解答見第 1.2 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/prime-distribution.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com