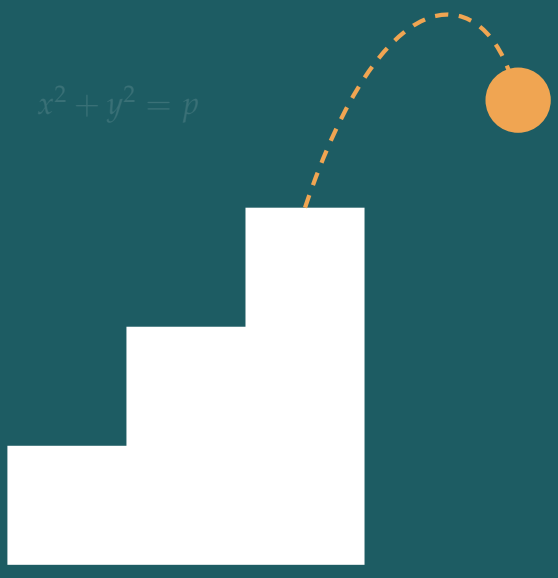
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

樣本試卷詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP I, II 及 III

樣本試卷詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

樣本試卷詳細解答

STEP 樣本試卷（STEP I, II 及 III）全部 48 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP I

第 1 題 判別式與部分分式 純數學 . . . 3

第 2 題 三角學與最優化 純數學 . . . 7

第 3 題 二階微分方程 純數學 . . . 10

第 4 題 代換積分法 純數學 . . . 13

第 5 題 數字計數與階乘 純數學 . . . 16

第 6 題 弓形的面積 純數學 . . . 19

第 7 題 複指數級數 純數學 . . . 23

第 8 題 積分方程 純數學 . . . 26

第 9 題 絕對值不等式 純數學 . . . 29

第 10 題 功率與阻力 力學 . . . 33

第 11 題 摩擦力與滾動接觸 力學 . . . 36

第 12 題 彈及摩擦力的碰撞 力學 . . . 40

第 13 題 圓周運動 力學 . . . 44

第 14 題 期望值 概率與統計 . . . 47

第 15 題 隨機變量之和 概率與統計 . . . 50

第 16 題 連續隨機變量 概率與統計 . . . 53

STEP II

第 1 題 部分分式 純數學 . . . 57

第 2 題 對稱聯立方程 純數學 . . . 60

第 3 題 棣美弗定理 純數學 . . . 64

第 4 題 雙曲函數 純數學 . . . 67

第 5 題 級數與積分界限 純數學 . . . 71

第 6 題 由常微分方程推導加法公式 純數學 . . . 75

第 7 題 階梯函數的積分 純數學 78
第 8 題 模群中元素的階 純數學 82
第 9 題 球面、平面與反射 純數學 86
第 10 題 邏輯謎題 純數學 90
第 11 題 拋體與碰撞 力學 93
第 12 題 懸鏈線上的振動 力學 97
第 13 題 平衡與力矩 力學 101
第 14 題 剛體的轉動 力學 105
第 15 題 期望值與樣本平均值 概率與統計 109
第 16 題 淘汰賽的概率 概率與統計 113

STEP III

第 1 題 數學歸納法 純數學 117
第 2 題 二項式不等式與極限 純數學 120
第 3 題 複數的三角不等式 純數學 123
第 4 題 拋物線的切線 純數學 126
第 5 題 方程根的計數 純數學 129
第 6 題 雙曲函數歸約公式 純數學 133
第 7 題 降階法 純數學 136
第 8 題 向量與柯西–施瓦茲不等式 純數學 139
第 9 題 矩陣群 純數學 142
第 10 題 模算術 純數學 145
第 11 題 階微分方程 力學 148
第 12 題 桿的平衡 力學 152
第 13 題 懸動圓環 力學 156
第 14 題 轉動碰撞 力學 160
第 15 題 隨機網絡的連通性 概率與統計 164
第 16 題 二項分佈 概率與統計 167

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 1 題

純數學 • 判別式與部分分式

> **STEP I 樣本試卷，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q1

關鍵思路

在第 (i) 部分，對每個固定的 x，方程都是 y 的二次方程（quadratic equation），而只有當判別式（discriminant）非負時，才存在實數 y；這個條件正好就是對 x 的限制。把兩者的角色對調，方程同樣是 x 的二次方程，由此得出對 y 的限制。第 (ii) 部分是一道標準的部分分式（partial fractions）題目：把分式拆成若干項，而每一項的二項展開式（binomial expansion）都是我們已知的，然後把 x^n 的係數相加。

解答

第 (i) 部分

把方程看成 y 的二次方程，其係數取決於 x：

$$y^2 + 16x\,y + (4x^2 + 24x) = 0.$$

對於給定的實數 x，存在實數 y 滿足此方程，當且僅當判別式非負：

$$\begin{aligned}(16x)^2 - 4(4x^2 + 24x) &= 256x^2 - 16x^2 - 96x \\ &= 240x^2 - 96x = 48x(5x - 2) \geq 0.\end{aligned}$$

乘積 $x(5x-2)$ 非負，正好是在兩個因子同號（或其中一個為零）的時候，即 $x \leq 0$ 或 $x \geq \frac{2}{5}$。因此任何實數解都滿足

$$x \leq 0 \quad \text{或} \quad x \geq \tfrac{2}{5},$$

這正是所要證明的。

現在把方程看成 x 的二次方程：

$$4x^2 + (16y + 24)x + y^2 = 0.$$

存在實數 x，當且僅當

$$\begin{aligned}(16y + 24)^2 - 16y^2 &= 256y^2 + 768y + 576 - 16y^2 \\ &= 240y^2 + 768y + 576 \\ &= 48(5y^2 + 16y + 12) = 48(5y + 6)(y + 2) \geq 0.\end{aligned}$$

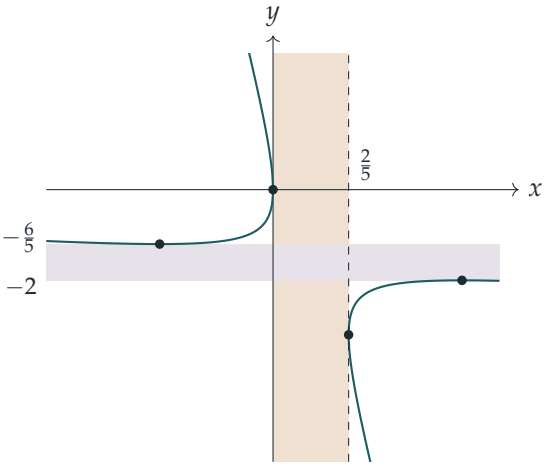
$(5y + 6)(y + 2)$ 的根是 $y = -2$ 和 $y = -\frac{6}{5}$，而這個二次式只在兩根之間取負值。因此

$$y \leq -2 \quad \text{或} \quad y \geq -\tfrac{6}{5}.$$

想一想 這些限制是否已是最佳的？真正的取值範圍會不會更小？

這些限制是精確的。判別式的論證是「當且僅當」的關係：每一個滿足 $x \leq 0$ 或 $x \geq \frac{2}{5}$ 的 x 都至少對應一個實數 y，對 y 亦然。邊界值同樣可以取到，由重根（double root）給出：對於 x 的界限，是 $(x, y) = (0, 0)$ 和 $(\frac{2}{5}, -\frac{16}{5})$；對於 y 的界限，是 $(1, -2)$ 和 $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$。你可以驗證每一點都滿足原方程。

從幾何上看，這條曲線是雙曲線（hyperbola）（因為 $16^2 > 4 \cdot 4 \cdot 1$），而被排除的兩條帶狀區域就是它兩支之間的空隙。



第 (ii) 部分

設

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{2-x} + \frac{C}{(2-x)^2},$$

於是 $9 = A(2-x)^2 + B(2-x)(1+x) + C(1+x)$。代入 $x=-1$ 得 $9 = 9A$，故 $A=1$；代入 $x=2$ 得 $9 = 3C$，故 $C=3$；代入 $x=0$ 得 $9 = 4A + 2B + C = 7 + 2B$，故 $B=1$。因此

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} + \frac{3}{(2-x)^2}.$$

現在把每一項展開，先抽出因子 2，使二項級數（binomial series）以 $\frac{x}{2}$ 的冪表示：

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n, \qquad |x|<1,$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{x}{2}\Big)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2^{n+1}}, \qquad |x|<2,$$

$$\frac{3}{(2-x)^2} = \frac{3}{4}\Big(1-\frac{x}{2}\Big)^{-2} = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{3(n+1)}{2^{n+2}}x^n, \qquad |x|<2,$$

其中用到當 $|u|<1$ 時 $(1-u)^{-2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)u^n$。相加後，$x^n$ 的係數是

$$(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3(n+1)}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{2+3n+3}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{3n+5}{2^{n+2}}.$$

三個級數同時收斂（converge），正好是在 $|x|<1$ 的時候（第一個需要 $|x|<1$，其餘兩個只需要 $|x|<2$）。當 $1\leq |x|<2$ 時，後兩個級數仍然收斂，但第一個不收斂，所以它們的和也不可能收斂。因此展開式成立的範圍是

$$-1 < x < 1.$$

驗算

在第 (i) 部分，點 $(1,-2)$ 給出 $4-32+4+24=0$，而 $(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5})$ 給出 $\frac{36}{25}+\frac{288}{25}+\frac{36}{25}-\frac{360}{25}=0$，確認 y 的兩個界限都可以取到。在第 (ii) 部分，$n=0$ 給出 $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$，與 $x=0$ 時的 $\frac{9}{4\cdot 1}$ 吻合；而 $n=1$ 給出 $-1+\frac{8}{8}=0$，這是正確的，因為分母 $(2-x)^2(1+x) = 4-3x^2+x^3$ 沒有 x 項。從數值上看，在 $x=0.9$ 處把級數求和得 $3.914745\ldots$，與 $9/(1.1^2\times 1.9)$ 一致。

常見錯誤

- 把不等號的方向弄反，答成 $-2\leq y\leq -\frac{6}{5}$。判別式在兩根之間為負，所以被排除的正是這個區間（而且 $(0,0)$ 在曲線上，其 $y=0$ 位於該區間之外）。
- 把 $(2-x)^{-1}$ 當作 $(1-x)^{-1}$ 來展開，忘記抽出因子 $\frac{1}{2}$（平方項則是 $\frac{1}{4}$）。
- 把成立範圍寫成 $|x|<2$：展開式只在每一項都收斂的地方才成立，所以是 $|x|<1$。

STEP 之外

第 (i) 部分的曲線是一條圓錐曲線（conic），它是橢圓、拋物線還是雙曲線，取決於其二次項 $ax^2 + bxy + cy^2$ 的 $b^2 - 4ac$ 的正負號。在大學裏，這會透過二次型（quadratic form）的對稱矩陣（symmetric matrix）及其特徵值（eigenvalue）來理解。第 (ii) 部分觸及收斂半徑（radius of convergence）的概念：展開式一直成立到函數趨向無窮大的最近一點為止，在這裏就是 $x = -1$。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）講述二次型，而 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析導論）則講述冪級數（power series）及其收斂性。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 2 題

純數學 • 三角學與最優化

STEP I 樣本試卷，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s1-q2

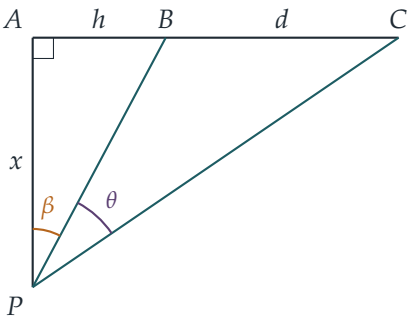
關鍵思路

角 θ 是以 P 為頂點的兩個角之*差*，而這兩個角各自位於一個直角在 A 的直角三角形內。它們的正切值可以直接從圖中讀出，因此只要用上 tan 的減法公式（subtraction formula）便可。至於求最大值，可把 $\tan\theta$ 改寫成 x 只在一處出現的形式，即 $x + (\text{常數})/x$，再用算術平均—幾何平均不等式（AM–GM inequality）便大功告成，完全不必動用微積分。

解答

求 $\tan\theta$

設 $\alpha = \angle APC$ 及 $\beta = \angle APB$。由於 B 位於 A 與 C 之間，故 $\theta = \alpha - \beta$。



在直角三角形 PAC 和 PAB 中（直角在 A），

$$\tan\alpha = \frac{AC}{AP} = \frac{h+d}{x}, \qquad \tan\beta = \frac{AB}{AP} = \frac{h}{x}.$$

由減法公式，

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{h+d}{x} - \dfrac{h}{x}}{1+\dfrac{h(h+d)}{x^2}}.$$

分子和分母同乘以 x^2，得

$$\boxed{\tan\theta = \frac{dx}{x^2+h(h+d)}}$$

（分母 $1+\tan\alpha\tan\beta$ 為正數，所以這條公式永遠不會失效。）

求 θ 的最大值

想一想 使 $\tan\theta$ 最大，是否等同於使 θ 最大？

在這裏是的。α 和 β 都嚴格介乎 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，而且 $\alpha > \beta$，所以 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。在這個區間上 tan 是嚴格遞增（strictly increasing）的，因此 $\tan\theta$ 最大時 θ 也最大。

把分子和分母同除以 $x > 0$，得

$$\tan\theta = \frac{d}{x+\dfrac{h(h+d)}{x}}.$$

由於 d 是固定的，當分母 $x + h(h+d)/x$ 最小時，$\tan\theta$ 便最大。兩項皆為正數，故由算術平均—幾何平均不等式，

$$x + \frac{h(h+d)}{x} \;\geq\; 2\sqrt{x\cdot\frac{h(h+d)}{x}} = 2\sqrt{h(h+d)},$$

等號成立當且僅當兩項相等，即 $x = h(h+d)/x$，亦即 $x^2 = h(h+d)$。所以分母取得最小值、θ 取得最大值之處為

$$\boxed{x = \sqrt{h(h+d)}}$$

此時 $\tan\theta = \dfrac{d}{2\sqrt{h(h+d)}}$。

*或用微積分。*設 $k = h(h+d)$ 及 $f(x) = dx/(x^2+k)$，由商法則（quotient rule）得

$$f'(x) = \frac{d\,(k-x^2)}{(x^2+k)^2},$$

它在 $0 < x < \sqrt{k}$ 時為正，在 $x > \sqrt{k}$ 時為負，所以 f 先上升至 $x = \sqrt{k}$ 處的唯一極大值，然後下降。算術平均—幾何平均不等式的做法較快，而且一眼便看出這個極大值是全局最大值（global maximum）。

驗算

- 極限：當 $x \to 0$ 或 $x \to \infty$ 時，公式給出 $\tan\theta \to 0$。這是合理的：從非常接近 A 的位置，或從非常遠的地方看，線段 BC 在 P 所對的角幾乎為零。所以兩者之間必定有一個最大值。
- 對稱性：把 x 換成 $h(h+d)/x$ 時，$\tan\theta$ 保持不變，所以最大值必定出現在這個對換的不動點（fixed point），即 $x = \sqrt{h(h+d)}$。取 $h = 2$、$d = 1$，則 $x = 2$ 和 $x = 3$ 兩點給出相同的角（約 $11.31°$），而最大值在 $x = \sqrt{6}$ 處，約為 $11.54°$。
- 取 $h = 1$、$d = 3$：$x = 2$，而 $\tan\theta = 6/8 = \frac{3}{4}$，是 3–4–5 三角形中的角，即 $36.87°$。隨機抽取 20 000 組 (h, d, x)，直接由坐標計算 θ，結果與公式相符至 10^{-14}；以數值方法搜尋使角最大的 x，每次都與 $\sqrt{h(h+d)}$ 吻合。

常見錯誤

- 寫成 $\tan\theta = d/x$，彷彿 θ 位於一個直角三角形內。事實並非如此：直角在 A，不在 BC 上。
- 求 $\tan\theta$ 的最大值，卻沒有說明為何這樣便使 θ 最大；這需要 θ 一直處於 tan 遞增的區間內。

STEP 之外

這個答案有一個漂亮的幾何解釋。使 BC 所對的角為定值的點，都位於通過 B 和 C 的圓的弧上；在仍然與直線 AP 相交的這類圓之中，最小的一個給出最大的角，而這個圓正是在 P 與該直線相切的那一個。切割線定理（tangent–secant theorem，即點 A 的冪）隨即給出 $AP^2 = AB \cdot AC$，這正是 $x^2 = h(h+d)$。這就是雷格蒙塔努斯（Regiomontanus）問題，常見的問法是「應該站在哪裏，才能把基座上的雕像看得最清楚？」。要優化某個量，先轉而考慮另一個較易處理、但與它同升同降的量——這個想法貫穿大學一年級的分析學（analysis）；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 一書中還有很多同類的題目。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 3 題

純數學 • 二階微分方程

> **STEP I 樣本試卷，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q3

關鍵思路

二階方程難解，兩個一階方程卻容易。題目建議的代換（substitution）$z = y' - y$（以 y' 表示 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$）經過特意挑選，使方程左邊化為只含 z 和 z' 的式子。這樣便得到一個關於 z 的一階線性方程（first-order linear equation），然後再得到一個關於 y 的一階線性方程；兩者都可以用積分因子（integrating factor）解決。

解答

降階

設 $z = y' - y$，則 $z' = y'' - y'$。我們把方程左邊相應地拆開：

$$y'' + 2y' - 3y = (y'' - y') + 3(y' - y) = z' + 3z.$$

於是方程變成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 3z = 2\mathrm{e}^x.$$

由初始條件（initial conditions）得 $z(0) = y'(0) - y(0) = 2 - 1 = 1$。

想一想 你會怎樣想到 $(y'' - y') + 3(y' - y)$ 這個拆法？

我們需要 $y'' + 2y' - 3y$ 等於 $z' + kz = y'' + (k-1)y' - ky$，其中 k 為某個常數。比較 y' 項得 $k = 3$，而此時 $-ky = -3y$ 亦吻合。（這個做法之所以可行，是因為 1 是輔助方程（auxiliary equation）$m^2 + 2m - 3 = (m-1)(m+3) = 0$ 的一個根；另一個根 -3 正是 $z' + 3z$ 中出現的數。）

求 z

乘以積分因子 e^{3x}，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(z\mathrm{e}^{3x}\right) = 2\mathrm{e}^{4x} \quad \Longrightarrow \quad z\mathrm{e}^{3x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4x} + A.$$

當 $x = 0$ 時，$1 = \frac{1}{2} + A$，所以 $A = \frac{1}{2}$，而

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}\right).$$

求 y

現在 $y' - y = z$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}\right).$$

積分因子是 e^{-x}：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\mathrm{e}^{-x}\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x},$$

$$y\mathrm{e}^{-x} = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-4x} + B.$$

當 $x = 0$ 時，$1 = -\frac{1}{8} + B$，所以 $B = \frac{9}{8}$。各項乘以 e^{x}，

$$\boxed{y = \left(\frac{x}{2} + \frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3x} = \frac{(4x+9)\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-3x}}{8}}$$

留意我們在這裏只用了 $y(0) = 1$；條件 $y'(0) = 2$ 在求 $z(0)$ 時已經用過，所以兩個條件都已用上。

驗算

- $y(0) = (9-1)/8 = 1$，而由 $y' = \left((4x+13)\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-3x}\right)/8$ 得 $y'(0) = 16/8 = 2$。
- 代入驗證：e^{-3x} 是齊次方程（homogeneous equation）的解（$9 - 6 - 3 = 0$），e^{x} 也是（$1 + 2 - 3 = 0$）。對於 $x\mathrm{e}^{x}$，$y'' + 2y' - 3y = (x+2) + 2(x+1) - 3x = 4$ 乘以 e^{x}，所以 $\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}$ 剛好貢獻 $2\mathrm{e}^{x}$。
- 數值上，用龍格—庫塔法（Runge–Kutta method）由 $x = 0$ 起逐步計算原方程，得 $y(1) \approx 4.41098$，與 $(13\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-3})/8$ 相符。

常見錯誤

- 在最後再用一次 $y'(0) = 2$，或者忘記把它轉換成 $z(0) = 1$。
- 改用「其他方法」而嘗試特別積分（particular integral）$c\,\mathrm{e}^{x}$：由於 e^{x} 本身已是齊次方程的解，這樣做行不通，需要改用 $cx\mathrm{e}^{x}$。代換法會自動處理這個問題。

STEP 之外

這個代換其實是把微分算子（differential operator）作因式分解：以 D 表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$，方程就是 $(D+3)(D-1)y = 2\mathrm{e}^x$，而 $z = (D-1)y$。這樣把算子分解，可以解釋常係數線性方程的整套理論，包括為何重根或「共振」（resonant）根會帶來額外的因子 x。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）對此有系統的闡述。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 4 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 樣本試卷，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q4

關鍵思路

每當見到二次式的平方根，應先配方（complete the square）。這裏根號內的二次式化為 $(x+1)^2-3$，而根號外的因子亦是 $x+1$，所以平移至 $u=x+1$ 後，便得到簡潔的形式 $\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-3}}$。這種形狀（一個變量乘以「其平方減去常數」的平方根）正是正割代換（secant substitution）的用武之地，用倒數代換（reciprocal substitution）$t=1/u$ 亦同樣可行。兩種代換都能把無限的積分範圍化為有限的範圍。

解答

配方

我們有

$$x^2+2x-2=(x+1)^2-3,$$

當 $x\geq 1$ 時此式為正，因為此時 $(x+1)^2\geq 4>3$，所以被積函數（integrand）在整個 $[1,\infty)$ 上都有定義。設 $u=x+1$，則 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，當 $x=1$ 時 $u=2$，而當 $x\to\infty$ 時 $u\to\infty$：

$$I=\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}}=\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-3}}.$$

當 u 很大時，被積函數的表現近似 $1/u^2$，所以這個積分收斂（converges）。

正割代換

設 $u=\sqrt{3}\sec\theta$，其中 $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$。則

$$\mathrm{d}u=\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta,\qquad \sqrt{u^2-3}=\sqrt{3(\sec^2\theta-1)}=\sqrt{3}\tan\theta,$$

這裏我們用了在此範圍內 $\tan\theta \geq 0$ 這一事實，從而去掉絕對值（modulus）符號。

> **想一想** 新的積分上下限是甚麼？

在 $u = 2$ 時，我們需要 $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$，即 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$。當 $u \to \infty$ 時，$\sec\theta \to \infty$，所以 $\theta \to \frac{\pi}{2}$（從下方趨近）。這個代換在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 上是遞增的，所以上下限的次序保持不變。

現在所有東西都約去了：

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{3}\sec\theta\cdot\sqrt{3}\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

因此

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

另一做法：倒數代換

假如一時想不起正割，$t = 1/u$ 同樣奏效，而且立刻把積分範圍變為有限。取 $u = 1/t$，則 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t/t^2$，而且對於 $t > 0$

$$u\sqrt{u^2-3} = \frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-3t^2}}{t} = \frac{\sqrt{1-3t^2}}{t^2}.$$

上下限 $u = 2$ 和 $u \to \infty$ 變為 $t = \frac{1}{2}$ 和 $t \to 0$，而負號把兩者的次序對調：

$$I = \int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-3t^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{3}\,t\right)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3},$$

與第一種方法的結果一致。

驗算

- 對原函數（antiderivative）$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$ 求導，便可還原出被積函數；於是 $F(\infty) - F(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$。
- 粗略估計大小：在 $[1,\infty)$ 上，被積函數比 $1/(x+1)^2$ 稍大，而後者的積分是 $\frac{1}{2}$。我們的答案是 $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$，略高於 $\frac{1}{2}$，正如所料。
- 對原積分作數值積分（numerical quadrature）（把範圍分段，並以 $x = 1/w$ 消去無限長的尾段），得 0.604600，與 $\pi/(3\sqrt{3}) = 0.6045998\ldots$ 吻合。

常見錯誤

- 忘記更改上下限：下限是 $\theta = \frac{\pi}{6}$，而不是 0；用 0 會得出錯誤答案 $\pi/(2\sqrt{3})$。
- 寫下 $\sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$，卻沒有檢查 $\tan\theta$ 在所用範圍內的正負號。
- 把答案留作 $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}(\ldots)$「在無窮遠處」取值，而沒有正確地取極限。

STEP 之外

這是一個廣義積分（improper integral）：嚴格來說，它的意思是 $\lim_{X\to\infty}\int_1^X$，而大學一年級的分析課程會精確說明這類極限何時存在（與 $\int^\infty u^{-2}\,\mathrm{d}u$ 作比較是標準的判別法）。這裏的代換亦是一套一般理論的起點：對於有理函數（rational function）R，求 $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ 的積分，總可以化為求有理函數的積分。關於廣義積分和比較判別法（comparison test），可參閱 Abbott, *Understanding Analysis*。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 5 題

純數學 • 數字計數與階乘

STEP I 樣本試卷，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s1-q5

關鍵思路

兩部分考的都是仔細點算，而不是計算。在 (i) 中，先把數字按區段點算（一位數、兩位數、三位數），準確找出第 1000 個數字（digit）落在哪裏，然後逐個數位點算 7 的數目：個位、十位、百位。在 (ii) 中，每個末尾零（trailing zero）都對應一個因數 $10 = 2 \times 5$，而 5 比 2 稀少，所以只需點算 365! 中因數 5 的個數。

解答

第 (i) 部分

在哪裏停筆？數 1 至 9 用了 9 個數字。90 個兩位數 10 至 99 用了 180 個數字，至此合共 189 個。於是還剩下

$$1000 - 189 = 811 = 3 \times 270 + 1$$

個數字。首 270 個三位數是 $100, 101, \ldots, 369$，它們用了 810 個數字。最後一個數字是 370 的首位數字，即 3。所以我們完整寫出了 $1, 2, \ldots, 369$，之後再寫了單獨一個 3。

? **想一想** 370 這個數裏面有一個 7。它算不算在內？

不算。我們寫完它的首位數字 3 便停筆，所以它的 7 根本沒有寫出來。這正是我們必須把停筆的位置準確定到某一個數字的原因。

點算 1 至 369 中的 7。我們按位值（place value）點算。每個 7 都恰好在一個數位上，所以不會重複點算；像 77 這樣的數會貢獻兩個，這是正確的。

▶ 個位數字。在每個完整的十個數區段 $10k, \ldots, 10k + 9$ 中，恰好有一個數以 7 結尾。0

至 359 這些數組成 36 個完整區段，給出 36 個 7：7, 17, . . . , 357。不完整的區段 360 至 369 再多添一個，即 367。合計：37。

- 十位數字。在每個完整的一百個數之中，恰好有十個數的十位數字是 7：即 70–79、170–179 和 270–279。區段 370–379 已超出 369。合計：30。
- 百位數字。不超過 369 的每個數，百位數字最大是 3（或者根本沒有百位數字）。合計：0。

最後那個單獨的 3 沒有任何貢獻。因此數字 7 共用了

$$37 + 30 + 0 = 67 \text{ 次。}$$

第 (ii) 部分

N 在十進制（base 10）下末尾零的個數，是滿足 $10^k \mid N$ 的最大的 k。由於 $10 = 2 \times 5$，這個數等於 N 的質因數分解（prime factorisation）中 2 的冪次與 5 的冪次兩者中較小的一個。

點算 5 的個數。整除 365! 的 5 的冪次，等於對 $j = 1, \ldots, 365$ 把 j 中因數 5 的個數加起來的總和。5 的倍數至少貢獻一個因數，25 的倍數貢獻第二個，125 的倍數貢獻第三個，如此類推。逐層分開點算：

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \tfrac{365}{5} \right\rfloor &= 73 && \text{（5 的倍數），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{25} \right\rfloor &= 14 && \text{（25 的倍數），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{125} \right\rfloor &= 2 && \text{（125 的倍數：125, 250），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{625} \right\rfloor &= 0. &&
\end{aligned}$$

一個恰好被 5^m 整除的數，在首 m 行中各被點算一次，所以它的貢獻恰好是 m，正合所需。因此 365! 中 5 的冪次是

$$73 + 14 + 2 = 89.$$

2 並不是瓶頸。對 2 作同樣的論證，可知因數 2 至少有 $\lfloor 365/2 \rfloor = 182 > 89$ 個。（事實上共有 $182 + 91 + 45 + 22 + 11 + 5 + 2 + 1 = 359$ 個。）所以 $2^{89} \cdot 5^{89} = 10^{89}$ 整除 365!，但 10^{90} 不能，因為 $5^{90} \nmid 365!$。

因此 365! 的末尾恰好有 **89** 個零。

驗算

對於 (i)，可以快速檢查停筆的位置：$9 + 180 + 3 \times 270 = 999$ 個數字剛好寫到 369 的末尾，而下一個數字就是 370 的首位數字 3。用電腦寫出首 1000 個數字再點算，可確

認共有 67 個 7，其中 20 個在 1–99 之中，47 個在 100–369 之中。對於 (ii)，準確計算 365!（它有 779 位數字），再點算它末尾的零。結果是 89 個，與 5 的個數吻合。可以用一個小例子親手檢驗這個方法：25! 的末尾應有 $\lfloor 25/5 \rfloor + \lfloor 25/25 \rfloor = 6$ 個零，而事實上 $25! = 15\,511\,210\,043\,330\,985\,984\,000\,000$。

常見錯誤

- 把 370（甚至 371–379）當作已經寫出來，於是得出 68 或更大的答案。
- 只用 $\lfloor 365/5 \rfloor = 73$，忘記了 25、50、... 含有兩個 5，而 125、250 含有三個 5。
- 按數而不是按數字來點算 7，以致 77、177 和 277 只點算了一次而不是兩次。

STEP 之外

(ii) 中的逐層點算就是勒讓德公式（Legendre's formula）：質數 p 在 $n!$ 中的冪次是 $\sum_{k\geq 1}\lfloor n/p^k \rfloor$，它亦等於 $(n - s_p(n))/(p-1)$，其中 $s_p(n)$ 是 n 在 p 進制下各位數字之和。這裏 $365 = 2430_5$，數字和是 9，而 $(365-9)/4 = 89$。這條公式是庫默爾定理（Kummer's theorem）的基礎，該定理討論二項式係數（binomial coefficients）的質因數。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是進一步探索這類初等數論（elementary number theory）的好去處。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 6 題

純數學 • 弓形的面積

> **STEP I 樣本試卷，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q6

關鍵思路

這枚硬幣是一個正七邊形（regular heptagon），每條邊外面各凸出一個圓弧形的「帽子」。因此它的面積等於七邊形的面積加上七個弓形（circular segment）的面積，而每個弓形就是一個扇形（sector）減去一個三角形。於是整個問題歸結為兩個角：每段弧在其圓心所對的角（用圓周角定理（inscribed angle theorem）立刻可得），以及七邊形的長對角線與其外接圓（circumcircle）半徑之間的夾角。

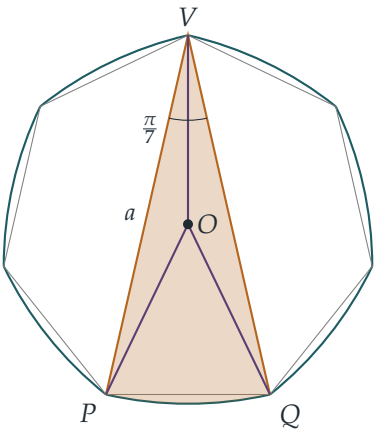
解答

形狀

每個頂點（vertex）與它對面那段弧的兩個端點的距離都是 a（兩個端點都在以該頂點為圓心、半徑為 a 的圓上）。所以七條「長」對角線（diagonal），即每條由一個頂點連到沿周界數過去第三個頂點的線段，長度全是 a。半徑相等的等弧在各自圓心所對的角相等，所以七條邊（即各段弧的弦（chord））也都相等。

把長對角線依次連起來，便得到一個各邊長度均為 a 的七角星。它在每個尖角處的角，就是由該頂點出發的兩條對角線之間的夾角；而這兩條對角線連同對面的那條邊，組成一個三角形，三邊分別是 a、a 和共同的邊長。這樣的七個三角形全部全等（congruent），所以這個星形不但等邊，而且等角，因而是正星形。由此可知，七個頂點就是一個正七邊形的頂點，設其中心為 O，外接圓半徑（circumradius）為 R。

把其中一個頂點記為 V，並設 P 和 Q 是以 V 為圓心的那段弧的兩個端點；P 和 Q 是七邊形的相鄰頂點。



每段弧所對的角

邊 PQ 在中心 O 所對的角是 $2\pi/7$。由於 V 在外接圓上，並且位於優弧（major arc）PQ 上，由圓周角定理得

$$\angle PVQ = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{7}.$$

所以每段弧都是半徑為 a 的圓的一部分，在其圓心所對的角為 $\pi/7$，而扇形 VPQ（陰影部分）的面積是

$$\tfrac{1}{2}a^2\cdot\frac{\pi}{7} = \frac{\pi a^2}{14}.$$

把面積加起來

硬幣的幣面由七邊形和七個弓形組成，每條邊上各有一個弓形。七邊形可分成七個像 OPQ 那樣的三角形，而 PQ 上的弓形就是扇形 VPQ 減去三角形 VPQ。因此

$$\begin{aligned}\text{面積} &= 7\,[OPQ] + 7\big(\text{扇形}VPQ - [VPQ]\big)\\ &= \frac{\pi a^2}{2} - 7\big([VPQ] - [OPQ]\big),\end{aligned}$$

其中 $[\,\cdot\,]$ 表示面積。

? **想一想** 怎樣才能不必分別計算兩個三角形，就求出 $[VPQ] - [OPQ]$？

中心 O 位於三角形 VPQ 之內，並在它的對稱軸上，所以從三角形 VPQ 中除去三角形 OPQ，餘下的就是兩個全等三角形 OVP 和 OVQ：

$$[VPQ] - [OPQ] = [OVP] + [OVQ] = 2\cdot\tfrac{1}{2}\,R\,a\sin\angle OVP.$$

根據對稱性，VO 平分 $\angle PVQ$，所以 $\angle OVP = \pi/14$。三角形 OVP 是等腰三角形（isosceles triangle），其中 $OV = OP = R$，所以兩個底角都是 $\pi/14$；由 O 向 VP 作垂

線，便得

$$a = VP = 2R\cos\frac{\pi}{14}, \qquad \text{所以} \qquad R = \frac{a}{2\cos(\pi/14)}.$$

因此

$$[VPQ] - [OPQ] = R\,a\sin\frac{\pi}{14} = \frac{a^2\sin(\pi/14)}{2\cos(\pi/14)} = \frac{a^2}{2}\tan\frac{\pi}{14},$$

而

$$\text{面積} = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{7a^2}{2}\tan\frac{\pi}{14} = \frac{a^2}{2}\left(\pi - 7\tan\frac{\pi}{14}\right),$$

這正是所要證明的結果。

驗算

- 數值上，$\frac{1}{2}(\pi - 7\tan\frac{\pi}{14}) \approx 0.7719$，所以面積約為 $0.772a^2$。在七段弧上密集取點，再用鞋帶公式（shoelace formula）計算，結果吻合至小數點後六位；用蒙地卡羅（Monte Carlo）方法估算，結果也一樣（一個點在硬幣之內，當且僅當它與全部七個頂點的距離都不超過 a）。
- 這枚硬幣在每個方向上的寬度都是 a，就像一個直徑為 a 的圓盤，而圓盤的面積是 $\pi a^2/4 \approx 0.785a^2$。在所有定寬為 a 的圖形之中，以圓盤的面積最大，所以我們預期答案會略小一些，而 $0.772a^2 < 0.785a^2$，正合預期。
- 把同樣的論證用於勒洛（Reuleaux）n 邊形（n 為奇數），可得 $\frac{a^2}{2}\left(\pi - n\tan\frac{\pi}{2n}\right)$；當 $n \to \infty$ 時，$n\tan\frac{\pi}{2n} \to \frac{\pi}{2}$，面積趨向 $\pi a^2/4$，即圓盤的面積。取 $n = 3$ 則得 $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})a^2$，就是大家熟悉的勒洛三角形（Reuleaux triangle）。

常見錯誤

- 把弧所對的角當作 $2\pi/7$（在中心 O 所對的角），而不是 $\pi/7$（在對面頂點所對的角，那裏才是該段弧真正的圓心）。
- 把 a 與外接圓半徑 R 混淆：a 是長對角線，$a = 2R\cos(\pi/14)$。

STEP 之外

50 便士硬幣是一條定寬曲線（curve of constant width）：每一對互相平行的切線之間的距離都同樣是 a，所以無論硬幣怎樣轉動，投幣口都能用同一方法量度它。巴比爾定理（Barbier's theorem）指出，每一條這樣的曲線的周界都是 πa（這裏是 $7\cdot a\cdot \pi/7$），而布拉施克–勒貝格定理（Blaschke–Lebesgue theorem）則指出，其中以勒洛三角形的面積

最小。想進一步了解這類幾何，可參閱柯朗（Courant）與羅賓斯（Robbins）的 *What Is Mathematics?*，書中有一節談定寬曲線，寫得十分精彩。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 7 題

純數學 • 複指數級數

> **STEP I 樣本試卷，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q7

關鍵思路

每當見到 $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，就抽出「半角」因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$：餘下的是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$，它是實數。至於那個級數，二項式係數（binomial coefficients）$\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$ 提示我們使用二項式定理（binomial theorem）。因此我們把每個正弦寫成一個指數的虛部（imaginary part），於是該和就變成 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ 的某次冪的虛部，而第一部分已經把它化成極式（polar form）。

解答

模與輻角

抽出因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，

$$\begin{aligned}1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left[(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)+(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\right]\\ &= 2\cos\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.\end{aligned}$$

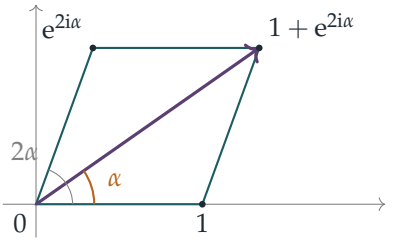
> ? **想一想** 我們現在可以直接讀出「模（modulus）為 $2\cos\alpha$，輻角（argument）為 α」嗎？對 α 的限制有甚麼用？

$r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 這個形式，只有在 $r>0$ 時才給出模 r 和輻角 θ。這裏 $-\frac{1}{2}\pi<\alpha<\frac{1}{2}\pi$，所以 $\cos\alpha>0$，而且這個範圍也落在主值區間 $(-\pi,\pi]$ 之內。因此

$$\left|1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right|=2\cos\alpha,\qquad \arg\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)=\alpha.$$

（假如 $\cos\alpha$ 是負數，模就會是 $-2\cos\alpha$，而輻角則會相差 π。）

這裏還有一個漂亮的幾何圖像。點 0、1 和 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ 構成一個邊長為 1 的菱形，餘下的一個頂點是 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$。由 0 出發的對角線平分角 2α，長度為 $2\cos\alpha$。



級數

由於對實數 θ 有 $\sin\theta = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，而二項式係數都是實數，

$$\begin{aligned} S &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin(2r+1)\alpha = \operatorname{Im}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} \\ &= \operatorname{Im}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^r\Big] = \operatorname{Im}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^n\Big], \end{aligned}$$

其中先用了 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^r$，再用二項式定理。現在利用第一部分的結果，配合棣美弗定理（de Moivre's theorem）$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}$：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} = 2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}.$$

因為 $2^n\cos^n\alpha$ 是實數，取虛部便得

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\sin(2r+1)\alpha = 2^n\cos^n\alpha\,\sin(n+1)\alpha.}$$

因式分解 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = 2\cos\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 對每一個實數 α 都成立。我們只是在指明模和輻角時才需要 $\cos\alpha > 0$，所以這條求和公式對所有實數 α 都成立，而不限於題目所給的範圍。

驗算

- $n=0$：兩邊都是 $\sin\alpha$。$n=1$：根據和化積公式（sum-to-product formula），左邊是 $\sin\alpha+\sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cos\alpha$，與 $2\cos\alpha\sin 2\alpha$ 吻合。
- $n=3$，$\alpha=\frac{\pi}{6}$：左邊是 $\frac{1}{2}+3+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$，右邊是 $8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}$。
- $\alpha=\frac{1}{2}\pi$：每一項 $\sin(2r+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^r$，所以當 $n\geq 1$ 時，和為 $(1-1)^n = 0$，與 $\cos\frac{\pi}{2}=0$ 吻合。
- 我們以數值方法驗證過，對 $0\leq n\leq 24$ 及隨機選取的 α 值，公式都成立。

常見錯誤

- 把模寫成 $2\cos\alpha$，卻沒有指出 α 的範圍保證它是正數。模不可能是負數。
- 過早取虛部。$\operatorname{Im}(zw) \neq \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w$，所以要一直保留複數形式，到最後一步才取虛部。
- 把 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha}$ 寫成 $\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^r$，漏掉了額外的因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$。這樣會令 $\sin(n+1)\alpha$ 變成 $\sin n\alpha$。

STEP 之外

同一個想法，即把 $\sum \binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\theta}$ 求和成閉合形式（closed form），也出現在傅立葉分析（Fourier analysis）之中。在那裏，$\cos^n$ 類型的式子會展開成倍角之和，或由倍角之和收攏而成，而二項式權重 $\binom{n}{r}/2^n$ 就成為二項分佈（binomial distribution）。抽出半角因子也是求 $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的模的標準方法，你會在等比級數（geometric series）和單位根（roots of unity）中遇到它。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把這些運算的幾何觀點闡述得十分精彩，當中也包括那幅菱形圖。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 8 題

純數學 • 積分方程

STEP I 樣本試卷，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

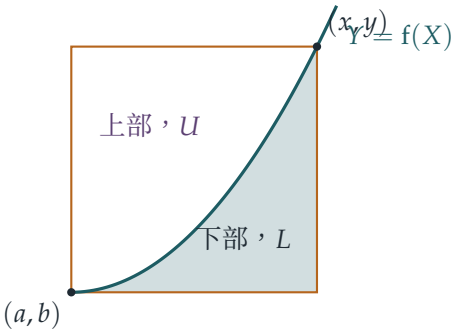
step.maths.org/questions/spec-s1-q8

關鍵思路

面積條件對 (x,y) 的每一個位置都成立，所以它其實是兩個以 x 為自變數的函數之間的等式：一邊是 f 的積分，另一邊則涉及 $\mathrm{f}(x)$ 本身。對 x 求導便可消去積分，得出一個一階微分方程（first-order differential equation），這個方程可以分離變數（或者更簡潔地，化為「某個商的導數等於零」）。

解答

由於 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$，曲線由矩形的一角 (a,b) 上升至對角 (x,y)，所以矩形的闊度為 $x-a$，高度為 $y-b = \mathrm{f}(x)-b \geq 0$。下部是曲線與底邊 $Y=b$ 之間的區域（下圖陰影部分）；上部則是餘下的部分。



以 t 作為積分變數（因為 x 現在是積分上限），

$$L=\int_a^x \big(\mathrm{f}(t)-b\big)\,\mathrm{d}t, \qquad L+U=(x-a)\big(\mathrm{f}(x)-b\big).$$

條件 $L = \frac{1}{2}U$ 即是 $U = 2L$，所以整個矩形的面積為 $3L$：

$$3\int_a^x \big(\mathrm{f}(t) - b\big)\,\mathrm{d}t = (x-a)\big(\mathrm{f}(x) - b\big) \qquad \text{對所有} x \geq a. \tag{$*$}$$

想一想 怎樣由一條含有積分的等式，得出一條可以解出 f 的方程？

由於 $(*)$ 對每一個 $x \geq a$ 都成立，兩邊是同一個以 x 為自變數的函數，所以它們的導數相等。函數 f 可微（differentiable）（題目提到 f′），因而連續（continuous），所以根據微積分基本定理（fundamental theorem of calculus），左邊的導數是 $3(\mathrm{f}(x) - b)$。用積法則（product rule）對右邊求導，

$$3\big(\mathrm{f}(x) - b\big) = \big(\mathrm{f}(x) - b\big) + (x-a)\,\mathrm{f}'(x),$$

即

$$(x-a)\,\mathrm{f}'(x) = 2\big(\mathrm{f}(x) - b\big).$$

為了整理這條式，設 $g(x) = \mathrm{f}(x) - b$ 及 $u = x - a$，於是 $g' = \mathrm{f}'$，方程變成 $u\,g' = 2g$。我們可以分離變數（separate variables），得 $g'/g = 2/u$，但這樣要除以 g，而它有可能等於零。更乾淨利落的做法是留意到，當 $x > a$（即 $u > 0$）時，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{g}{u^2}\right) = \frac{u^2 g' - 2u\,g}{u^4} = \frac{u\,g' - 2g}{u^3} = 0.$$

所以 g/u^2 是一個常數，設為 k，在 $x > a$ 上成立，於是

$$\mathrm{f}(x) - b = k(x-a)^2 \qquad (x > a),$$

而這在 $x = a$ 時同樣成立，因為 (a, b) 在曲線上。由於 $\mathrm{f}(x) \geq b$ 對 $x \geq a$ 成立（函數由 $\mathrm{f}(a) = b$ 開始非遞減），我們有 $k \geq 0$，而且 $k > 0$，除非曲線是水平直線 $y = b$；在這情況下每個矩形都退化成面積為零，條件變得空洞。

因此曲線是 $y - b = k(x-a)^2$，其中 $x \geq a$：這是以 $x = a$ 為鉛垂對稱軸、頂點（vertex）位於 (a, b) 的拋物線（parabola）的一半。由於 $x \geq a$，我們只得到右邊的一支，所以它是該拋物線的一段弧，正如題目所要求。

反過來，這條曲線確實滿足條件：$L = \int_a^x k(t-a)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}k(x-a)^3$，而矩形的面積為 $(x-a)\cdot k(x-a)^2 = k(x-a)^3$，所以 $U = \frac{2}{3}k(x-a)^3 = 2L$。

驗算

取 $a = b = 0$、$k = 1$ 及 $x = 3$：矩形為 3×9，面積為 27，而 $\int_0^3 t^2\,\mathrm{d}t = 9$，所以兩部分的面積分別為 9 和 18，比為 $1:2$。更一般地，對於 $y - b = k(x-a)^p$，下部與上部之比為 $1/p$（我們用辛普森法則（Simpson's rule）對 $p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$ 作了數值驗算），所以比值 $\frac{1}{2}$ 正好對應 $p = 2$；直線（$p = 1$）把矩形平分，理應如此。

常見錯誤

- 把 x 同時用作積分上限和積分變數，令求導一步變得混亂。
- 把兩部分調轉，得出 $U = \frac{1}{2}L$，結果得到 $(x-a)\mathrm{f}' = \frac{1}{2}(\mathrm{f}-b)$ 及曲線 $y - b = k\sqrt{x-a}$，那是一條對稱軸為水平的拋物線，方向不對。
- 不加說明便除以 $\mathrm{f}(x) - b$；上面利用商的論證避開了這個問題。

STEP 之外

方程 $(*)$ 是一條*積分方程*（integral equation）：未知函數出現在積分之內。透過求導把它化為微分方程，並記住原來的方程同時決定了初始值（initial value），是標準的第一步；而答案的唯一性，則建基於這個事實：在一個區間上導數為零的函數必為常數（這是中值定理（mean value theorem）的推論）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 嚴謹地證明了微積分基本定理和中值定理；Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 則涵蓋了像 $u\,g' = 2g$ 這類方程。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 9 題

純數學 • 絕對值不等式

> **STEP I 樣本試卷，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q9

關鍵思路

兩部分的重點都是去掉絕對值符號（modulus sign），方法是準確找出符號內的式子在哪裏變號，或在哪裏穿過某個水平。在 (i) 中，設 $u = x + 1$，式子便化為 $u - 2/u$，它在 $u = 0$ 的兩側各自遞增，因此不等式（inequality）只是在每一分支上把 u 限制在某個二次方程的兩個根之間。在 (ii) 中，把 $\cos x - \sin x$ 寫成單一個餘弦，便可看出它在哪裏變號，然後在該處把積分（integral）分段。

解答

第 (i) 部分

要使式子有定義，必須有 $x \neq -1$。設 $u = x + 1$，則 $u \neq 0$，且

$$x + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - 2}{x+1} = u - \frac{2}{u}.$$

把它記作 $f(u)$。不等式即為 $-2 < f(u) < 2$。

> **想一想** 為甚麼不直接把各項乘以 $x + 1$？

因為 $x + 1$ 可以是負數，而乘以負數會令不等號反向；不小心處理的話，正是丟失一半答案的典型原因。我們改為利用 f 的形狀。它的導數（derivative）是 $f'(u) = 1 + 2/u^2 > 0$，所以 f 在 $u < 0$ 上嚴格遞增（strictly increasing），在 $u > 0$ 上亦各自嚴格遞增。在每一分支上，它都由 $-\infty$ 升至 $+\infty$：當 $u \to 0^-$ 時，$-2/u \to +\infty$；當 $u \to 0^+$ 時，$-2/u \to -\infty$；而當 $|u| \to \infty$ 時，$f(u) \sim u$。因此在每一分支上，f 取 -2 和 2 這兩個值各恰好一次，而 $-2 < f < 2$ 正好在這兩點之間成立。

對於 $u \neq 0$，乘以 u 可得兩個等價的方程：

$$f(u) = 2 \iff u^2 - 2u - 2 = 0 \iff u = 1 \pm \sqrt{3},$$
$$f(u) = -2 \iff u^2 + 2u - 2 = 0 \iff u = -1 \pm \sqrt{3}.$$

分支 $u > 0$。正根是 $u = -1 + \sqrt{3}$（此處 $f = -2$）和 $u = 1 + \sqrt{3}$（此處 $f = 2$）。由於 f 遞增，$-2 < f(u) < 2$ 恰好在 $-1 + \sqrt{3} < u < 1 + \sqrt{3}$ 時成立，即 $-2 + \sqrt{3} < x < \sqrt{3}$。

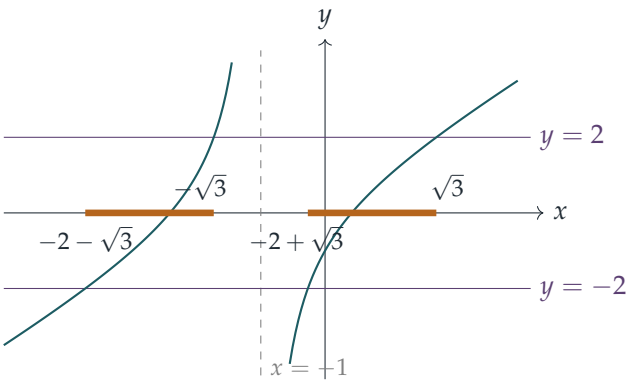
分支 $u < 0$。負根是 $u = -1 - \sqrt{3}$（此處 $f = -2$）和 $u = 1 - \sqrt{3}$（此處 $f = 2$）。同樣由單調性（monotonicity）可知，$-2 < f(u) < 2$ 恰好在 $-1 - \sqrt{3} < u < 1 - \sqrt{3}$ 時成立，即 $-2 - \sqrt{3} < x < -\sqrt{3}$。

兩個區間都不包含 $x = -1$（留意 $-\sqrt{3} < -1 < -2 + \sqrt{3}$），所以解集（solution set）是

$$\boxed{(-2 - \sqrt{3},\ -\sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3},\ \sqrt{3})}$$

每個端點都符合題目要求的 $a + b\sqrt{3}$ 形式。端點不包括在內，因為在該處絕對值恰好等於 2。

把 $y = x + (x-1)/(x+1)$ 的圖像與直線 $y = \pm 2$ 畫在一起，可見曲線位於兩條直線之間的兩個區間（以琥珀色標示）。



第 (ii) 部分

把兩項合併成一個餘弦：

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

當 $0 \le x \le \pi$ 時，有 $\pi/4 \le x + \pi/4 \le 5\pi/4$，而餘弦在 $[\pi/4, \pi/2)$ 上為正，在 $(\pi/2, 5\pi/4]$ 上為負。因此當 $0 \le x \le \pi/4$ 時 $\cos x - \sin x \ge 0$，當 $\pi/4 \le x \le \pi$ 時則 ≤ 0。在 $\pi/4$ 處把積分分段，並利用 $\cos x - \sin x$ 的一個原函數（antiderivative）是

$\sin x + \cos x$：

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\cos x - \sin x|\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x - \int_{\pi/4}^{\pi} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} - \Big[\sin x + \cos x\Big]_{\pi/4}^{\pi} \\ &= \left(\sqrt{2} - 1\right) - \left(-1 - \sqrt{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

驗算

- 在 (i) 中抽查數值：當 $x = 0$ 時，式子的值是 -1，在絕對值的界限之內，而 $0 \in (-2+\sqrt{3}, \sqrt{3})$；當 $x = -2$ 時，值是 $-2+3 = 1$，而 $-2 \in (-2-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$；當 $x = -1.5$ 時，值是 $-1.5+5 = 3.5$，在界限之外，而 $-1.5 \in (-\sqrt{3}, -1)$ 確實不在任何一個區間內。
- 在一個細密的網格上，以及在 $[-50, 50]$ 內的 2×10^5 個隨機點上測試不等式，結果處處與這兩個區間吻合，而在全部四個端點上，絕對值都等於 2。
- 在 (ii) 中，辛普森法則（Simpson's rule）給出 2.828427…，與 $2\sqrt{2} \approx 2.828427$ 相符；兩段的值分別是 $\sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$ 和 $\sqrt{2} + 1 \approx 2.4142$。作為合理性檢查，被積函數（integrand）最大為 $\sqrt{2}$，所以積分最大為 $\sqrt{2}\,\pi \approx 4.44$。

常見錯誤

- 把 $x + \frac{x-1}{x+1} < 2$ 的兩邊乘以 $x+1$ 而沒有考慮其正負，結果丟失了（或錯誤地包括了）$x = -1$ 左邊的區間。
- 只解 $f < 2$，或只解 $f > -2$：絕對值不等式要求兩者同時成立。
- 在 (ii) 中，直接在整個 $[0, \pi]$ 上對 $\cos x - \sin x$ 積分，得出 -2（絕對值的積分得出負數，是一個警號）。

STEP 之外

(i) 的竅門，是把一個代數不等式換成關於單調函數（monotonic function）的陳述：若 f 在某區間上嚴格遞增，則 $a < f(u) < b$ 恰好在 $f = a$ 與 $f = b$ 的兩點之間成立。要嚴格證明這一點，需要用到介值定理（intermediate value theorem），它是大學分析課程中最早出現的重要結果之一；而帶絕對值的不等式，例如 $|x - a| < \varepsilon$，正是該課程的日常語言。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析學入門書）親切易讀，兩者都可以

在書中見到。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 10 題

力學 • 功率與阻力

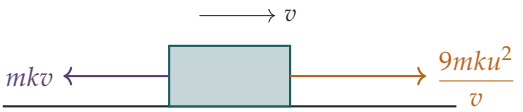
> **STEP I 樣本試卷，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q10

關鍵思路

功率（power）等於力乘以速率，所以以恆定功率 P 運作的機車，其牽引力（driving force）為 P/v。由牛頓第二定律（Newton's second law）便得到一條關於 v 的一階微分方程（first-order differential equation），而且可以分離變數（separation of variables）。關鍵在於選對加速度的形式：題目問時間時用 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，問距離時用 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$。

解答

把機車看成一個質量為 m 的質點（particle），在水平路軌上行駛，因此它的重量與法向反作用力（normal reaction）互相抵消，只需考慮水平方向的力。取運動方向為正。



最大速率

速率為 v 時，牽引力為 $9mku^2/v$，所以由牛頓第二定律得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{9mku^2}{v} - mkv \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{k\,(9u^2 - v^2)}{v}.$$

當 $v < 3u$ 時，右邊為正，所以機車會加速。只有在牽引力與阻力（resistance）平衡，即 $9u^2 = v^2$ 時，它才會停止加速。因此可能達到的最大速率為

$$v_{\max} = 3u.$$

想一想 只要 $v < 3u$，機車就一直在加速，那為甚麼它到不了 $3u$？

當 $v \to 3u$ 時，加速度會減小至零。分離變數後，由速率 v_1 加速至速率 v_2 所需的時間為

$$t = \frac{1}{k}\int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{9u^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - v_1^2}{9u^2 - v_2^2}\right),$$

而當 $v_2 \to 3u$ 時，這個時間趨向無限大。所以 $3u$ 是終端速率（terminal speed）：機車的速率可以任意接近它，卻永遠不會在有限時間內真正達到它。（換個說法，$v = 3u$ 是這條微分方程的一個平衡點（equilibrium），而根據解的唯一性（uniqueness of solutions），從它下方出發的解不可能到達它。）

由 u 到 $2u$

在上面的公式中代入 $v_1 = u$ 和 $v_2 = 2u$：

$$t = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - u^2}{9u^2 - 4u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8u^2}{5u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8}{5}\right),$$

正是所求。

切斷動力

現在只剩下兩個阻力 mkv 和 mkB，兩者都與運動方向相反。我們要求的是距離，所以把加速度寫成 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$：

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -mk(v + B) \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{v + B}\,\mathrm{d}v = -k\,\mathrm{d}x.$$

寫成 $\dfrac{v}{v+B} = 1 - \dfrac{B}{v+B}$，然後積分，其中 v 由 $2u$ 下降至 0，而 x 由 0 增加至 D：

$$\begin{aligned} kD &= \int_0^{2u}\left(1 - \frac{B}{v+B}\right)\mathrm{d}v \\ &= \Big[v - B\ln(v+B)\Big]_0^{2u} \\ &= 2u - B\ln\left(\frac{2u+B}{B}\right). \end{aligned}$$

所以切斷動力後行駛的距離為

$$D = \frac{1}{k}\left[2u - B\ln\left(1 + \frac{2u}{B}\right)\right].$$

這一次機車確實會在有限時間內停下：$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -k(v+B) \le -kB < 0$，所以減速度（deceleration）永遠不會小於 kB。這正是需要額外加上一個恆定阻力的原因。

驗算

- 當 $B \to 0$ 時，$B\ln(1+2u/B) \to 0$，所以 $D \to 2u/k$。這與只有阻力 mkv 的情況吻合：此時 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = -kv$，即 v 隨距離以 k 的速率線性下降。
- $D > 0$，因為當 $y > 0$ 時 $\ln(1+y) < y$，由此得 $B\ln(1+2u/B) < 2u$。而且 D 隨 B 增大而減小，合乎預期。
- 數值上，取 $k = u = B = 1$，把運動方程逐步推算，得出停止距離為 0.90139，與 $2 - \ln 3 \approx 0.90139$ 吻合。由 $v = 1$ 起，把有動力的階段逐步推算至時間 $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} \approx 0.2350$，最後得 $v = 2.0000$。

常見錯誤

- 把牽引力當作常數。在恆定功率下，牽引力是 P/v，會隨機車加速而減小。
- 在最後一部分使用 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$。這樣求得的是停止所需的時間，而不是距離。
- 聲稱機車「最終」會達到 $3u$。時間積分是發散（diverge）的，所以它永遠達不到。

STEP 之外

速率 $3u$ 是自治方程（autonomous equation）$\dot{v} = f(v)$ 的一個穩定平衡點（stable equilibrium）。解會以指數方式趨近它，卻永遠不會與它相遇，因為性質良好的微分方程的解不可能相交或合併。這讓你初次領略唯一性定理（uniqueness theorem）和相線分析（phase-line analysis），兩者都是大學微分方程入門課程的內容。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）對這兩者都有講解。想進一步了解功率和阻力，可參考 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 11 題

力學 • 摩擦力與滾動接觸

STEP I 樣本試卷，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s1-q11

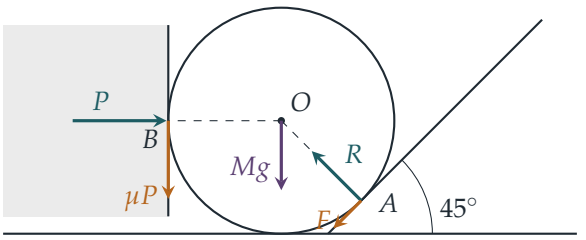
關鍵思路

在圓柱體即將移動的一刻，地面不再施力，因此只需考慮三個作用：重量、垂直面和斜面。「滾動」表示圓柱體在斜面上不打滑，所以它開始繞着與斜面的接觸點轉動。只要找出與垂直面接觸的那一點此時如何運動，便會發現圓柱體必須沿垂直面滑動。因此，摩擦力（friction）正是在那裏達到極限。再對圓心取力矩（moment），便可毫不費力地求得斜面的摩擦力。

解答

模型。圓柱體是半徑為 r 的均勻剛體（rigid body），我們在通過其中心 O 的垂直截面上處理這個問題。設備的面是垂直的，並沿水平方向移動。設 B 為圓柱體與該面的接觸點，它與 O 處於同一高度；A 為圓柱體與斜面的接觸點。由於斜面的傾角為 45°，OA 與向下的鉛垂線成 45°。取 x 軸向右（指向斜面），y 軸向上，並以 O 為原點，於是

$$B = (-r,\, 0), \qquad A = \tfrac{r}{\sqrt{2}}(1,\, -1).$$



哪一處的摩擦力達到極限

當圓柱體即將移動時，它正要離開地面，所以地面的法向反作用力（normal reaction）為零，地面的摩擦力亦隨之為零。要滾上斜面，圓柱體在 A 點必須不打滑，所以它的運動以繞 A 的轉動開始，而中心則沿 $(1,1)$ 方向向斜面上方移動。這個轉動是順時針方向的。設角速率（angular speed）為 ω，則圓柱體上一點 X 的速度等於 ω 乘以 $X-A$ 順時針旋轉 90° 後所得的向量，即把 $\omega\,(y,-x)$ 用於 $X-A=(x,y)$。對於 $X=B$，

$$B-A=r\Big(-1-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\quad\Longrightarrow\quad \mathbf{v}_B=\omega r\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\,1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

該面只作水平移動，但 B 的速度有向上的分量，所以 B 沿該面向上滑動。圓柱體不可能同時在兩個表面上滾動，所以它必定在垂直面上打滑，因此**摩擦力在垂直面上達到極限**。摩擦力與滑動方向相反，所以它作用於圓柱體的方向是向下，大小為 μP。在斜面上沒有打滑，所以斜面摩擦力 F 的大小由平衡（equilibrium）條件決定，只須滿足 $F\le \nu R$。（我們以 ν 表示斜面的摩擦系數（coefficient of friction），題目中印作 v。）

> ? **想一想** 為甚麼不可以是斜面上的摩擦力達到極限？

假如圓柱體在 A 點打滑，它便是沿斜面向上滑動，而不是滾動。滾動的意思就是在 A 點不打滑。上面的計算顯示，滾動必然導致 B 點打滑，所以 B 才是摩擦力達到法向反作用力的 μ 倍的接觸點。

求 P

設 R 為斜面的法向反作用力，沿 AO 方向（方向為 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$），並設 F 為斜面摩擦力，以沿斜面向下為正（方向為 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$）。

對 O 取力矩。重量、P 和 R 的作用線全部通過 O。B 點的摩擦力 μP 的力臂為 r，使圓柱體逆時針轉動。A 點的摩擦力 F 沿切線方向，所以力臂同樣為 r；當它指向斜面下方時，會使圓柱體順時針轉動。因此

$$\mu P\,r=Fr\quad\Longrightarrow\quad F=\mu P.$$

所以斜面摩擦力確實沿斜面向下，而且大小與垂直面上的摩擦力相同。

沿水平方向分解：

$$P-\frac{R}{\sqrt{2}}-\frac{\mu P}{\sqrt{2}}=0\quad\Longrightarrow\quad R=\sqrt{2}\,P-\mu P=P(\sqrt{2}-\mu).\tag{1}$$

沿垂直方向分解：

$$\frac{R}{\sqrt{2}}-\frac{\mu P}{\sqrt{2}}-\mu P-Mg=0.\tag{2}$$

把由 (1) 得出的 $R/\sqrt{2} = P - \mu P/\sqrt{2}$ 代入 (2)，

$$P - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \mu P = Mg$$
$$P\left(1 - \mu - \sqrt{2}\,\mu\right) = Mg,$$

其中用到 $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$。因此

$$P = \frac{Mg}{1 - \mu(1+\sqrt{2})},$$

正是所求的結果。

μ 和 ν 須滿足的條件

關於 μ。P 是推力的大小，而 $Mg > 0$，所以我們需要 $1 - \mu(1+\sqrt{2}) > 0$，即

$$\mu < \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1.$$

若 $\mu \geq \sqrt{2} - 1$，無論推力多大，都無法把圓柱體滾上斜面：垂直面上額外的向下摩擦力隨 P 增長的速度，至少與上升力的增長一樣快，於是圓柱體被卡死。

關於 ν。圓柱體在斜面上不打滑，所以 $F \leq \nu R$。利用 $F = \mu P$ 和 (1)，並留意到由於 $\mu < \sqrt{2} - 1 < \sqrt{2}$，故 $R > 0$，

$$\mu P \leq \nu P(\sqrt{2} - \mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \nu \geq \frac{\mu}{\sqrt{2} - \mu},$$

其中我們除以了 $P(\sqrt{2} - \mu) > 0$。至此全題完成。

驗算

- *光滑的面*，$\mu = 0$：此時 $P = Mg$，而且不需要斜面摩擦力。這與一個無摩擦的圓柱體楔在垂直牆壁與 45° 斜面之間的情況吻合：斜面反作用力的水平分量和垂直分量相等，所以它必須同等地平衡 P 和 Mg。
- *數值*：取 $\mu = 0.2$，則 $P \approx 1.934\,Mg$，而我們需要 $\nu \geq 0.165$。把這些數值代回去，水平方向的力、垂直方向的力以及對 O 的力矩全部平衡（在捨入誤差之內）；對隨機選取的 M 和 μ 亦然。
- 當 $\mu \to \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ 時，$P \to \infty$，這與上文所述的卡死現象一致。

常見錯誤

- 把斜面上的摩擦力當作達到極限。「滾動」已排除了該處打滑的可能。

- 保留了地面的反作用力。在即將滾上斜面的一刻，圓柱體正要離地，所以地面的反作用力為零。
- 弄錯垂直面上摩擦力的方向。B 相對於該面向上移動，所以作用於圓柱體的摩擦力是向下的。這正是 P 大於 Mg 的原因。

STEP 之外

本題的關鍵一步，是藉着觀察瞬時轉動中心（instantaneous centre of rotation）來判斷哪一個接觸點打滑，這正是剛體運動學（rigid-body kinematics）的起點。在大學一年級的課程中，它會引伸出一般法則 $\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (X - O)$，以及多個粗糙接觸點互相競爭的問題。在 $\mu \geq \sqrt{2} - 1$ 時出現的「卡死」現象，即怎樣加大推力也無濟於事，是一種自鎖（self-locking）效應，工程師會在楔子和夾具中刻意加以利用。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種嚴謹的態度處理剛體運動和摩擦力。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 12 題

力學 • 涉及摩擦力的碰撞

> **STEP I 樣本試卷，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q12

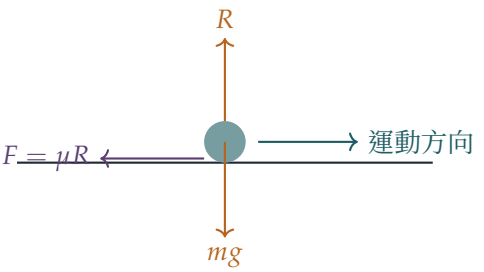
關鍵思路

這一題的主角是摩擦力（friction）。圓盤在水平冰面上滑行時，受到恆定的阻力，因此減速度（deceleration）不變，各事件之間的運動其實只是「勻加速運動」換了個面貌。我們由終點倒推回去：B 的停止距離決定了它在碰撞後的速率，碰撞定律把這個速率轉化為 A 在碰撞前一刻的速率，再用一次勻加速運動的公式，便可回到起點 O。

解答

模型

把每個圓盤視為質量為 m 的質點（particle），置於摩擦系數（coefficient of friction）為 μ 的粗糙水平面上。圓盤滑行時，所受的力有：向下的重量 mg、向上的法向反作用力（normal reaction）R，以及與運動方向相反的極限摩擦力（limiting friction）F。



沿垂直方向分解：垂直方向沒有加速度，所以 $R = mg$。圓盤正在滑動，故摩擦力達到極限值：$F = \mu R = \mu mg$。沿水平方向分解，$m\ddot{x} = -\mu mg$，所以每個滑行中的圓盤都以

恆定的減速度

$$a = \mu g,$$

減速，與其質量無關。我們又假設碰撞在瞬間完成，摩擦力在碰撞過程中來不及起作用；這時只需考慮兩圓盤之間的碰撞力，而沿 OC 方向的動量（momentum）守恆。

B 在碰撞後的速率

B 由距離 O 為 d 的一點出發，停在距離 O 為 $2d$ 的 C 點，所以它滑行的距離是 d。設它在碰撞後一刻的速率為 w。利用 $v^2 = u^2 + 2as$，其中末速率為 0，加速度為 $-\mu g$，位移為 d，

$$0 = w^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad w = \sqrt{2\mu g d},$$

這正是所要求的結果。

A 在碰撞前一刻的速率

設 A 以速率 u 撞向 B，並設 A 在碰撞後一刻的速度為 v_A（兩者均以 $O \to C$ 的方向為正）。由於兩圓盤質量同為 m，動量守恆（conservation of momentum）給出

$$mu = mv_A + mw \quad \Longrightarrow \quad u = v_A + w,$$

而牛頓（Newton）實驗定律給出

$$w - v_A = eu.$$

兩式相加可消去 v_A：$2w = (1+e)u$，所以

$$u = \frac{2w}{1+e} = \frac{2\sqrt{2\mu g d}}{1+e}.$$

（若改為兩式相減，則得 $v_A = \frac{1}{2}(1-e)u \geq 0$，所以 A 會以較慢的速率沿原來方向繼續前進。）

想一想 A 會不會再次追上 B，令以上的計算失效？

不會。碰撞之後，兩個圓盤都以相同的減速度 μg 減速，所以只要兩者仍在運動，它們的速率差 $w - v_A = eu$ 便保持不變。B 永遠不會比 A 慢，所以一直在前面；而 A 起步較慢，會先停下來。因此碰撞恰好只有一次，B 由 d 到 $2d$ 的一段路程不受干擾。（當 $e = 0$ 時，兩個圓盤一起運動直至停下，同樣不會再有碰撞。）

初速率

A 由 O 滑行距離 d 到達 B，期間以 μg 減速，所以再用一次 $v^2 = u^2 + 2as$，

$$u^2 = U^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad U^2 = u^2 + 2\mu g d.$$

代入 u 的表達式，

$$U^2 = \frac{4 \cdot 2\mu g d}{(1+e)^2} + 2\mu g d = \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}\left(4 + (1+e)^2\right)$$
$$= \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}\,(5 + 2e + e^2).$$

由於 $U > 0$ 且 $1 + e > 0$，取正平方根，

$$U = \frac{\sqrt{2\mu g d}}{1+e}\,(5 + 2e + e^2)^{\frac{1}{2}},$$

即為所求。

驗算

- 完全彈性（perfectly elastic），$e = 1$：兩個相同的圓盤會互換速度，所以 A 立即停下，而 B 則以 A 抵達時的速率 $u = w$ 離開。公式給出 $U = \sqrt{2}\,\sqrt{2\mu g d} = \sqrt{2\mu g (2d)}$，恰好是單獨一個圓盤滑完整段 $2d$ 到達 C 所需的速率。這很合理：動量原封不動地傳了過去。
- 完全非彈性（perfectly inelastic），$e = 0$：公式給出 $U = \sqrt{5}\,\sqrt{2\mu g d}$，比 $e = 1$ 時大，這是應有的結果，因為碰撞中有動能（kinetic energy）損失。更一般地，$(5 + 2e + e^2)/(1+e)^2 = 1 + 4/(1+e)^2$ 隨 e 增大而減小。
- 量綱（dimensions）：μ 和 e 都是純數，而 $\sqrt{gd}$ 是速率。
- 數值上，取 $\mu = 0.1$、$g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$、$d = 1\ \mathrm{m}$ 和 $e = 0.5$，公式給出 $U = \frac{7}{3} \approx 2.33\ \mathrm{m\,s^{-1}}$。由這個 U 出發，以細小的時間步長逐步推算運動（並隨機選取多組 μ、d 和 e），結果 B 停下的位置與 O 的距離和 $2d$ 相差不超過 0.001%。

常見錯誤

- 對碰撞前後使用能量守恆。除非 $e = 1$，否則碰撞中會有動能損失；碰撞時應使用動量和恢復定律（restitution law），而功能原理（work–energy，或 $v^2 = u^2 + 2as$）只可用於各事件之間。
- 忘記 A 在碰撞前同樣要滑行距離 d，誤寫成 $U = u$。
- 把恢復定律寫反了：應該是分離速率 $w - v_A$ 等於 e 乘以接近速率 u。

STEP 之外

這一題的巧妙之處，在於摩擦力令每個圓盤都有相同的減速度，與質量無關；因此在一個以 μg 減速的參考系（frame）中，只要兩個圓盤都在滑行，冰面便等同於沒有摩擦，而碰撞看起來就和教科書上的一模一樣。選取合適的參考系是大學本科力學的核心技巧，而摩擦定律 $F = \mu R$ 本身只是一個經驗模型，它的適用範圍值得了解。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對碰撞和摩擦都有細緻的處理。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 13 題

力學 • 圓周運動

STEP I 樣本試卷，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s1-q13

關鍵思路

這是一個弦線可以伸長的圓錐擺（conical pendulum）。胡克定律（Hooke's law）把張力（tension）與弦線的長度聯繫起來，而沿垂直和水平方向分解力，則把張力與 g 和 ω 聯繫起來。由於弦線與垂直線的夾角不為零，張力必須嚴格大於 mg，而兩個不等式都是由這一項事實推導出來的。

解答

把質點視為繫於一條輕彈性弦線（light elastic string）上的點質量，弦線遵從胡克定律，並且不計空氣阻力。設 λ 為彈性模量（modulus of elasticity）。

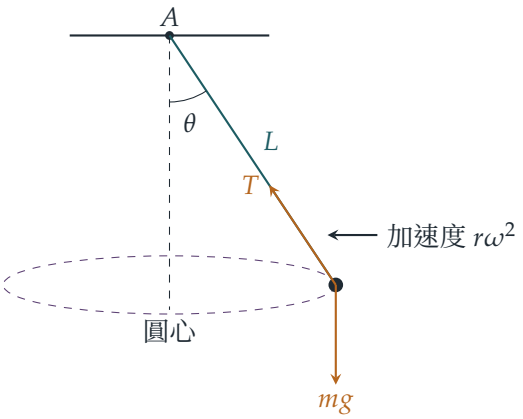
彈性模量。 質點靜止懸掛時，弦線的伸長量（extension）為 $2a - a = a$，而張力與重量平衡：

$$mg = \frac{\lambda a}{a} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = mg.$$

因此當弦線的長度為 L 時，其張力為

$$T = \frac{mg(L-a)}{a}.$$

圓周運動。 假設質點在 A 下方的一個水平圓上運動，長度為 L 的弦線與向下的垂直線成 θ 角。由於這是一個位於 A 所在水平之下的真正的圓周運動，我們有 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\theta > 0$ 且 $0 < \cos\theta < 1$。圓心在 A 的正下方，半徑為 $r = L\sin\theta$。



質點繞通過 A 的垂直線的角速率（angular speed）為 ω，所以它的加速度為 $r\omega^2 = L\omega^2 \sin\theta$，方向水平指向圓心。垂直方向沒有加速度。

沿垂直方向分解：

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

沿水平方向（指向圓心）分解：

$$T\sin\theta = mL\omega^2\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad T = mL\omega^2, \tag{2}$$

其中因為 $\sin\theta \neq 0$，我們可以除以 $\sin\theta$。

> **想一想** 「這是一個真正的圓周運動（而不只是質點靜止懸掛）」這項事實，在哪裏用到了？

它用到了兩次：在 (2) 中除以 $\sin\theta$，以及在下文指出 $\cos\theta < 1$。若 $\theta = 0$，質點只是靜止懸掛在軸上，(2) 沒有提供任何資訊，而任何 ω 都「行得通」。

弦線長於 $2a$。 由 (1)，因為 $0 < \cos\theta < 1$，

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} > mg.$$

利用胡克定律，這即是說

$$\frac{mg(L-a)}{a} > mg \quad\Longrightarrow\quad L - a > a \quad\Longrightarrow\quad L > 2a,$$

所以弦線被拉長至大於 $2a$ 的長度。

ω 的範圍。 把由胡克定律和由 (2) 得到的兩個 T 的表達式等同起來：

$$mL\omega^2 = \frac{mg(L-a)}{a} \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{g}{a}\left(1 - \frac{a}{L}\right).$$

由於 $L > 2a$，我們有 $0 < \frac{a}{L} < \frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2} < 1 - \frac{a}{L} < 1$。因此

$$\frac{g}{2a} < \omega^2 < \frac{g}{a},$$

這正是我們要證明的結果。

逆命題（converse）（題目沒有要求，但令人安心）。 若 ω 位於這個範圍內，取 $L = \dfrac{a}{1 - a\omega^2/g}$。它是正數，滿足 $L > 2a$，並給出 $\cos\theta = \dfrac{mg}{T} = \dfrac{a}{L-a}$，其值嚴格介乎 0 與 1 之間。所以對於每一個這樣的 ω，確實存在一個圓錐運動。

驗算

- 極限：當 $L \to 2a$ 時，張力趨向 mg，$\theta \to 0$ 且 $\omega^2 \to g/(2a)$，這正是長度為 $2a$ 的單擺（simple pendulum）作小幅擺動的頻率。當 $L \to \infty$ 時，$\omega^2 \to g/a$。
- 數值方面：取 $\omega^2 = \frac{3}{4}\,g/a$，我們得到 $L = 4a$、$T = 3mg$ 和 $\cos\theta = \frac{1}{3}$。從這些初始條件出發，以數值方法逐步求解完整的三維運動方程，計算兩周，質點始終留在所預測的圓上，誤差不超過 10^{-13} 個單位。
- 單位：g/a 的單位是 s^{-2}，與 ω^2 應有的單位相符。

常見錯誤

- 把圓的半徑當作 L 而不是 $L\sin\theta$。這樣 (2) 中的 $\sin\theta$ 便無法約去。
- 忘記了 $T > mg$ 需要 $\cos\theta < 1$，即 $\theta \neq 0$。嚴格不等式正是取決於這一點。
- 以自然長度（natural length）a（或平衡時的長度 $2a$）而不是拉長後的長度 L 作為半徑。

STEP 之外

下限 $\omega^2 = g/(2a)$ 是繞垂直線作小幅振動的頻率，而這並非巧合：靠近軸的穩定圓錐運動，其實就是兩個互相垂直的小幅擺動，彼此相位相差四分之一個周期。上限則是弦線的剛度（stiffness）無論伸長多少都再也無法提供向心力（centripetal force）之處。研究穩定運動及其穩定性（stability），例如探討質點被輕輕推離圓形軌道後會發生甚麼事，是大學一年級動力學的標準課題。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對圓錐擺以及旋轉系統中運動的分析，有細緻的論述。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 14 題

概率與統計 • 期望值

STEP I 樣本試卷，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s1-q14

關鍵思路

一切都取決於一個表：兩顆公平四面骰子點數總和的分佈（distribution）。有了這個表，無論猜哪個 x，期望收益（expected gain）都只是「獎金乘以勝出的機會，減去罰款乘以落敗的機會」。有趣的矛盾在於：猜大的數字獎金高，但機會小，所以要把所有猜測逐一比較，才看得出哪個最好。

解答

設 S 為總點數。每顆骰子擲出 $1,2,3,4$ 的概率（probability）各為 $\frac{1}{4}$，而且兩顆骰子互相獨立（independent），所以 16 個有序對（ordered pairs）出現的可能性均等。數出每個總和對應的有序對數目，得

s	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{P}(S=s)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

（例如，$S=5$ 來自 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$）。

若 B 猜 x，並設 $p=\mathrm{P}(S=x)$，則他的收益 G（以便士計）有 p 的概率為 $100x^2$，有 $1-p$ 的概率為 $-50x$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(G) &= 100x^2p - 50x(1-p)\\ &= 50x\big[(2x+1)p-1\big].\end{aligned}$$

寫成 $p=\frac{k}{16}$，其中 k 是得出總和 x 的方法數目，則

$$\mathrm{E}(G)=\frac{25x\big[k(2x+1)-16\big]}{8}.$$

第 (i) 部分

只有 $(4,4)$ 的總和是 8，所以 $p = \frac{1}{16}$，而

$$\mathrm{E}(G) = 6400 \cdot \frac{1}{16} - 400 \cdot \frac{15}{16} = 400 - 375 = 25,$$

因此 B 猜 8 時的期望收益是 25 便士，正如題目所求。

第 (ii) 部分

猜 $2, 3, \ldots, 8$ 以外的數永遠不會勝出，所以（取 x 為正數，因為點數必為正數）只會輸錢。對於七個可能的總和，上面的公式給出

x	2	3	4	5	6	7	8
k	1	2	3	4	3	2	1
$\mathrm{E}(G)$（便士）	−68.75	−18.75	137.5	437.5	431.25	306.25	25

例如，當 $x = 5$ 時：$\mathrm{E}(G) = \frac{25 \cdot 5\,(4 \cdot 11 - 16)}{8} = \frac{125 \cdot 28}{8} = 437.5$。

想一想 獎金按 x^2 的速度增長，那麼為甚麼猜 7 或 8 這樣的大數並不是最好？

獎金確實增長得很快，但勝出的機會在 5 的兩側逐漸下降，而猜錯的可能性大得多，一旦猜錯就要付罰款。在 $x = 8$ 時，勝出的機會已跌至 $\frac{1}{16}$，幾乎剛好抵銷了高額獎金。這兩種效應在中間附近取得最佳平衡：$x = 6$ 的獎金比 $x = 5$ 高，但勝出的方法只有三種而不是四種，結果僅僅稍遜一籌。

所以我們建議 B 猜 $\boxed{x = 5}$，期望收益為 437.5 便士，即每局 £4.375（約 £4.38）。

驗算

- 表中各概率之和為 $\frac{16}{16} = 1$。
- 第 (i) 部分的結果剛好是 25，印證了分佈表和公式。
- 模擬 400 000 局猜 5 的遊戲，平均收益約為 437.2 便士，而準確值是 437.5。

常見錯誤

- 把總和 2 至 8 當作可能性均等：其實不然，因為可能性均等的結果是那 16 個有序對。
- 忘記 B 是以 $1 - p$ 的概率輸掉 $50x$，而不是以概率 1 輸掉。
- 因為獎金較高，就停在 $x = 6$ 或 $x = 7$：5 和 6 的結果很接近，所以每個值都必須計算。

STEP 之外

這是一個小型的決策問題：選擇令期望回報最大的行動。在大學裏，同樣的想法會在決策論（decision theory）中出現，也會在研究獨立隨機變量（random variables）之和時出現；在後者，和的分佈是用卷積（convolution）求出的（在這裏就是分佈表的三角形狀），而當骰子數目很多時，根據中心極限定理（central limit theorem），這個分佈會趨近正態曲線（normal curve）。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）涵蓋了這兩個課題。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 15 題

概率與統計 • 隨機變量之和

> **STEP I 樣本試卷，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q15

關鍵思路

C 這個看似古怪的分佈，其實正是把一個價錢四捨五入至最接近的 10 便士時所產生的誤差，前提是價錢的最後一位數字等可能地取 $0, 1, \ldots, 9$ 中任何一個。於是，購物者的總誤差就是 36 個獨立而與 C 同分佈的變量之和，其平均值和方差（variance）可立即求得，而中心極限定理（Central Limit Theorem）則告訴我們，20 便士的差額有多令人意外。

解答

C 的期望值與方差

由於對每個 i 都有 $\mathrm{P}(C = i) = \mathrm{P}(C = -i)$，這個分佈關於 0 對稱。因此各項 $i\,\mathrm{P}(C = i)$ 兩兩抵消，得

$$\mathrm{E}(C) = 0.$$

（各概率之和確實是 $1 : 9 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{20} = 1$。）既然平均值是 0，方差就只是 $\mathrm{E}(C^2)$：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(C) = \mathrm{E}(C^2) &= 2 \cdot \frac{25}{20} + \frac{2}{10}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{2 \cdot 30}{10} = \frac{17}{2}.\end{aligned}$$

購物者的估算

模型。 對於一件貨品，設 C 為實際價錢減去捨入後的價錢，以便士為單位。它只取決於價錢的最後一位數字 d。我們假設 d 等可能地取 $0, 1, \ldots, 9$ 中任何一個；在這裏，「隨機」選購理應是這個意思，不過這畢竟是對現實價錢所作的一個假設。

- $d = 0$：無須捨入，所以 $C = 0$。
- $d = 1, 2, 3, 4$：價錢向下捨入了 d，所以 $C = d$。
- $d = 6, 7, 8, 9$：價錢向上捨入了 $10 - d$，所以 $C = -(10 - d)$，即 $-4, -3, -2, -1$。
- $d = 5$：價錢以相等的概率向下或向上捨入，所以 $C = 5$ 或 -5，各自的概率為 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$。

$-4, \ldots, 4$ 中每個值都恰好由一個數字產生，概率為 $\frac{1}{10}$，而 ± 5 的概率各為 $\frac{1}{20}$。這正正是第一部分的分佈，題目如此設定的原因也在於此。

總誤差。 設 $C_1, \ldots, C_{36}$ 為 36 件貨品各自的誤差，並設

$$S = C_1 + C_2 + \cdots + C_{36}$$

為真正的賬單金額減去購物者的估算。由於貨品是隨機選購的，我們視各個 C_j 為獨立（independent），且每個都與 C 同分佈。於是

$$\mathrm{E}(S) = 36 \cdot 0 = 0, \qquad \mathrm{Var}(S) = 36 \cdot \tfrac{17}{2} = 306,$$

其中計算方差時用到了獨立性。因此 S 的標準差（standard deviation）是 $\sqrt{306} \approx 17.5$ 便士。

> **想一想** 20 便士的差額算大還是算小？

這個差額必須與標準差比較，而不是與單次捨入誤差的大小比較。收銀員的賬單比估算高出 20 便士，即 $S = 20$。這比平均值高出

$$\frac{20}{\sqrt{306}} \approx 1.14$$

個標準差。由於 S 是 36 個獨立同分佈變量之和，中心極限定理指出 S 近似服從 $\mathrm{N}(0, 306)$。採用連續性校正（continuity correction）（因為 S 只取整數值），

$$\mathrm{P}(S \geq 20) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{19.5}{\sqrt{306}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1.11) \approx 0.13,$$

其中 $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$。至少這麼大的誤差（不論方向）大約有 26% 的機會出現。

所以購物者**不**應懷疑賬單出錯。20 便士的差額完全在她的捨入誤差的正常波動範圍之內，大約是一個標準差，而且大約每七、八次購物就會出現一次。只有差額超過大約兩個標準差，例如 35 便士或以上，她才有真正的理由起疑。

驗算

- 把價錢四捨五入至最接近的 10 便士，最多只會令它改變 5 便士，所以 36 件貨品在最壞情況下的誤差是 180 便士。典型誤差約為 17 便士，遠小於此，這也合乎預期：正誤差與負誤差大致互相抵消。
- 電腦驗證了捨入誤差的分佈與 C 完全相同，且 $\mathrm{E}(C) = 0$、$\mathrm{Var}(C) = \frac{17}{2}$。接着它以分數對 36 個相同的分佈作精確卷積（convolution）：$\mathrm{Var}(S) = 306$，$\mathrm{P}(S \geq 20) \approx 0.1330$；相比之下，正態近似（normal approximation）給出 0.1325，而 2×10^5 次模擬購物則給出 0.132。

常見錯誤

- 把 $\mathrm{Var}(S)$ 當作 $36^2\,\mathrm{Var}(C)$。那其實是 $36C$ 的方差，即同一個誤差重複 36 次；對於獨立的誤差，方差只須直接相加。
- 以 S 恰好等於 20 的概率（約 0.012）來衡量意外的程度。S 的每一個個別取值本身都相當不可能出現；真正重要的，是誤差至少與觀察所得一樣大的概率。
- 忘記說明所作的假設：價錢的最後一位數字服從均勻分佈（uniform distribution），而且各件貨品的誤差互相獨立。

STEP 之外

這就是假設檢驗（hypothesis test）背後的推理：先假定一切正常（在這裏，即 S 純粹是捨入誤差），然後問：出現至少與觀察所得同樣極端的結果，可能性有多大？同樣的捨入誤差分析也用於數值分析（numerical analysis），在那裏，對許多數字作捨入所產生的誤差，通常隨數字個數的平方根增長，而非線性增長。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論入門）對隨機變量（random variable）之和及中心極限定理有清晰的講解。

詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 16 題

概率與統計 • 連續隨機變量

STEP I 樣本試卷，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s1-q16

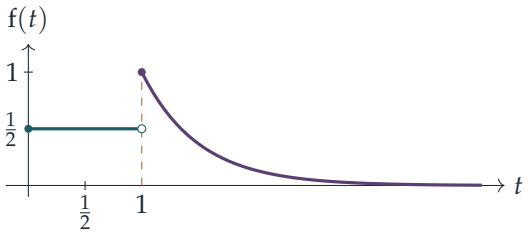
關鍵思路

未知數 k 由「總概率為 1」這一事實決定，其餘各項只要把密度函數的兩段分開積分便可得出。至於費用，竅門是把連續變量 T 化為離散變量：硬幣的數目只取決於已過了多少個完整的半分鐘，所以我們需要求 T 落在每個半分鐘區間內的概率。餘下的工作交給一個幾何型的級數便可完成。

解答

求 k 及平均值

密度函數在 $[0,1)$ 上是高度為 $\frac{1}{2}$ 的水平線段，其後接上一條指數尾部（exponential tail），並在 $t=1$ 處有一個跳躍。



第一段貢獻的概率為 $\frac{1}{2}$，所以尾部必須貢獻餘下的 $\frac{1}{2}$：

$$k\int_1^\infty \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = k\left[-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_1^\infty = \tfrac{1}{2}k\mathrm{e}^{-2} = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad k = \mathrm{e}^2.$$

（因此在 $t \geq 1$ 上的密度函數為 e^{2-2t}，它在 $t=1$ 處等於 1，與草圖相符。）

至於平均值，取 $u = t$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ 作分部積分（integration by parts）：

$$\int_1^\infty t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \Big[-\tfrac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-2t}\Big]_1^\infty + \tfrac{1}{2}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} + \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} = \tfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-2},$$

其中用到當 $t \to \infty$ 時 $t\,\mathrm{e}^{-2t} \to 0$。因此

$$\mathrm{E}(T) = \int_0^1 \tfrac{1}{2}t\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^2 \cdot \tfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-2} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} = 1,$$

所以通話時間的期望值（expected value）是一分鐘，正如題目所求。

累積分佈函數

記 $\mathrm{F}(t) = \mathrm{P}(T \le t)$，即累積分佈函數（cumulative distribution function）。當 $t < 0$ 時它等於 0；當 $0 \le t < 1$ 時它等於 $\int_0^t \frac{1}{2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}t$；而當 $t \ge 1$ 時，

$$\mathrm{F}(t) = \tfrac{1}{2} + \int_1^t \mathrm{e}^{2-2s}\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\big(1 - \mathrm{e}^{2-2t}\big) = 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-2t}.$$

所以

$$\mathrm{F}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \frac{1}{2}t & 0 \le t < 1, \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2-2t} & t \ge 1. \end{cases}$$

留意雖然 f 在 $t = 1$ 處有跳躍，F 在該處卻是連續的（兩條公式都給出 $\frac{1}{2}$），而且當 $t \to \infty$ 時 $\mathrm{F}(t) \to 1$。下文會用到這個形式：當 $t \ge 1$ 時，$\mathrm{P}(T > t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2-2t}$。

費用的期望值

通話開始時投入一枚硬幣，其後每過完一個半分鐘再投入一枚。所以若通話歷時 T 分鐘，完整的半分鐘數目為 $\lfloor 2T \rfloor$，而

$$C = 10\big(1 + \lfloor 2T \rfloor\big).$$

（若通話恰好在某個半分鐘的整點結束，那一刻有沒有投入硬幣並不要緊：T 是連續的，所以這種情況的概率為 0。）

> **想一想** 怎樣由連續的 T 得出 C 的分佈？

事件 $C = 10(n+1)$ 正正就是事件 $\frac{n}{2} \le T < \frac{n+1}{2}$，其概率可直接由 F 讀出：

- $n = 0$：$\mathrm{P}(C = 10) = \mathrm{F}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$；
- $n = 1$：$\mathrm{P}(C = 20) = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$；

- $n \geq 2$：兩個端點都不小於 1，所以

$$\mathrm{P}\big(C = 10(n+1)\big) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-n} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-(n+1)} = \tfrac{1}{2}\big(1-\mathrm{e}^{-1}\big)\mathrm{e}^{2-n}.$$

設 $r = \mathrm{e}^{-1}$ 及 $m = n-2$，則 $\mathrm{e}^{2-n} = r^m$ 而 $10(n+1) = 10(m+3)$。於是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C) &= 10\cdot\tfrac{1}{4} + 20\cdot\tfrac{1}{4} + \sum_{m=0}^{\infty} 10(m+3)\cdot\tfrac{1}{2}(1-r)\,r^m \\ &= \tfrac{15}{2} + 5(1-r)\left(\sum_{m=0}^{\infty} m r^m + 3\sum_{m=0}^{\infty} r^m\right).\end{aligned}$$

由於 $0 < r < 1$，由幾何級數（geometric series）得 $\sum r^m = \dfrac{1}{1-r}$，把它逐項求導（再乘以 r）便得 $\sum m r^m = \dfrac{r}{(1-r)^2}$。因此

$$\mathrm{E}(C) = \tfrac{15}{2} + 5(1-r)\left(\frac{r}{(1-r)^2} + \frac{3}{1-r}\right) = \tfrac{15}{2} + \frac{5r}{1-r} + 15.$$

最後，$\dfrac{r}{1-r} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$，所以

$$\mathrm{E}(C) = 22\tfrac{1}{2} + \frac{5}{\mathrm{e}-1},$$

正如題目所求。其數值約為 25.41 便士。

評論

若按每分鐘 20 便士計算，平均長度為一分鐘的通話平均應花費 20 便士，但 $\mathrm{E}(C) \approx 25.4$。出現這個差距，是因為那人要為每個半分鐘預先付款：每枚硬幣買下完整的半分鐘，但最後一枚幾乎從來不會用盡。事實上，由於 $\lfloor 2T \rfloor > 2T - 1$，每一次通話都有 $C = 10(1 + \lfloor 2T \rfloor) > 20T$；費用把通話長度向上捨入至下一個半分鐘，所以 $\mathrm{E}(C)$ 比 $20\,\mathrm{E}(T)$ 多出的數額，等於已付款而未用的時間的期望值的二十倍（在這裏約為 5.4 便士）。

驗算

- C 的各個概率之和為 1：$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \sum_{m\geq 0} \frac{1}{2}(1-r)r^m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$。
- 由界限 $20T < C \leq 20T + 10$ 得 $20 < \mathrm{E}(C) \leq 30$，而 25.41 穩妥地落在其中。假如最後一個半分鐘內未用的時間是均勻分佈（uniform distribution）的，我們會預期多付約 5 便士；長尾令這個數額稍為多一點。
- 數值上，辛普森法則（Simpson's rule）給出總概率為 1、平均值為 1；另外模擬 10^6 次通話（一半在 $[0,1)$ 上均勻分佈，一半為 1 加上率為 2 的指數分佈），所得平均費用為 25.41 便士，與 $22.5 + 5/(\mathrm{e}-1) = 25.4099$ 吻合。

常見錯誤

- 把硬幣數目當作 $\lfloor 2T \rfloor$ 而非 $1 + \lfloor 2T \rfloor$，忘記了開始時投入的那一枚；這樣答案會剛好少了 10 便士。
- 在 $t = \frac{1}{2}$ 處套用 F 在 $t \geq 1$ 時的公式：區間 $[0, \frac{1}{2})$ 和 $[\frac{1}{2}, 1)$ 必須用均勻分佈的那一段來處理。

STEP 之外

留意 T 的尾部具有無記憶性（memoryless property）：已知 $T \geq 1$ 時，剩餘時間 $T - 1$ 服從率為 2 的指數分佈，這正是 $n \geq 2$ 時各個概率構成幾何數列（geometric sequence）的原因。記 $N = \lfloor 2T \rfloor$，則尾和公式（tail-sum formula）$\mathrm{E}(N) = \sum_{n \geq 1} \mathrm{P}(N \geq n)$ 能更快地得出相同的答案。像這樣混合了離散與連續特性的分佈，在 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction* 中有仔細的論述，而 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability* 則載有更多關於無記憶性的例子。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 1 題

純數學 • 部分分式

> **STEP II 樣本試卷，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q1

關鍵思路

在動用慣常的部分分式 (partial fractions) 那一套方法之前，先看看分子：它正正就是分母的導數（derivative）。由於分母可以分解為線性因式的乘積，f 是一個對數導數（logarithmic derivative），而乘積的對數導數等於各因式的對數導數之和。至於第二部分，方程變成三個單位分數（unit fractions）之和等於 1，單憑大小的考慮就足以迫使 x 非常小。

解答

部分分式

分母可以因式分解：

$$D(x) = x^3 + (a+b)x^2 + abx = x\big(x^2 + (a+b)x + ab\big) = x(x+a)(x+b),$$

求導後得

$$D'(x) = 3x^2 + 2(a+b)x + ab,$$

這恰好就是分子。所以 $\mathrm{f}(x) = D'(x)/D(x)$。

一般情況，$a \neq b$。三個因式 x、$x+a$、$x+b$ 互不相同（因為 $a \neq 0$、$b \neq 0$ 及 $a \neq b$），所以我們預期會有三個簡單的部分分式。利用積法則（product rule），

$$D'(x) = (x+a)(x+b) + x(x+b) + x(x+a),$$

再逐項除以 $D(x) = x(x+a)(x+b)$，得

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}} \qquad (a \neq b).$$

（等價地，$\mathrm{f}(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x(x+a)(x+b)|$，而乘積的對數可拆成和。）當然，掩蓋法（cover-up rule）也會得出同樣的結果：在 $x=0$ 處留數（residue）為 $ab/(ab)=1$，在 $x=-a$ 處則為 $\big(3a^2-2a^2-2ab+ab\big)/\big((-a)(b-a)\big) = a(a-b)/\big(a(a-b)\big) = 1$，在 $x=-b$ 處亦同理。

> **想一想** 當 $a=b$ 時，這個形式會出甚麼問題？

特殊情況，$a=b$。這時分母是 $x(x+a)^2$，帶有一個重複因式（repeated factor），所以標準形式應為 $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+a}+\frac{C}{(x+a)^2}$。但分子同樣有因式 $x+a$：

$$3x^2+4ax+a^2=(3x+a)(x+a),$$

所以它可以約去，剩下

$$\mathrm{f}(x)=\frac{3x+a}{x(x+a)}=\boxed{\frac{1}{x}+\frac{2}{x+a}} \qquad (a=b),$$

其中最後一步用了掩蓋法（$x=0$ 給出 $a/a=1$；$x=-a$ 給出 $-2a/(-a)=2$）。式中根本沒有 $(x+a)^{-2}$ 項，所以 $C=0$。這與把 b 換成 a 後的一般公式一致，但值得留意的是，重複因式是消失了，而不是產生一個平方項。

由於 a 和 b 均不為零，因式 x 永遠不會與 $x+a$ 或 $x+b$ 重合，所以只有以上這些情況。

當 $\mathrm{f}(x)=1$ 時

現在設 x、a、b 為正整數。在上述兩種情況中（$a=b$ 的公式不過是一般公式取 $b=a$），

$$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b},$$

而三項全為正數。因為 $a,b\geq 1$，後兩項各自嚴格小於 $\frac{1}{x}$。

> **想一想** 如果三個各不超過 $\frac{1}{x}$ 的分數加起來等於 1，x 最大可以是多少？

- 若 $x=1$，則 $\mathrm{f}(x)=1+(\text{正數})>1$。
- 若 $x\geq 4$，則 $\mathrm{f}(x)<\frac{3}{x}\leq\frac{3}{4}<1$。
- 若 $x=3$，則 $x+a\geq 4$ 及 $x+b\geq 4$，所以 $\mathrm{f}(x)\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{6}<1$。

所以 $\mathrm{f}(x)=1$ 迫使 $x=2$，這時我們需要

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}=\frac{1}{2}.$$

兩邊乘以 $2(2+a)(2+b)$ 得 $2(2+b)+2(2+a)=(2+a)(2+b)$，即 $8+2a+2b=4+2a+2b+ab$，所以

$$ab=4.$$

由於 a、b 為正整數，僅有的可能是 $(a,b)=(1,4)$、$(2,2)$、$(4,1)$。因此 $\mathrm{f}(x)=1$ 恰好在以下情況成立：

$$(x,a,b)=(2,1,4),\quad (2,2,2),\quad (2,4,1),$$

這是有限個（三個）值，正如題目所求。注意 $(2,2,2)$ 屬於特殊情況 $a=b$：$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=1$。

驗算

這三個解就是我們熟悉的單位分數恆等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ 和 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$。數值方面，我們以精確的有理數運算，在 2000 個隨機有理點上把部分分式形式與原來的 f 作比較（$a\neq b$ 和 $a=b$ 兩種情況都有），另外對所有 $1\le x,a,b<200$ 作窮舉搜尋，結果恰好找到上述三組數，再無其他。

常見錯誤

- 在 $a=b$ 的情況中帶着 $\frac{C}{(x+a)^2}$ 項埋頭硬算，卻沒有留意到可以約分；你應該得出 $C=0$，而看出分子中的因式 $(x+a)$ 就可以省卻這番工夫。
- 忘記排除 $x=1$ 和 $x=3$；粗略的上界 $\mathrm{f}<3/x$ 只能處理 $x\ge 4$。
- 停在「$ab=4$」而沒有列出各個解，或者只列出 $(1,4)$ 而遺漏 $(4,1)$ 和 $(2,2)$。

STEP 之外

恆等式 $D'/D=\sum 1/(x-r_i)$（其中 r_i 是多項式 D 的根，重根按重數計算）用途極廣：它是關於根的冪和的牛頓恆等式（Newton's identities）的基礎，在複分析（complex analysis）中又是輻角原理（argument principle）的基礎；輻角原理藉着沿一條曲線對 f'/f 積分，數出函數在曲線內的零點數目。像 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ 這類求正整數解的方程屬於埃及分數（Egyptian fraction）問題，是丟番圖方程（Diophantine equations）中一個經典的角落，在那裏像我們這樣的估界論證就足以解決整個問題。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 對輻角原理有優美的幾何闡述，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 則是入門丟番圖方程的好起點。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 2 題

純數學 • 對稱聯立方程

> **STEP II 樣本試卷，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q2

關鍵思路

三條方程具有循環（cyclic）對稱性，所以很自然會把它們兩兩相減，而每個差都可以因式分解（factorise），並以 $x+y+z$ 為公因式（common factor）。接下來，各差的平方和有雙重用途：以 x、y、z 表示時，它是 $a+b+c$ 的倍數；而第一個結果則可把它用 $a-b$、$b-c$、$c-a$ 和 $x+y+z$ 表示。一旦知道 $x+y+z$ 和兩兩之差，餘下的工作只需解三條線性方程（linear equations）便可完成。

解答

相等的比

把第一條方程減去第二條方程：

$$\begin{aligned} a-b &= x^2-y^2-yz+zx \\ &= (x-y)(x+y)+z(x-y) \\ &= (x-y)(x+y+z). \end{aligned}$$

用完全相同的方法（或作循環代換 $x \to y \to z \to x$，$a \to b \to c \to a$），可得

$$b-c=(y-z)(x+y+z), \qquad c-a=(z-x)(x+y+z).$$

設 $S=x+y+z$。由於 $a \neq b$，乘積 $(x-y)S$ 不等於零，所以 $S \neq 0$（同理，x、y、z 互不相等）。因為 a、b、c 互不相等，我們可以除以 $a-b$、$b-c$、$c-a$ 以及 S，得出

$$\frac{y-z}{b-c}=\frac{z-x}{c-a}=\frac{x-y}{a-b}=\frac{1}{x+y+z},$$

這正是所要證明的結果。

求 $x+y+z$

把題目提示的和展開：

$$\begin{aligned}(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2 &= 2\big(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\big)\\ &= 2\big[(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)\big]\\ &= 2(a+b+c).\end{aligned}$$

另一方面，由第一部分可知 $y-z=(b-c)/S$，其餘類推，所以同一個和亦等於

$$\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{S^2}=\frac{2\big(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\big)}{S^2}.$$

令兩個表達式相等，再除以 $2(a+b+c)$（因為 a、b、c 均為正數，所以它是正數），得

$$S^2=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{a+b+c}.$$

因此 $x+y+z=\triangle$，其中 $\triangle^2$ 就是上述的量，這正是所要證明的結果。注意 $\triangle^2>0$，因為它的分子是 $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ 的一半，而當 a、b、c 互不相等時，這個和是正數。所以有兩個可能，即 $\triangle=\pm\sqrt{\triangle^2}$，而到目前為止，沒有任何條件能從中選定其一。

解方程

現在我們知道

$$x+y+z=\triangle,\qquad x-y=\frac{a-b}{\triangle},\qquad x-z=\frac{a-c}{\triangle}.$$

把三式相加，得

$$3x=\triangle+\frac{2a-b-c}{\triangle}=\frac{\triangle^2+2a-b-c}{\triangle}.$$

這個式子可以化簡得很漂亮。設 $s=a+b+c$ 和 $Q=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$，於是 $\triangle^2=Q/s$。那麼

$$\begin{aligned}s\big(\triangle^2+2a-b-c\big) &= Q+(a+b+c)(2a-b-c)\\ &= \big(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\big)+\big(2a^2+ab+ca-b^2-c^2-2bc\big)\\ &= 3\big(a^2-bc\big).\end{aligned}$$

因此 $x=\dfrac{a^2-bc}{s\triangle}$，而 y、z 可由循環代換得出。現在 $(s\triangle)^2=sQ=a^3+b^3+c^3-3abc$，這是根據以下的標準因式分解：

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\big(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\big).$$

設 $K = \sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc} > 0$，則 $s\triangle = \pm K$，而方程組的解為

$$(x,y,z) = \pm\frac{1}{K}\left(a^2-bc,\ b^2-ca,\ c^2-ab\right),$$

其中三個分量取相同的正負號。

> **想一想** 我們只證明了任何解都必定是這個形式。這兩組真的都是解嗎？

是的。以上所有步驟只是一連串的推論，所以我們應該把結果代回原方程驗證。由於方程中只出現未知數的平方和兩個未知數的乘積，整體的正負號並無影響，而

$$\begin{aligned}(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab) &= a^4-2a^2bc+b^2c^2-\left(b^2c^2-ab^3-ac^3+a^2bc\right)\\ &= a\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right) = aK^2.\end{aligned}$$

除以 K^2 便得 $x^2-yz=a$；另外兩條方程可由循環代換得出。所以方程組恰好有兩組解，其中一組是另一組的相反數。

驗算

- 取 $a=1$，$b=2$，$c=3$。那麼 $a^3+b^3+c^3-3abc=18$，$K=3\sqrt{2}$，而取正號的解是 $(x,y,z)=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-5,1,7)$。例如 $x^2-yz=\frac{25-7}{18}=1$，以及 $x+y+z=\frac{1}{\sqrt{2}}$，其平方為 $\frac{1}{2}=\frac{14-11}{6}=\triangle^2$。
- 以電腦測試了 20,000 組隨機選取、互不相等的正數 a、b、c，並且兩種正負號都測試過：公式滿足全部三條方程以及相等的比，相對誤差小於 10^{-11}。

常見錯誤

- 只取 $\triangle$ 的正平方根：題目中的 $\triangle$ 只是透過 $\triangle^2$ 來定義，而兩種正負號都給出真正的解。
- 除以 $x+y+z$ 時沒有說明它為何不等於零。在這裏，這是由 $a\neq b$ 推出的。

STEP 之外

恆等式 $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 是以 (a,b,c)、(c,a,b)、(b,c,a) 為各行的循環矩陣（circulant matrix）的行列式（determinant），而它在複數（complex numbers）範圍內可以完全分解為 $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$，其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$。事實上，映射 $(x,y,z)\mapsto(x^2-yz,\ y^2-zx,\ z^2-xy)$ 就是循環矩陣的伴隨矩陣（adjugate），這解釋了為何它那麼容易求逆。循環矩陣及其特徵向量

（eigenvectors）是初次接觸離散傅立葉變換（discrete Fourier transform）的一個平易入門；想進一步了解，Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教科書）是很好的讀物。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 3 題

純數學 • 棣美弗定理

> **STEP II 樣本試卷，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q3

關鍵思路

棣莫弗定理（De Moivre's theorem）用數學歸納法（induction）證明最為自然：根據複角公式（compound-angle formulae），每多乘一個因子 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，角度就增加 θ。至於那兩條方程，$\cos ky$、$\sin ky$ 伴隨着 x^k 出現，這個規律分明在提示「實部（real part）與虛部（imaginary part）」。設 $z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$，把第一條方程看成一條複數方程的實部，第二條看成它的虛部，這對方程便化為 z 的一條三次方程（cubic），而且有一個容易找到的根。

解答

棣莫弗定理

我們對 n 用歸納法。當 $n = 1$ 時，兩邊都是 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，所以結果成立。

假設結果對某個 $n = k \geq 1$ 成立。則

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + \mathrm{i}(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta + \mathrm{i}\sin(k+1)\theta,\end{aligned}$$

其中第一行用了歸納假設（induction hypothesis），第二行用了 $\mathrm{i}^2 = -1$，第三行用了 $\cos(A+B)$ 和 $\sin(A+B)$ 的複角公式。所以結果對 $n = k+1$ 成立，由歸納法可知，結果對所有正整數 n 都成立。

解方程

設 x 和 y 為實數，並令

$$z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

由棣莫弗定理，對 $n = 1, 2, 3$，

$$z^n = x^n(\cos y + \mathrm{i}\sin y)^n = x^n \cos ny + \mathrm{i}\, x^n \sin ny.$$

（無論 x 是正是負，這都成立：實數因子 x 直接提出來成為 x^n。）由於 x 和 y 是實數，兩條方程的左邊正好是 $z^3 + 2z^2 + 2z$ 的實部和虛部。所以這對實數方程等價於一條複數方程

$$z^3 + 2z^2 + 2z = -1, \qquad \text{即} \qquad z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0.$$

想一想 為甚麼一條複數方程等同於兩條實數方程？

兩個複數相等，當且僅當它們的實部相同、虛部也相同。右邊的 -1 的實部是 -1，虛部是 0，正是題目給出的兩個右邊的值。所以 (x, y) 同時滿足兩條實數方程，當且僅當 z 滿足該三次方程。

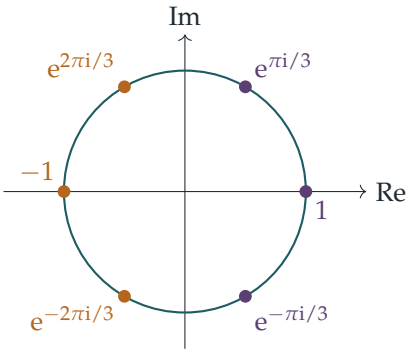
現在 $z = -1$ 是一個根，因為 $-1 + 2 - 2 + 1 = 0$，除去這個因式後得

$$z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z^2 + z + 1).$$

這個二次式的根是 $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})$。所以三個根是

$$z = -1 = \cos \pi + \mathrm{i}\sin \pi, \qquad z = \cos \tfrac{2\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin \tfrac{2\pi}{3},$$

全部位於單位圓（unit circle）上。



餘下要做的，是把每個根還原為實數對 (x, y)。由於 $|z| = |x|$，每個解都有 $|x| = 1$；特別地，$x = 0$ 是不可能的（否則會得出 $0 = -1$）。

- 若 $x = 1$，則 $\cos y + \mathrm{i}\sin y = z$，所以 y 是三個根之一的輻角（argument）：$y = \pi$、$\frac{2\pi}{3}$ 或 $-\frac{2\pi}{3}$，再加上 2π 的任意整數倍。
- 若 $x = -1$，則 $\cos y + \mathrm{i}\sin y = -z$，即 1、$\cos\frac{\pi}{3} \mp \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ 其中之一（圖中梅子色的點）。所以 $y = 0$、$-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}$，再加上 2π 的任意整數倍。

以上每一個都給出三次方程的一個根，所以全部都是解。設 k 為任意整數，解為

$$x = 1, \quad y = \pi + 2k\pi \text{ 或 } y = \pm\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi; \qquad x = -1, \quad y = 2k\pi \text{ 或 } y = \pm\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

在 $[0, 2\pi)$ 內共有六對：$(1, \frac{2\pi}{3})$、$(1, \pi)$、$(1, \frac{4\pi}{3})$、$(-1, 0)$、$(-1, \frac{\pi}{3})$、$(-1, \frac{5\pi}{3})$。

驗算

試 $x = -1$、$y = 0$：第一條方程給出 $-1 + 2 - 2 = -1$，第二條是 $0 = 0$。試 $x = 1$、$y = \frac{2\pi}{3}$：各餘弦值為 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$，得 $1 - 1 - 1 = -1$；各正弦值為 $0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $0 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$。用電腦在 $x \in [-3, 3]$、$y \in [0, 2\pi)$ 的細密網格上搜索，只在上述六點找到近似解（在捨入誤差之內），所以沒有遺漏。

常見錯誤

- 以為 x 是模（modulus），因而 $x \geq 0$。題目容許 x 為任意實數，$x = -1$ 的解同樣有效；它們是同一批點 z，只是描述時 y 平移了 π。
- 忘記 $+2k\pi$：y 只確定到相差 2π 的整數倍，所以有無限多對 (x, y)。

STEP 之外

把兩條實數方程合併成一條複數方程，是一個標準手法：以 $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ 為變數的多項式，其實部和虛部正好滿足這類三角方程組，而因式分解 $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z^2 + z + 1)$ 則把各根放在單位圓上。在大學的入門課程中，你會見到 $e^{\mathrm{i}\theta}$ 以冪級數（power series）定義，這令棣莫弗定理對所有整數都成立（並賦予非整數次冪意義，但須小心處理分支（branches））。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 以優美的幾何角度闡述了這一切。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 4 題

純數學 • 雙曲函數

> **STEP II 樣本試卷，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q4

關鍵思路

這些恆等式（identity）每一條所講的，都只是一個角（或一個雙曲「角」）。先為右邊的式子起一個名字，讀出它的其中一個函數值，再利用畢氏恆等式（Pythagorean identities）$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 和 $1+\sinh^2 u=\cosh^2 u$ 求出另一個。唯一真正要小心的是平方根的正負號，而這正是主值（principal value）範圍發揮作用的地方——到了最後一部分，也正是恆等式不再成立的地方。

解答

第 (i) 部分

設 $\theta=\tan^{-1}(\sinh x)$，則 $\tan\theta=\sinh x$，而且由於它是主值，$-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$。於是

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\sinh^2 x=\cosh^2 x.$$

在 $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ 上有 $\cos\theta>0$，所以 $\sec\theta>0$；而 $\cosh x>0$ 恆成立。取正平方根，得 $\sec\theta=\cosh x$，因此

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\tanh x.$$

由於 θ 位於 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ 之內，即 $\sin^{-1}$ 的主值範圍，這正好表示 $\theta=\sin^{-1}(\tanh x)$。因此對所有實數 x 都有 $\sin^{-1}(\tanh x)=\tan^{-1}(\sinh x)$，這就是所要證明的結果。

想一想 為甚麼得到 $\sin\theta=\tanh x$ 還不算完成論證？

因為 $\sin\theta=\tanh x$ 有無窮多個解 θ。正因為我們的 θ 位於 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ 之內，而 sin 在這

個區間上是一對一（one-to-one）的，我們才可以斷定 θ 就是主值 $\sin^{-1}(\tanh x)$。同一個範圍也決定了 $\sec\theta$ 的正負號。

第 (ii) 部分

設 $u = \sinh^{-1}(\tan y)$；它有定義，因為當 $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$ 時 $\tan y$ 是有限的。於是 $\sinh u = \tan y$，而在第 (i) 部分取 $x = u$，可得

$$\sin^{-1}(\tanh u) = \tan^{-1}(\sinh u) = \tan^{-1}(\tan y) = y,$$

其中最後一步用到 $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$，即 $\tan^{-1}$ 的主值範圍。對兩邊取 sin，得 $\tanh u = \sin y$。由於在這個區間上 $|\sin y| < 1$，$\tanh^{-1}(\sin y)$ 有定義，而且 tanh 是一對一的，所以 $u = \tanh^{-1}(\sin y)$。也就是說，

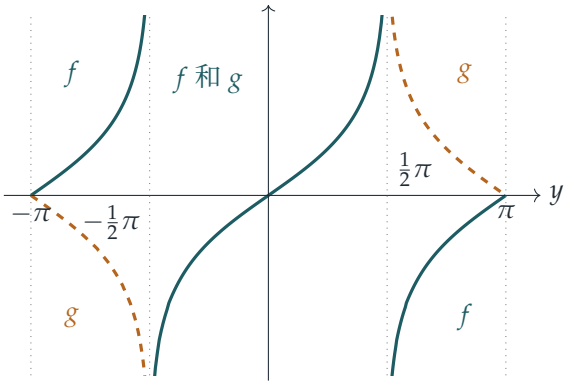
$$\sinh^{-1}(\tan y) = \tanh^{-1}(\sin y) \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi\right).$$

（直接計算：$\cosh u = \sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$，因為 $\cos y > 0$ 所以取正值，於是 $\tanh u = \tan y \cos y = \sin y$。）

草圖 記 $f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$ 和 $g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$。兩者在 $y = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處都沒有定義，因為在該處 $\tan y$ 為無窮大，而 $\sin y = \pm 1$。它們在其他地方的表現，可由 tan 和 sin 的對稱性推出。

- 兩者都是奇函數（odd function），並且都在 $y = 0$ 和 $y = \pm\pi$ 處取零值。
- f 的周期（period）為 π，因為 tan 也是如此。所以在 $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ 上，它重複在 $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ 上的取值：由 $-\infty$ 上升至 0。
- $\sin(\pi - y) = \sin y$，所以 g 關於 $y = \frac{1}{2}\pi$ 對稱。在 $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ 上，它以鏡像方式重複在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上的取值：由 $+\infty$ 下降至 0。
- 求導數，得 $f'(y) = \dfrac{\sec^2 y}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = |\sec y|$ 和 $g'(y) = \dfrac{\cos y}{1-\sin^2 y} = \sec y$。所以 f 在每一個有定義的區間上都是遞增的，而 g 在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上遞增，在這個區間以外則遞減。兩者在原點的斜率都是 1；在 $y = \pi$ 處，f 的斜率為 1，g 的斜率為 -1。

在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上，兩個圖像是同一條曲線；在外側的區間上，兩者互為對方關於橫軸的反射。



實線：$f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$。虛線：$g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$ 與 f 不同的部分。點線 $y = \pm\frac{1}{2}\pi$ 是漸近線（asymptote）。

$\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ 時的關係 草圖顯示在該處 $f = -g$，而我們可以證明這一點。若 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$，則 $y - \pi$ 位於 $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ 之內，所以剛才證明的恆等式適用於 $y - \pi$：

$$\begin{aligned}\sinh^{-1}(\tan y) &= \sinh^{-1}\big(\tan(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}\big(\sin(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}(-\sin y) = -\tanh^{-1}(\sin y),\end{aligned}$$

這裏用到 $\tan(y-\pi) = \tan y$、$\sin(y-\pi) = -\sin y$，以及 $\tanh^{-1}$ 是奇函數這個事實。所以當 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ 時，

$$\sinh^{-1}(\tan y) = -\tanh^{-1}(\sin y).$$

（由奇函數的性質，同樣的關係在 $-\pi < y < -\frac{1}{2}\pi$ 上也成立。）

想一想 當 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ 時，第 (ii) 部分的論證在哪一步失效？

在 $\tan^{-1}(\tan y) = y$ 這一步：當 y 在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 以外時，主值是 $y - \pi$，而不是 y。換一個說法，在直接計算的論證中，該處有 $\sqrt{1+\tan^2 y} = |\sec y| = -\sec y$，因為 $\cos y < 0$，而這個負號正是答案中的那個負號。

驗算

- 在 $y = 1$：$\sinh^{-1}(\tan 1) = \tanh^{-1}(\sin 1) \approx 1.2262$。在 $y = 2$：$\sinh^{-1}(\tan 2) \approx -1.5235$，而 $\tanh^{-1}(\sin 2) \approx 1.5235$，確認了正負號的改變。
- 正負號：當 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ 時，$\tan y < 0$ 但 $\sin y > 0$，所以兩個式子必定異號；它們不可能相等。

- 第 (i) 部分在 x 很大時：兩邊都趨向 $\frac{1}{2}\pi$，與預期相符。

我們以數值方法在 10^5 個隨機點上檢驗了兩條恆等式，以及 $f = -g$ 在 $\frac{1}{2}\pi < |y| < \pi$ 上的關係。

常見錯誤

- 寫出 $\sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$ 而沒有檢查 $\sec y$ 的正負號。這正是最後一部分的重點所在。
- 由 $\sin\theta = \tanh x$ 直接斷定 $\theta = \sin^{-1}(\tanh x)$，卻沒有說明為甚麼 θ 是主值。
- 把 g 在 $\frac{1}{2}\pi$ 以外的部分畫成與 f 相同的形狀：g 承襲的是 sin 關於 $\frac{1}{2}\pi$ 的對稱性，而不是 tan 的周期性。

STEP 之外

函數 $\mathrm{gd}(x) = \tan^{-1}(\sinh x) = \sin^{-1}(\tanh x)$ 稱為古德曼函數（Gudermannian function）。它無需借助複數（complex numbers），便把圓函數與雙曲函數（hyperbolic functions）聯繫起來，而第 (ii) 部分說明它的反函數（inverse function）是 $\sinh^{-1}(\tan y)$。它出現在麥卡托（Mercator）地圖投影之中，用來把地圖上的縱坐標轉換為緯度。反函數及其分支（branches）在這裏令恆等式出現問題；當你研究複數 z 的 $\log z$ 和 $z^{1/2}$ 時，它們更會成為核心課題。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）是領略這個課題的絕佳讀物。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 5 題

純數學 • 級數與積分界限

STEP II 樣本試卷，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s2-q5

關鍵思路

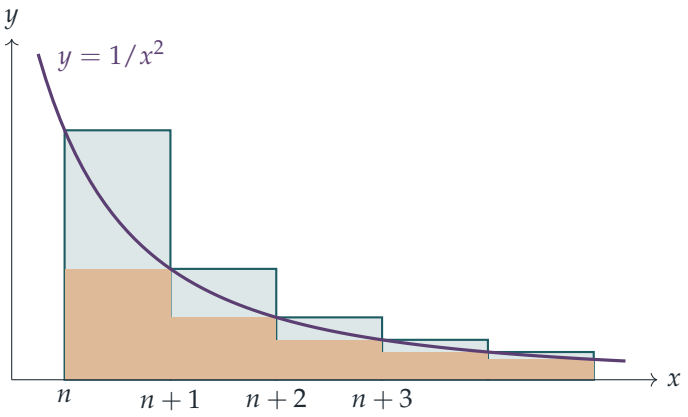
遞減函數（decreasing function）各個取值之和，可以想像成一列闊度為一個單位的長方形，而積分（integral）則是曲線下的面積。把長方形放在每個取樣點的右邊，它們便會凸出於曲線之上；放在左邊，它們便會收在曲線之下。這樣就得到夾逼的不等式，其後的一切都只是按部就班的整理：級數（series）的尾項和被夾在兩個簡單的分數之間，所以只要加上對尾項和的一個猜測，估計值便會大幅改善。

解答

夾逼

設 $f(x) = 1/x^2$，它在 $x > 0$ 時為正，並且嚴格遞減（strictly decreasing）。我們還需要

$$\int_n^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_n^M = \frac{1}{n}.$$



上方長方形（藍綠色外框）。在 $[r, r+1]$ 上放一個高度為 $f(r) = 1/r^2$ 的長方形。由於 f 遞減，當 $r < x \le r+1$ 時 $f(x) < f(r)$，所以這個長方形的面積 $1/r^2$ 嚴格大於 $\int_r^{r+1} f(x)\,\mathrm{d}x$。對 $r = n, n+1, \ldots$ 把這些式子相加，得

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

下方長方形（琥珀色）。在 $[r-1, r]$ 上放一個高度為 $f(r) = 1/r^2$ 的長方形。這次當 $r-1 \le x < r$ 時 $f(x) > f(r)$，所以這個長方形位於曲線之下，其面積 $1/r^2$ 嚴格小於 $\int_{r-1}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$。對 $r = n+1, n+2, \ldots$ 相加，而這些區間剛好填滿 $[n, \infty)$，於是

$$\int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}.$$

（三個量都是有限的：積分等於 $1/n$，而兩個和都以它為界。）這就是所要求的一對不等式（inequality），在此把它們明確寫下來：

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \frac{1}{n} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}. \qquad (*)$$

夾住尾項和

記 $S_n = \sum_{r=1}^{n} 1/r^2$。那麼 $A - S_n$ 正好就是尾項和（tail）$T = \sum_{r=n+1}^{\infty} 1/r^2$。

由 $(*)$ 右邊的不等式可直接得到 $T < 1/n$。

> **想一想** $(*)$ 左邊的不等式中，求和由 $r = n$ 開始，但尾項和卻由 $r = n+1$ 開始。我們怎樣才能得到 T 的下界（lower bound）？

不等式 $(*)$ 對每一個正整數都成立，所以把 n 換成 $n+1$，再應用它左邊的一半：

$$T = \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{n+1}.$$

把兩者合起來，

$$\frac{1}{n} > A - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} > \frac{1}{n+1},$$

這正是所要求的結果。

最小的 n

所有項都是正數，所以 $S_n < A$，而誤差就是 $A - S_n$。

- 若 $n \le 9999$，則 $n+1 \le 10^4$，所以 $A - S_n > \dfrac{1}{n+1} \ge 10^{-4}$：誤差太大。
- 若 $n = 10^4$，則 $A - S_n < \dfrac{1}{n} = 10^{-4}$：誤差夠小。

所以最小的值是 $n = 10\,000$。留意兩個不等式都是嚴格不等式，這一點在這裏十分關鍵：當 $n = 9999$ 時，下界剛好是 10^{-4}；而當 $n = 10^4$ 時，上界（upper bound）剛好是 10^{-4}。

改良的估計

在夾住尾項和的不等式中，每一部分都減去 $\frac{1}{n+1}$，得

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > A - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2}\right) > 0.$$

所以 $\frac{1}{n+1} + S_n$ 仍然低估了 A，但相差小於

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

當 $n = 10^4$ 時，這個值是 $\dfrac{1}{10^4 \times 10\,001} < \dfrac{1}{10^4 \times 10^4} = 10^{-8}$，所以改良後的估計值逼近 A 的誤差小於 10^{-8}，這正是所要求的結果。

額外加上的一項 $1/(n+1)$ 是對尾項和的一個猜測；既然尾項和被困在一個闊度只有 $1/(n(n+1))$ 的區間之內，這個猜測就不可能錯得太遠。

驗算

- 小數值的情況：取 $n = 1$，則 $S_1 = 1$，而 $A = \pi^2/6 \approx 1.6449$，所以 $A - S_1 \approx 0.645$，確實介乎 $\frac{1}{2}$ 與 1 之間。
- 利用 $A = \pi^2/6$ 並以數值方法求和：$A - S_{9999} \approx 1.00005 \times 10^{-4}$（僅僅太大）而 $A - S_{10000} \approx 0.99995 \times 10^{-4}$（僅僅夠小），由此確認 $n = 10\,000$。

- 當 $n = 10^4$ 時，改良後的估計值相差約 5.0×10^{-9}，低於界限 $1/(n(n+1)) \approx 1.0 \times 10^{-8}$；它大約是界限的一半，正如圖中所示（曲線把每個長方形凸出的部分大致分成兩半）。

常見錯誤

- 在 n 而不是 $n+1$ 處使用左邊的不等式，這樣得到的是 $\sum_{r=n}^{\infty}$ 的下界，而不是尾項和 $A - S_n$ 的下界。
- 把嚴格不等式當作非嚴格不等式，或只用了兩個界限的其中一個，因而答 $n = 9999$ 或 $n = 10\,001$。你需要用下界來排除 $n \leq 9999$，並用上界來確定 $n = 10^4$ 可行。
- 把長方形畫在每個取樣點的錯誤一邊，以致不等式的方向倒轉。

STEP 之外

這就是判別收斂（convergence）的積分審斂法（integral test），再加上它在定量方面的額外收穫：用來證明級數收斂的同一批長方形，也可以用來估計它的尾項和。把這個想法加以改進，即比較和與積分，再以兩端的導數（derivative）作修正，便會引出歐拉–麥克勞林公式（Euler–Maclaurin formula）。在這裏，該公式預測 $A - S_n \approx \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3}$；歐拉（Euler）在證明 $\sum 1/r^2$ 等於 $\pi^2/6$ 之前，正是用這個方法把它計算到小數點後許多位。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對級數及其審斂法有細緻的論述。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 6 題

純數學 • 由常微分方程推導加法公式

> **STEP II 樣本試卷，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q6

關鍵思路

題目不容許我們說「f 就是 e^x」，所以一切都必須由微分方程（differential equation）本身推導出來。我們唯一可以動用的工具是：若一個函數的導數（derivative）處處為零，則該函數為常數。因此竅門在於構造一個導數恰好互相抵消為零的式子，然後代入 $x = 0$ 來確定那個常數。把 $a - x$ 處的值與 x 處的值配對是很自然的做法，因為這兩個自變量之和恆為 a，而這正是加法公式（addition formula）的形狀。

解答

指數函數的加法定律

固定 a，並設 $p(x) = \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x)$。由鏈式法則（chain rule），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{f}(a-x)] = -\mathrm{f}'(a-x) = -\mathrm{f}(a-x)$，其中用到 $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$。於是由積法則（product rule）得

$$\begin{aligned} p'(x) &= -\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}'(x) \\ &= -\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) = 0, \end{aligned}$$

這就是第一個結果。

由於對每個 x 都有 $p'(x) = 0$，函數 p 是常數。它在 $x = 0$ 處的值為 $\mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(a)$，因為 $\mathrm{f}(0) = 1$。因此

$$\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(a) \qquad \text{對所有 } x \text{ 及所有 } a \text{ 成立。}$$

現在任取 x 和 y，並選 $a = x + y$。那麼 $a - x = y$，而該恆等式變成

$$\mathrm{f}(y)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x+y),$$

正是所求。

餘弦的加法公式

我們沿用同一策略，所以需要找出 c 與 s 在 $a-x$ 和 x 處取值的一個組合，使其導數為零。

> **想一想** 我們應該對哪一個組合求導？

讓答案來引導我們：取 $a = x+y$ 時，我們想得到 $\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y)-\mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$，即 $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x)-\mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x)$。所以這就是值得一試的函數。

固定 a，並設

$$g(x) = \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{s}(x).$$

由鏈式法則及題目給出的導數，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{c}(a-x)] = -\mathrm{c}'(a-x) = \mathrm{s}(a-x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{s}(a-x)] = -\mathrm{s}'(a-x) = -\mathrm{c}(a-x).$$

因此，由積法則，

$$\begin{aligned} g'(x) &= \big[\mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x) - \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)\big] - \big[-\mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x) + \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x)\big] \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以 g 是常數，其值為

$$g(0) = \mathrm{c}(a)\,\mathrm{c}(0) - \mathrm{s}(a)\,\mathrm{s}(0) = \mathrm{c}(a)\cdot 1 - \mathrm{s}(a)\cdot 0 = \mathrm{c}(a).$$

故此對所有 x 和 a，都有 $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x)-\mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x) = \mathrm{c}(a)$。任給 x 和 y，取 $a = x+y$，則 $a-x = y$：

$$\mathrm{c}(x+y) = \mathrm{c}(x)\,\mathrm{c}(y) - \mathrm{s}(x)\,\mathrm{s}(y),$$

這就是所求的結果。

以同樣的方法處理 $h(x) = \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x) + \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)$，可得 $h' = 0$ 及 $h(0) = \mathrm{s}(a)$，所以 $\mathrm{s}(x+y) = \mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y) + \mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$ 亦成立。

驗算

- 代入 $y = 0$：利用 $\mathrm{f}(0) = \mathrm{c}(0) = 1$ 及 $\mathrm{s}(0) = 0$，兩個結果分別化為 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x)$ 和 $\mathrm{c}(x) = \mathrm{c}(x)$。
- 在餘弦的結果中代入 $y = -x$：$1 = \mathrm{c}(0) = \mathrm{c}(x)\mathrm{c}(-x) - \mathrm{s}(x)\mathrm{s}(-x)$，這其實就是換了個面貌的 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$。

- 我們以數值方法解了這些微分方程（採用龍格－庫塔法（Runge–Kutta method），不使用任何內置的指數函數或三角函數），並在 $[-3,3]$ 內隨機抽取 60 對數值來檢驗兩個恆等式；例如取 $x = 0.7$ 和 $y = 1.1$ 時，餘弦結果的兩邊準確至四位小數均為 -0.2272。所有差值都小於 10^{-11}。

常見錯誤

- 對 $\mathrm{f}(a-x)$、$\mathrm{c}(a-x)$ 或 $\mathrm{s}(a-x)$ 求導時，忘記了鏈式法則帶來的負號。
- 寫到「導數為零」便停下來，沒有在 $x = 0$ 處求出常數的值，也沒有接着選取 $a = x + y$。
- 直接引用 $\cos(x+y)$ 的公式或 $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$，而這是題目明確禁止的。

STEP 之外

在大學裏，這才是定義指數函數和三角函數的嚴謹做法：把它們定義為微分方程的解（或定義為冪級數（power series）），然後由這個定義推導出每一個熟悉的性質。我們用到的事實，即導數處處為零的函數必為常數，是中值定理（Mean Value Theorem）的推論，而它同時說明了這些解是唯一的。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對這套理論有嚴謹細緻的建構。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 7 題

純數學 • 階梯函數的積分

> **STEP II 樣本試卷，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q7

關鍵思路

被積函數（integrand）$[\mathrm{e}^x]$ 是一個階梯函數（step function）：在 e^x 保持於兩個相鄰整數之間的每個區間上，它都是常數。因此我們先找出這些區間，在每個區間上對常數積分，然後把結果加起來。這樣得出的和看似難以處理，但只要把相同的項對齊，當中大部分對數（logarithm）便會成對抵消。

解答

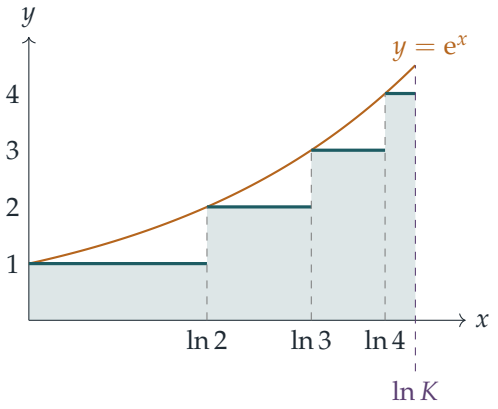
被積函數在哪裏是常數

我們取 $K \geq 1$，於是 $\ln K \geq 0$ 且 $N = [K] \geq 1$。（若 $0 < K < 1$，則對於介乎 $\ln K$ 與 0 之間的 x，有 $0 < \mathrm{e}^x \leq 1$，而除了 $x = 0$ 這單獨一點之外 $[\mathrm{e}^x] = 0$，所以 $I = 0$；同時 $N = 0$ 且 $N \ln K - \ln 0! = 0$。結果在這情況下同樣成立。）

對於整數 $k \geq 1$，

$$k \leq \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \leq x < \ln(k+1),$$

因為 ln 是遞增函數。所以在 $[\ln k, \ln(k+1))$ 上 $[\mathrm{e}^x] = k$。在積分範圍 $0 \leq x \leq \ln K$ 上有 $1 \leq \mathrm{e}^x \leq K$，故 $[\mathrm{e}^x]$ 取值 $1, 2, \ldots, N$，而最後一個值 N 在 $[\ln N, \ln K]$ 上取得，因為在該處 $N \leq \mathrm{e}^x \leq K < N+1$。



陰影部分的面積就是 I（圖中取 $K = 4.5$，故 $N = 4$）。

把各部分加起來

在每個區間上對常數積分，得

$$I = \sum_{k=1}^{N-1} k\big(\ln(k+1) - \ln k\big) + N\big(\ln K - \ln N\big).$$

（當 $N = 1$ 時，這個和是空的；當 $K = N$ 時，最後一項為零。兩種情況都無須另外處理。）

> **想一想** 怎樣化簡 $\sum k\big(\ln(k+1) - \ln k\big)$？照現在的形式，它並不能裂項相消（telescope）。

把它拆成兩個和，並在第一個和中移動指標，令 $j = k+1$：

$$\sum_{k=1}^{N-1} k\ln(k+1) = \sum_{j=2}^{N}(j-1)\ln j.$$

現在兩個和都是 $\ln j$ 的倍數之和，我們可以把每個 $\ln j$ 的係數合併起來。利用 $\ln 1 = 0$，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1} k\big(\ln(k+1) - \ln k\big) &= \sum_{j=2}^{N}(j-1)\ln j - \sum_{j=2}^{N-1} j\ln j \\ &= (N-1)\ln N + \sum_{j=2}^{N-1}\big((j-1) - j\big)\ln j \\ &= (N-1)\ln N - \sum_{j=2}^{N-1}\ln j.\end{aligned}$$

加上最後一部分 $N\ln K - N\ln N$：

$$\begin{aligned} I &= N\ln K - \ln N - \sum_{j=2}^{N-1} \ln j \\ &= N\ln K - \sum_{j=1}^{N} \ln j \\ &= N\ln K - \ln(N!), \end{aligned}$$

這正是所要證明的結果。

更巧妙的看法

與其把陰影區域切成垂直的長條，不如把它切成水平的層。對於 $1 \le k \le N$，高度介乎 $k-1$ 與 k 之間的那一層，恰好出現在 $[\mathrm{e}^x] \ge k$ 的地方，也就是 $\mathrm{e}^x \ge k$ 的地方，即 $\ln k \le x \le \ln K$。該層的面積是 $\ln K - \ln k$，所以立刻得到

$$I = \sum_{k=1}^{N} (\ln K - \ln k) = N\ln K - \ln(N!)$$

。嚴格來說，這裏用到了當 $1 \le y < N+1$ 時 $[y] = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}[y \ge k]$，然後逐項積分。這與上面的指標移動是同一種重排，只不過是用幾何方式完成。

驗算

- $K = 1$：積分範圍的長度為零，而公式給出 $1 \cdot 0 - \ln 1 = 0$。
- $K = \mathrm{e}$：這時 $N = 2$，直接計算得 $I = \ln 2 + 2(1 - \ln 2) = 2 - \ln 2 \approx 1.3069$，與 $2\ln \mathrm{e} - \ln 2$ 吻合。
- 當 $K = 10$ 時，公式給出 $10\ln 10 - \ln(10!) \approx 7.9214$，而對 $[\mathrm{e}^x]$ 在 $[0, \ln 10]$ 上用中點法則作數值積分，結果相差不超過 5×10^{-6}。在 $[1, 40]$ 中隨機選取的 K 值亦同樣吻合。

常見錯誤

- 把和一直加到 N，並使用區間 $[\ln N, \ln(N+1)]$。積分範圍的上端是 $\ln K$，而不是 $\ln(N+1)$，所以最後一部分必須另外處理。
- 重新編排指標時弄錯首尾兩端的項：不妨把 $N = 3$ 時的各個和逐項寫出來檢查。

STEP 之外

把 $\sum k(a_{k+1}-a_k)$ 換成 $-\sum a_k$ 再加上邊界項，這就是*分部求和法*（summation by parts，又稱阿貝爾求和法（Abel summation）），它是分部積分法（integration by parts）的離散版本。取 $K=N$ 並利用 $\mathrm{e}^x-1<[\mathrm{e}^x]\le \mathrm{e}^x$，可得 $N\ln N-N+1\le \ln(N!)\le N\ln N-N+1+\ln N$，這是邁向斯特靈近似公式（Stirling's approximation）的第一步。同樣的想法寫成黎曼–斯蒂爾吉斯積分（Riemann–Stieltjes integral）$\int f\,\mathrm{d}[t]$ 之後，在解析數論（analytic number theory）中隨處可見，用來把和化為積分；參看 Apostol 的 *Introduction to Analytic Number Theory*（解析數論入門）。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 8 題

純數學 • 模群中元素的階

> **STEP II 樣本試卷，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q8

關鍵思路

模（modulo）N 之下，$N-1$ 這個數就是 -1，而 $m+n=N$ 表示 $n\equiv -m$。所以 n 的每個冪都是 m 的冪，最多相差一個正負號：$n^k\equiv(-1)^k m^k$。k 是偶數還是奇數，決定了這個正負號是否有影響，而題目的三個部分正好對應兩個階（order）的奇偶性的三種組合方式。最後一部分則利用這些事實求出各元素的階，而無須逐一計算每個冪。

解答

全文中，$\equiv$ 表示模 N 同餘（congruent）。我們按題目的原意，取 G 的單位元（identity）為 1。（事實上，只要 $N-1\in G$，這一點就必然成立：若 e 是單位元，則 $e(N-1)\equiv N-1$，即 $-e\equiv -1$，所以 $e=1$。）

$N-1$ 的階

我們有

$$(N-1)^2 = N^2-2N+1\equiv 1,$$

而且由於 $N\geq 3$，故 $N-1\neq 1$。所以 $(N-1)^1$ 不是單位元，但 $(N-1)^2$ 是：$N-1$ 的階為 2。

各部分的準備工作

由於 $m+n=N$，我們有 $n\equiv -m$，因此對每個正整數 k 都有

$$n^k\equiv(-1)^k m^k, \qquad \text{等價地} \qquad m^k\equiv(-1)^k n^k.$$

此外，$N-1 \equiv -1 \equiv n\,m^{-1}$ 屬於 G，因為 G 是一個包含 n 和 m^{-1} 的羣（group）。所以 -1 是 G 的元素，而且由於 $N \geq 3$，故 $-1 \neq 1$。我們還會用到以下的標準結果：若 x 的階為 r 且 $x^k = 1$，則 $r \mid k$（寫成 $k = ar + b$，其中 $0 \leq b < r$；於是 $x^b = 1$，由 r 的最小性得 $b = 0$）。

第 (i) 部分

設 p 和 q 都是偶數。那麼

$$n^p \equiv (-1)^p m^p = m^p \equiv 1,$$

所以 $q \mid p$。同理，$m^q \equiv (-1)^q n^q = n^q \equiv 1$，所以 $p \mid q$。兩個正整數互相整除，必定相等，所以 $p = q$。

第 (ii) 部分

設 p 是偶數而 q 是奇數。由於 p 是偶數，$n^p \equiv m^p \equiv 1$，所以 $q \mid p$。另外 $2q$ 是偶數，所以

$$m^{2q} \equiv n^{2q} = (n^q)^2 \equiv 1,$$

由此得 $p \mid 2q$。寫成 $p = kq$；於是 $kq \mid 2q$，所以 $k \mid 2$，即 $k = 1$ 或 2。但若 $k = 1$，則 $p = q$ 是奇數，與假設不符。因此 $k = 2$，即 $p = 2q$。

> ? **想一想** 為甚麼不能直接由 $m^q \equiv -n^q \equiv -1$ 推斷「p 必定是 $2q$」？

這個計算是正確的，它說明 $m^q \neq 1$ 而 $m^{2q} \equiv 1$，但單憑這一點只能得出 $p \mid 2q$ 和 $p \nmid q$，並不足以確定 p 的值（例如原則上 p 可以是 2 而 $q = 3$）。要補上這個缺口，還需要另一個整除關係 $q \mid p$，而它正是來自 p 是偶數這個條件。

第 (iii) 部分

用反證法（proof by contradiction）：假設 p 和 q 都是奇數，並設 $r = pq$，它也是奇數。那麼

$$n^r = (n^q)^p \equiv 1, \qquad \text{但同時} \qquad n^r \equiv (-1)^r m^r = -(m^p)^q \equiv -1.$$

所以 $1 \equiv -1$，即 $N \mid 2$，但 $N \geq 3$，這不可能。因此 p 和 q 不可能同時是奇數。

（根據對稱性，第 (ii) 部分也說明：當 q 是偶數而 p 是奇數時，$q = 2p$。所以在任何情況下，m 和 $N - m$ 的階要麼相等且為偶數，要麼其中一個是另一個的兩倍，而後者是奇數。）

模 21 的羣

2 和 5 的各次冪模 21 化簡後，依次為

k	1	2	3	4	5	6
2^k	2	4	8	16	11	1
5^k	5	4	20	16	17	1

（例如 $2^5 = 32 \equiv 11$，$5^2 = 25 \equiv 4$，$5^4 \equiv 4^2 = 16$，$5^5 \equiv 80 \equiv 17$）。兩行中的 1 都是在 $k = 6$ 時首次出現，所以 2 和 5 的階都是 6。

現在從表中讀出各元素的階：若 x 的階為 6，則 x^k 的階為 $6/\gcd(k, 6)$。所以

- $11 = 2^5$ 和 $17 = 5^5$ 的階為 6；
- $4 = 2^2$ 和 $16 = 2^4$ 的階為 3；
- $8 = 2^3$ 和 $20 = 5^3$ 的階為 2（由於 $20 = N - 1$，題目的第一部分已經告訴我們這一點）；
- 1 的階為 1。

餘下的是 10、13 和 19，它們各自與一個已知的元素相加得 21：

- $13 = 21 - 8$，而 8 的階是偶數 2。根據 (iii) 及其後的備註，13 的階要麼是 2（相等且為偶數），要麼是 1（即 2 的一半）。它不是 1，因為 $13 \neq 1$，所以 13 的階為 2。（驗算：$13^2 = 169 = 8 \cdot 21 + 1$。）
- $19 = 21 - 2$ 及 $10 = 21 - 11$，而 2 和 11 的階都是 6。所以 19 和 10 各自的階是 6 或 3。

所以 G 的每個元素的階都不超過 6。階為 12 的循環羣（cyclic group）有一個生成元（generator），即一個階為 12 的元素，而同構（isomorphism）保持元素的階不變。由於 G 沒有階為 12 的元素，它與階為 12 的循環羣並不同構。

還有另一種方法完成這一步：G 有三個階為 2 的元素，即 8、13 和 20，而階為 12 的循環羣恰好只有一個（若 g 是它的生成元，則 g^k 的階為 2 僅當 $k = 6$）。

驗算

用電腦驗算，可得 G 中各元素的階的完整列表：1 的階為 1；$8, 13, 20$ 的階為 2；$4, 16$ 的階為 3；而 $2, 5, 10, 11, 17, 19$ 的階為 6。（直接計算，$10^3 = 1000 \equiv 13$ 及 $19^3 \equiv (-2)^3 = -8 \equiv 13$，所以兩者的階都不是 3。）各類元素的數目 $1 + 3 + 2 + 6 = 12$ 與 G 的大小吻合。我們亦對所有 $N < 60$，在單位羣中由最多兩個元素生成的每個子羣（subgroup）裏，就每一對 m、$N - m$ 檢驗了第 (i) 至 (iii) 部分：共近 1900 對，無一例外。

常見錯誤

- 假設 $N-1 \in G$ 而不說明原因。題目並沒有給出這一點，但它可由 $m, n \in G$ 推出，因為 $N-1 \equiv n\,m^{-1}$。
- 在 (ii) 中只證明了 $p \mid 2q$；還需要多一個整除關係才能得到等式。
- 在古怪的情況下把單位元視為理所當然：例如模 6 之下的子集 $\{3\}$ 對乘法封閉，其單位元為 3，而取 $m = n = 3$ 時便會違反 (iii)。本題的論證依賴單位元是 1，而這顯然正是題目的原意。

STEP 之外

G 是模 21 的單位羣（group of units），根據中國剩餘定理（Chinese remainder theorem），它同構於模 3 和模 7 的單位羣的直積，即 $C_2 \times C_6$：這就是為甚麼它有三個階為 2 的元素，卻沒有階為 12 的元素。判斷模 N 的單位在甚麼時候構成循環羣（恰好是 $N = 2, 4, p^k, 2p^k$ 的情況，其中 p 是奇質數，亦即存在「原根」（primitive root）的情況），是大學一年級數論的經典結果。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 講述了原根，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 則討論了相關的羣論。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 9 題

純數學 • 球面、平面與反射

STEP II 樣本試卷，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s2-q9

關鍵思路

兩部分其實都圍繞同一幅圖：一個平面，以及向它所作的垂線。在 (i) 中，球面的球心在原點，所以一切都取決於由原點到平面的垂足（foot of the perpendicular）：它與 O 的距離決定兩者是否相交，然後用畢氏定理（Pythagoras' theorem）便可求出那個圓。在 (ii) 中，把 $\mathbf{x}$ 分拆成沿 $\mathbf{c}$ 方向的部分和垂直於 $\mathbf{c}$ 的部分，再看看公式對每一部分做了甚麼。

解答

第 (i) 部分

平面 $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0$ 通過點 $\mathbf{a}$，並以 $\mathbf{b}$ 為法向量（normal）。設 N 為由原點 O 到該平面的垂足。由於 ON 沿法向量方向，故對某個純量（scalar）λ 有 $\mathbf{n}=\lambda\mathbf{b}$；又因為 N 在平面上，

$$(\lambda\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2},$$

這一步是容許的，因為 $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$。所以

$$\mathbf{n}=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad d=|\mathbf{n}|=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|},$$

其中 d 是由 O 到平面的距離。

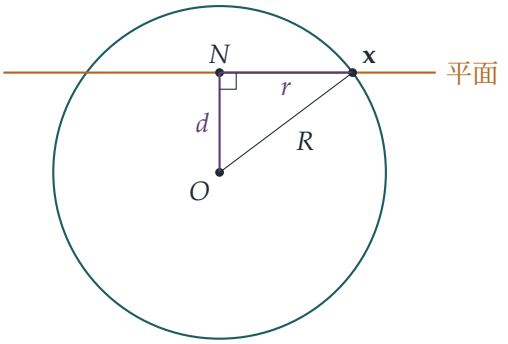
現在取平面上任意一點 $\mathbf{x}$。向量 $\mathbf{x}-\mathbf{n}$ 位於平面之內，所以它垂直於 $\mathbf{b}$，因而也垂直於 $\mathbf{n}$。由畢氏定理，

$$|\mathbf{x}|^2=|\mathbf{n}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2=d^2+|\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2. \qquad (*)$$

所以平面上的點都滿足 $|\mathbf{x}| \geq d$，而且每一個滿足 $|\mathbf{x}| \geq d$ 的值都會出現（只要在平面內由 N 向外移動）。因此，球面 $|\mathbf{x}| = R$ 與平面相交，當且僅當 $R \geq d$，即

$$\boxed{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq R\,|\mathbf{b}|} \qquad \text{或等價地} \qquad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leq R^2|\mathbf{b}|^2.$$

在等號成立的情況下，該平面是切平面（tangent plane），而那個「圓」則縮成單獨一點 N。



當條件成立時，同時在兩個曲面上的點滿足 $|\mathbf{x}| = R$，並且由 $(*)$ 得

$$|\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2 = R^2 - d^2.$$

所以這些點都在平面內，並且與 N 保持固定距離，而後者本身是平面上的一點：它們組成一個以 N 為圓心的圓。其圓心和半徑為

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad r = \sqrt{R^2 - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2}} = \frac{\sqrt{R^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}}{|\mathbf{b}|}.$$

第 (ii) 部分

記 $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/|\mathbf{c}|$，這是一個單位向量（unit vector）（由於 $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$，這樣做沒有問題）。於是該關係式變成

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}.$$

? **想一想** 從幾何上看，$(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}$ 是甚麼？

它是 $\mathbf{x}$ 沿 $\mathbf{c}$ 方向的分量（component），亦即 $\mathbf{x}$ 在通過 O 而方向為 $\mathbf{c}$ 的直線上的投影（projection）。所以可作分拆

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}, \qquad \mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel},$$

其中 $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{c} - (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})(\hat{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{c}) = 0$。關係式變成

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{\parallel}.$$

設 Π 為通過 O 並垂直於 $\mathbf{c}$ 的平面（即平面 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=0$），則位於這個平面內的分量保持不變，而垂直於 Π 的分量則反轉方向。這正正是鏡子的作用：**$\mathbf{x}'$ 是 $\mathbf{x}$ 關於平面 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=0$ 的反射（reflection）**，即關於通過原點、以 $\mathbf{c}$ 為法向量的平面的反射。

以下按反射的定義加以確認：

- $\mathbf{x}'-\mathbf{x}=-2\mathbf{x}_{\parallel}$ 是 $\mathbf{c}$ 的倍數，所以由 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{x}'$ 的線段垂直於 Π；
- 中點 $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{x}')=\mathbf{x}_{\perp}$ 滿足 $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c}=0$，所以它在 Π 上。

以下幾個推論可令這幅圖像更具體。Π 上的點（即滿足 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=0$ 的點）固定不動；$\mathbf{c}$ 本身變成 $-\mathbf{c}$；$|\mathbf{x}'|=|\mathbf{x}|$，因為 $|\mathbf{x}'|^2=|\mathbf{x}_{\perp}|^2+|\mathbf{x}_{\parallel}|^2$；而把這個映射連續施行兩次便會得回 $\mathbf{x}$，反射兩次理應如此。若把 $\mathbf{c}$ 換成任何非零倍數 $k\mathbf{c}$，關係式並無改變，這也很合理：起作用的只有那個平面，而不是其法向量的長度或指向。

驗算

在 (i) 中，取 $\mathbf{a}=\mathbf{b}=(0,0,1)$ 及 $R=2$：平面是 $z=1$，它與球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交於圓 $x^2+y^2=3$，$z=1$。公式給出圓心 $(0,0,1)$ 和半徑 $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，與預期相符。在 (ii) 中，取 $\mathbf{c}=(0,0,1)$：公式把 (x,y,z) 映射到 $(x,y,-z)$，即關於 $z=0$ 的反射。我們亦以 20,000 組隨機選取的 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、R 以及 $\mathbf{x}$、$\mathbf{c}$ 對兩部分作了數值測試：在所預測的圓上構作的點，都在球面和平面上，誤差不超過 10^{-9}；而 (ii) 中的映射使 Π 內的向量固定不動，保持長度和點積（dot product）不變，並且是它自己的逆映射。

常見錯誤

- 忘記加上絕對值（modulus）：條件是 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le R|\mathbf{b}|$，而不是 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\le R|\mathbf{b}|$；位於 O 另一側的平面有 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0$。
- 把 $\mathbf{a}$ 當作圓心。點 $\mathbf{a}$ 只不過是平面上的某一點；圓心是由 O 所作垂線的垂足。
- 在 (ii) 中，說成「關於 $\mathbf{c}$ 的反射」或「關於沿 $\mathbf{c}$ 的直線的反射」。關於該直線的反射應是 $\mathbf{x}\mapsto 2\mathbf{x}_{\parallel}-\mathbf{x}$，亦即 $-\mathbf{x}'$。

STEP 之外

(ii) 中的映射是一個豪斯霍爾德反射（*Householder reflection*），$\mathbf{x}\mapsto(I-2\hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{c}}^{\mathsf{T}})\mathbf{x}$，它是一個線性映射（linear map），既正交（orthogonal）又對稱（symmetric），行列式（determinant）為 -1。空間中的每一個旋轉都是兩個這類反射的乘積，而數值分析學者利用它們來穩定地分解矩陣（QR 分解，QR decomposition）。Strang 的 *Introduction to*

Linear Algebra（線性代數入門）正是從這個觀點講解投影、反射和正交矩陣。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 10 題

純數學 • 邏輯謎題

> **STEP II 樣本試卷，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q10

關鍵思路

一切都建基於一個轉譯：說話者是蟾蜍，當且僅當他所說的話為真。因此，對每個角色我們都問「他可能是蟾蜍嗎？」和「他可能是青蛙嗎？」，然後剔除任何令其陳述的真值（truth value）出錯的選擇。尤其要留意那些關於說話者自己的陳述：其中有些是某一種生物根本不可能說出口的，而這通常就是突破口。

解答

在整個解答中，「蟾蜍」指說真話者，「青蛙」指說謊者，所以

$$\text{說話者是蟾蜍} \iff \text{其陳述為真.}$$

在每個場景中，我們找出所有符合這條規則的指派（assignment），並驗證恰好只有一個能夠成立。

第 (i) 部分

假設 A 是蟾蜍。那麼 A 的陳述為真，於是 A 便是青蛙，這是一個矛盾（contradiction）。因此 A 是青蛙。

所以 A 的陳述為假：A 和 B 並非都是青蛙。既然 A 是青蛙，這句話要不成立，唯一的可能就是 B 是蟾蜍。

驗算：若 A 是青蛙而 B 是蟾蜍，則「我們兩個都是青蛙」為假，正符合青蛙的陳述必須為假的要求。所以 **A 是青蛙，B 是蟾蜍**。

第 (ii) 部分

這是第 (i) 部分的鏡像。假設 C 是青蛙。那麼「D 和我之中至少有一個是青蛙」便為真（單憑 C 已足夠），但青蛙不可能說出真話。因此 C 是蟾蜍。

所以 C 的陳述為真：C、D 之中至少有一個是青蛙。既然 C 是蟾蜍，D 必定就是那隻青蛙。

驗算：若 C 是蟾蜍而 D 是青蛙，則該陳述為真，正符合蟾蜍的陳述必須為真的要求。所以 **C 是蟾蜍，D 是青蛙**。

第 (iii) 部分

以 S 表示 E 的陳述「G 和 H 都是蟾蜍」。那麼 G 斷言 S 為真，而 H 斷言 S 為假。

> ? **想一想** 我們對任何一個角色都還一無所知。到底可以從哪裏入手？

不要先看 E，而是把 G 和 H 放在一起看。他們兩個的陳述恰好相反，所以其中恰有一個為真。因此，不論 S 最終是真是假，G、H 之中恰有一個是蟾蜍，另一個是青蛙。

這就確定了 S 的真假：既然 G、H 之中有一個是青蛙，他們便不可能都是蟾蜍，所以 S 為假。於是：

- E 說的話為假，所以 E 是青蛙；
- G 聲稱 S 為真，而這是假的，所以 G 是青蛙；
- H 聲稱 S 為假，而這是真的，所以 H 是蟾蜍。

驗算：G 是青蛙，所以「G 和 H 都是蟾蜍」確實為假，與每一個結論都吻合。所以 **E 和 G 是青蛙，H 是蟾蜍**。

第 (iv) 部分

這裏的「我們」是指 I、J、K 三個。

I 是青蛙。假如 I 是蟾蜍，「我們全部都是青蛙」便為真，於是 I 是青蛙，矛盾。所以 I 是青蛙，而 I 的陳述為假：三個並非全是青蛙，故此

$$\text{在}J,\ K\ \text{之中至少有一個是蟾蜍.} \qquad (*)$$

J 是蟾蜍。反過來假設 J 是青蛙。那麼由 $(*)$ 可知 K 是蟾蜍，三者分別是 I 青蛙、J 青蛙、K 蟾蜍：恰好有一隻蟾蜍。這使 J 的陳述為真，而青蛙不可能說出真話。所以 J 是蟾蜍。

K 是青蛙。既然 J 是蟾蜍，J 的陳述便為真：三個之中恰好有一隻蟾蜍。那隻蟾蜍就是

J，所以 K 是青蛙。

> **想一想** 現在知道 K 是青蛙，$(*)$ 還成立嗎？

成立：$(*)$ 只要求 J、K 之中有一個是蟾蜍，而 J 正是。所以完整的驗算如下：I 的「我們全部都是青蛙」為假（J 是蟾蜍），而 J 的「我們之中恰好有一個是蟾蜍」為真（只有 J）。兩個陳述的真值都正確，所以 I **和** K **是青蛙，** J **是蟾蜍**。

驗算

每個場景只有 2^2 或 2^3 種可能的指派，所以完整的驗算不過是一張簡短的真值表（truth table）：對每一種指派，檢驗是否每個說話者的陳述都恰好在該說話者是蟾蜍時為真。我們對全部四個場景都做了這樣的窮舉搜尋，每個場景中都恰好只有一種指派能夠成立，就是上面找到的那一種。（唯一性很重要：題目要求我們判定，所以我們必須排除其他指派，而不只是找出一個可行的。）

常見錯誤

- 找到一個沒有矛盾的指派就停下來。你還必須證明其他指派都不可行，而這正是那些「假設他是...」的反證所起的作用。
- 在第 (iii) 部分，把 G 的「這是真的」當作關於 G 自己的陳述，而不是關於 E 的說法的陳述。
- 在第 (iv) 部分，忘記了 K 雖然一言不發，卻仍然包括在「我們全部」和「我們之中恰好有一個」之內。

STEP 之外

這類謎題其實是命題邏輯（propositional logic）的練習：每隻生物是一個布爾變量（Boolean variable）t，每個陳述是一條公式 P，而每個說話者都施加了約束條件 $t \iff P$。判定這樣一組約束條件是否有解，就是可滿足性（satisfiability）問題，它是理論計算機科學的核心課題；而第 (i) 部分那句自我否定的陳述，則是說謊者悖論（liar paradox）的一位溫和的近親。斯穆里安（Raymond Smullyan）的 *What Is the Name of This Book?*（《這本書叫甚麼名字？》）是一本妙趣橫生的騎士與無賴（knights and knaves）謎題集，一步步引領讀者走向哥德爾（Gödel）的不完備定理（incompleteness theorem）。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 11 題

力學 • 拋體與碰撞

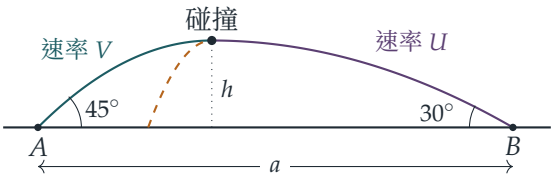
> **STEP II 樣本試卷，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q11

關鍵思路

「兩個質點相撞時各自位於最高點」其實包含了兩個條件：兩個質點（particle）必須用相同的時間到達最高點，而且那一刻必須位於同一位置。時間條件把 U 和 V 聯繫起來，而兩段水平距離之和就是 a。碰撞之後，最要緊的觀察是：兩個質點在最高點時都沿水平方向運動，所以合併後的質點起初完全沒有垂直速度。

解答

我們把兩個質點都當作只受重力作用（不計空氣阻力）的拋體（projectile），在包含 AB 的垂直平面內運動。水平方向取由 A 到 B 為正，垂直方向取向上為正。



證明 $U^2 = 2V^2$

由 A 拋出的質點，初速度的水平分量為 $\frac{V}{\sqrt{2}}$，垂直分量為 $\frac{V}{\sqrt{2}}$。由 B 拋出的質點，水平分量為 $\frac{\sqrt{3}}{2}U$（指向 A），垂直分量為 $\frac{1}{2}U$。

拋體的垂直速度為零時，它正位於最高點。若初始垂直速率為 w，這會在時間 w/g 發生。兩個質點在同一瞬間拋出，所以如果它們在碰撞的一刻都位於各自的最高點，這兩

個時間必須相等：

$$\frac{V}{\sqrt{2}\,g} = \frac{U}{2g} \quad\Longrightarrow\quad U = \sqrt{2}\,V \quad\Longrightarrow\quad U^2 = 2V^2,$$

正如所求。把這個共同的時間記為 $T = \dfrac{V}{\sqrt{2}\,g}$。

想一想 我們不是也應該檢查兩個最高點的高度是否相同嗎？

應該：時間相等是必要條件，但兩個質點還必須相遇。初始垂直速率為 w 的拋體會上升到高度 $w^2/(2g)$。對 A 的質點而言，這是 $\frac{V^2}{2}/2g = \frac{V^2}{4g}$；對 B 的質點而言，這是 $\frac{U^2}{4}/2g = \frac{2V^2}{8g} = \frac{V^2}{4g}$。兩者一致，所以只要 $U^2 = 2V^2$，高度便自動相同。（事實上這是必然的：兩者在同一時間 T 的垂直速度都是零，而且加速度相同，所以兩者的高度都是 $\frac{1}{2}gT^2$。）記

$$h = \frac{V^2}{4g}$$

為碰撞時的高度。

求 a

在時間 T，兩者的水平位置也必須一致。水平速度保持不變，所以在時間 T 內，由 A 拋出的質點向 B 移動了 $\frac{V}{\sqrt{2}}T$，由 B 拋出的質點向 A 移動了 $\frac{\sqrt{3}}{2}UT$。兩者相遇，所以這兩段距離之和為 a：

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{V}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\,V\right)\frac{V}{\sqrt{2}\,g} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{V^2}{2g}(1+\sqrt{3}), \end{aligned}$$

這就是所求的結果。

碰撞之後

在碰撞的一瞬間，每個質點都位於自己的最高點，所以都沿水平方向運動：A 的質點速度為 $+\frac{V}{\sqrt{2}}$，B 的質點速度為 $-\frac{\sqrt{3}}{2}U = -\frac{\sqrt{3}\,V}{\sqrt{2}}$。

想一想 哪一個動量守恆？在哪個方向守恆？

在極短的碰撞過程中，唯一的巨大作用力是兩個質點之間大小相等、方向相反的力；重力大小有限，而且作用時間可以忽略。因此總動量（momentum）守恆。在水平方向，

設質量為 $2m$ 的合併質點的速度為 v，則

$$2m\,v = m\frac{V}{\sqrt{2}} - m\frac{\sqrt{3}\,V}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad v = -\frac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}.$$

負號表示合併質點朝 A 的方向往回運動，速率為 $\dfrac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}$。在垂直方向，兩個質點的垂直速度都是零，所以合併質點起初的垂直速度也是零。

合併質點現在是一個由高度 $h = \frac{V^2}{4g}$ 水平拋出的拋體。它的水平速度維持在 $|v|$。它到達平面時的垂直速率 w 可由 $w^2 = 0 + 2gh$ 求得：

$$w^2 = 2g\cdot\frac{V^2}{4g} = \frac{V^2}{2}, \qquad w = \frac{V}{\sqrt{2}}.$$

因此，速度與水平方向所成的角 ϕ 滿足

$$\begin{aligned}\tan\phi = \frac{w}{|v|} &= \frac{V}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-1)V} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = 1+\sqrt{3},\end{aligned}$$

其中第二行把分母有理化（rationalising the denominator）。至此全題完成。

驗算

- 單位。V^2/g 的單位是 $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$，正是距離應有的單位；而 $\tan\phi$ 是兩個速率之比，所以沒有量綱。留意 $\tan\phi$ 完全不取決於 V 或 g，這是個好兆頭。
- 幾何上是否合理。A 的質點到達最高點時，與 A 的水平距離為 $\frac{V^2}{2g}$；B 的質點到達最高點時，與 B 的水平距離為 $\sqrt{3}\,\frac{V^2}{2g}$。以較大速率、較平的 30° 角拋出的質點走得較遠，而兩段距離之和為 a。
- 數值。取 $V = 7.3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ 和 $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$，我們把兩條軌跡按時間逐步推算，發現在 $t = T$ 時兩者位於同一點 $(2.719, 1.359)$（以米為單位），而且兩者的垂直速度都是零。再把合併質點逐步推算至落到平面，得出 $\tan\phi \approx 2.73205$，與 $1+\sqrt{3} = 2.732050\ldots$ 吻合。

常見錯誤

- 在垂直方向應用動量守恆時，用了非零的垂直速度。在每條軌跡的最高點，垂直速度都是零，這正是這次碰撞如此簡單的原因。
- 把水平動量相加而不是相減：兩個質點正朝相反方向運動。
- 用了 $\tan\phi = |v|/w$（與垂直方向所成的角），而不是 $w/|v|$。

STEP 之外

質點合而為一，是完全非彈性碰撞（perfectly inelastic collision）最簡單的例子：動量守恆，但動能（kinetic energy）並不守恆（這裏損失了相當多，因為兩個質點原本朝相反方向運動）。到了大學，這會發展成在質心參考系（centre-of-mass frame）中研究碰撞：在這個參考系中總動量為零，而損失的能量就是相對於質心的全部動能。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）正是以這種方式處理動量和碰撞，並附有許多出色的習題。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 12 題

力學 • 金屬線上的振動

STEP II 樣本試卷，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

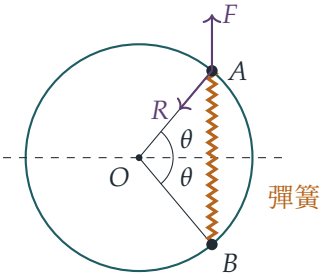
step.maths.org/questions/spec-s2-q12

關鍵思路

金屬線是光滑的，所以只有彈簧的力做功，機械能（mechanical energy）守恆。我們只需要用 θ 表示彈簧的長度（圓的一條弦（chord)），以及每顆珠子的速率。有兩件事要稍作思考。為甚麼平分角 AOB 的直線會保持固定？還有在第 (ii) 部分，如果珠子有足夠的能量到達直徑的兩端，會發生甚麼事？

解答

把珠子看成質點，它們套在水平面上的光滑圓形金屬線上，並由一條遵從胡克定律（Hooke's law）的輕彈簧連接。重力沿鉛垂方向，與金屬線反作用力（reaction）的鉛垂分量互相平衡，所以對水平方向的運動沒有影響。



圖中，F 是彈簧對 A 的推力（沿 BA 方向，因為彈簧起初處於壓縮狀態），R 是金屬線對 A 的反作用力的水平分量。

建立能量方程

用圓上的角度來量度每顆珠子的位置：A 位於角 ϕ_A，B 位於角 ϕ_B。

> **想一想** 為甚麼可以假設兩顆珠子以相同的速率運動，並且關於一條固定的直線對稱？

對通過 O 的鉛垂軸取力矩（moments）。彈簧作用於 A 和 B 的力大小相等、方向相反，並且沿同一條直線 AB 作用，所以它們的力矩互相抵銷。每個金屬線反作用力的水平分量 R 都垂直於金屬線，因此沿着通過 O 的半徑方向，沒有力矩。鉛垂方向的力對鉛垂軸沒有力矩。所以角動量（angular momentum）$ma^2(\dot\phi_A + \dot\phi_B)$ 守恆。由於珠子從靜止釋放，角動量起初為零，因此 $\phi_A + \phi_B$ 保持不變：角 AOB 的平分線是固定的。取它為圖中的虛線，使得 $\phi_A = \theta$ 及 $\phi_B = -\theta$。於是每顆珠子的速率都是 $a\dot\theta$。

彈簧就是弦 AB，長度為 $2a\sin\theta$。它的自然長度（natural length）是 $2a\sin\alpha$，所以伸長量（extension）是 $x = 2a(\sin\theta - \sin\alpha)$，而彈性勢能（elastic energy）是

$$\frac{\lambda x^2}{2\cdot 2a\sin\alpha} = \frac{4\lambda a^2(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{4a\sin\alpha} = \frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

這條公式在 $x < 0$（壓縮）時同樣成立，因為 x 取了平方。動能（kinetic energy）是 $2\cdot\frac12 m(a\dot\theta)^2 = ma^2\dot\theta^2$。金屬線是光滑的，它的反作用力始終垂直於運動方向，所以不做功，能量守恆。釋放時 $\theta = \beta$ 而 $\dot\theta = 0$，所以

$$ma^2\dot\theta^2 + \frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha} = \frac{\lambda a(\sin\beta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

全式乘以 $\sin\alpha/a$，得

$$ma\dot\theta^2\sin\alpha + \lambda(\sin\theta-\sin\alpha)^2 = \lambda(\sin\beta-\sin\alpha)^2,$$

這正是所求的結果。注意彈簧起初處於壓縮狀態，所以 $\beta < \alpha$。

第 (i) 部分

把能量方程對 t 求導：

$$2ma\sin\alpha\,\dot\theta\ddot\theta + 2\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta\,\dot\theta = 0.$$

除以 $2\dot\theta$（只要珠子在運動，這一步就成立，而所得結果可憑連續性推廣至所有 t），得運動方程

$$ma\sin\alpha\,\ddot\theta = -\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta.$$

平衡位置（equilibrium）在 $\theta = \alpha$，此時彈簧處於自然長度。如果 $\beta - \alpha$ 很小，則 θ 會一直接近 α（由能量方程可得 $|\sin\theta - \sin\alpha| \le |\sin\beta - \sin\alpha|$），所以可寫 $\theta = \alpha + \varepsilon$，其

中 ε 很小。準確至一階，$\sin\theta - \sin\alpha \approx \varepsilon\cos\alpha$，而 $\cos\theta \approx \cos\alpha$，後者所乘的量本身已經很小。所以

$$\ddot{\varepsilon} \approx -\frac{\lambda\cos^2\alpha}{ma\sin\alpha}\,\varepsilon,$$

這是簡諧運動（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \lambda\cos^2\alpha/(ma\sin\alpha)$。因此週期（period）是

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda\cos^2\alpha}}.$$

第 (ii) 部分

設 $k = \sqrt{ma\sin\alpha/\lambda}$。由能量方程，

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{k^2}\Big[(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2\Big].$$

珠子在 $\sin\theta - \sin\alpha = \pm(\sin\alpha - \sin\beta)$ 時停下，即當 $\sin\theta = \sin\beta$ 或 $\sin\theta = 2\sin\alpha - \sin\beta$ 時。由 $\theta = \beta$ 出發，θ 會增加（受壓縮的彈簧把兩顆珠子推開），而只要 $\sin\beta < \sin\theta < 2\sin\alpha - \sin\beta$，就有 $\dot{\theta}^2 > 0$。

想一想 是甚麼決定我們處於兩種情況中的哪一種？

關鍵在於 θ 能否在 $2\theta = \pi$ 之前到達第二個停止點；在該處 A 和 B 位於直徑的兩端，而 $\sin\theta$ 達到其最大值 1。這取決於 $2\sin\alpha - \sin\beta$ 是小於還是大於 1。

(a) $\sin\beta > 2\sin\alpha - 1$。這時 $2\sin\alpha - \sin\beta < 1$，所以存在銳角 γ 使得 $\sin\gamma = 2\sin\alpha - \sin\beta$，並且 $\gamma > \alpha$。珠子在 $\theta = \gamma$ 時停下（此時彈簧的伸長量與原來的壓縮量相同），而 θ 在 β 與 γ 之間振盪。去程和回程所需的時間相等，所以

$$T = 2\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_\beta^\gamma \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2}}, \qquad \gamma = \arcsin(2\sin\alpha - \sin\beta).$$

(b) $\sin\beta < 2\sin\alpha - 1$。這時 $2\sin\alpha - \sin\beta > 1 \geq \sin\theta$，所以當 θ 介乎 β 與 $\frac{1}{2}\pi$ 之間時，$\dot{\theta}$ 永不為零：珠子經過直徑兩端時仍在運動。此後弦再次縮短。能量方程只透過 $\sin\theta$ 與 θ 有關，而前者關於 $\frac{1}{2}\pi$ 對稱，所以由 $\frac{1}{2}\pi$ 到 $\pi - \beta$ 的運動，是由 β 到 $\frac{1}{2}\pi$ 的運動的鏡像。珠子在 $\theta = \pi - \beta$ 停下，此時彈簧再次被壓縮至原來的長度，然後把珠子沿原路推回去。（在 $\theta = \pi - \beta$ 時，運動方程給出 $\ddot{\theta} < 0$，因為 $\sin\theta - \sin\alpha < 0$ 而 $\cos\theta < 0$。）一次完整的振盪是 $\beta \to \pi - \beta \to \beta$，相當於把由 β 到 $\frac{1}{2}\pi$ 的四分之一段重複四次：

$$T = 4\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_\beta^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2}}.$$

由於 $\sin\alpha < 1$，我們有 $2\sin\alpha - 1 < \sin\alpha$，所以兩種情況都與 $\beta < \alpha$ 相容。情況 (b) 只會在 $2\sin\alpha - 1 > 0$ 時出現，即當 $\frac{1}{6}\pi < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ 時。

驗算

- 在情況 (a) 中，代換 $\sin\theta = \sin\alpha - (\sin\alpha - \sin\beta)\cos u$ 把積分化為 $\int_0^{\pi} \mathrm{d}u/\cos\theta$。當 $\beta \to \alpha$ 時，它趨向 $\pi/\cos\alpha$，從而得回第 (i) 部分的週期。
- 我們以 $m = 1.3$、$a = 0.7$、$\lambda = 2.1$ 模擬了兩顆珠子在金屬線上各自獨立運動的情況。能量方程在捨入誤差範圍內成立，平分線亦保持固定。取 $\alpha = 0.6$、$\beta = 0.59$ 時，週期為 3.766，而第 (i) 部分給出 3.7657。取 $\alpha = 0.7$、$\beta = 0.4$（情況 (a)）時，週期為 4.8847，而積分給出 4.8846。取 $\alpha = 0.75$、$\beta = 0.1$（情況 (b)）時，週期為 7.0553，而積分給出 7.0553，並且 θ 一如所料在 $\pi - \beta$ 達到最大值。

常見錯誤

- 用 $\lambda x^2/(2a)$ 作為彈性勢能。分母應是自然長度的兩倍，即 $2 \cdot 2a\sin\alpha$。
- 在情況 (b) 中，把積分停在 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，或聲稱珠子在該處停下。珠子經過直徑兩端時速率不為零，所以週期是 $4\int_{\beta}^{\pi/2}$，而不是 $2\int_{\beta}^{\pi/2}$。

STEP 之外

第 (ii) 部分的週期積分無法以初等函數表示。它們與橢圓積分（elliptic integrals）屬同一家族，後者給出單擺（simple pendulum）的精確週期。留意第 (i) 部分的小幅振盪週期與振幅無關，而精確週期則不然。線性化振子與非線性振子之間的這種對比，是經典力學入門課程的核心主題之一。內力作用下的系統的角動量守恆，在本題中令平分線保持固定；Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）對此有嚴謹的論述。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 13 題

力學 • 平衡與力矩

STEP II 樣本試卷，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s2-q13

關鍵思路

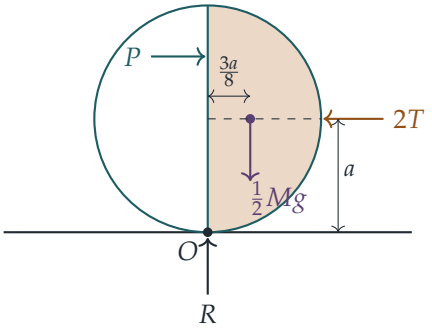
橙子若要散開，各瓣會向外翻倒，每一瓣都繞著球面與桌面接觸的那一點轉動。因此我們沿其中一個切面把橙子切成兩半，然後對其中一半，繞通過該最低點的一條水平線取力矩（moment）。這一半的重量要把它推倒；能把它拉住的只有絲帶，別無其他。另一半施加的力只會令情況更壞，「至少」二字正是由此而來。

解答

模型

我們把朱古力視為均勻的剛體（rigid body），把絲帶視為輕質、整圈張力（tension）同為 T，並假設各瓣大小相等、數目為偶數（真正的朱古力橙有二十瓣），於是有一個通過軸線的切面把橙子分成兩半，每一半都是半球形、夾角為 π 的楔形體。到最後我們會看到，只要切面光滑，這個論證對任何一組橙瓣都成立。

球面與桌面只在一點 O 接觸，即軸線的底端。以 O 為原點建立坐標軸，z 鉛垂向上，x 為水平方向，由軸線指向我們所研究的那一半（圖中右邊的一半）。分界平面是 $x = 0$。設 ℓ 為通過 O 且位於該平面內的水平線（即 y 軸）；我們繞 ℓ 取力矩，並規定若力矩傾向使這一半向外翻倒、遠離軸線，則該力矩為正。



其中一半所受的力

右邊的一半質量為 $\frac{1}{2}M$，它所受的外力如下。

- **重量** $\frac{1}{2}Mg$，作用於質心（centre of mass）。在題目給出的結果中代入 $2\theta = \pi$，可知質心與軸線的距離為
$$\frac{3\pi a \sin(\pi/2)}{16(\pi/2)} = \frac{3a}{8}$$
並位於 $x > 0$ 的一側。它繞 ℓ 的力矩為 $\frac{1}{2}Mg \cdot \frac{3a}{8} = \frac{3}{16}Mga$，屬翻倒方向。
- **桌面**：一個法向反作用力（normal reaction），另外可能有摩擦力（friction），全部作用於 O。由於 O 在 ℓ 上，這些力繞 ℓ 的力矩為零。
- **絲帶**，繞著這一半的赤道。窄絲帶沿法向壓在表面上，每單位長度的力為 T/a（情況就如一條繩繞過光滑曲面）。在角度由 $-\frac{\pi}{2}$ 至 $\frac{\pi}{2}$ 的弧上，各 x 分量之和為
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{T}{a} \cos\phi \, a \, \mathrm{d}\phi = 2T$$
方向指向軸線，而各 y 分量則因對稱而互相抵消。（另一個等價的看法：在絲帶穿過分界平面之處把它剪斷，每個斷口都以張力 T 沿 $-x$ 方向拉扯，同樣得出 $2T$。）這個力完全是水平的，作用於高度 a，所以它繞 ℓ 的力矩為 $2T \cdot a$，屬回復方向。
- **另一半**，作用於整個平面 $x = 0$ 上。這是唯一棘手的力，而我們無須知道它如何分佈。

> ? **想一想** 為甚麼另一半施加的力只會助長這一半翻倒？

把切面上每一小塊所受的力分解為垂直於切面的部分和沿切面的部分（若切面粗糙，後者就是摩擦力）。

- 垂直的部分沿 x 方向。兩半只是互相壓著，並沒有黏在一起，所以這部分是推力，沿 $+x$ 方向。它作用於某個高度 $z \geq 0$，所以它繞 ℓ 的力矩等於 z 乘以它的大小，永不為負：它傾向使這一半向外翻倒。

- 沿切面的部分位於平面 $x = 0$ 內，而這個平面也包含 ℓ。若一個力的作用線（line of action）與 ℓ 位於同一平面內，則作用線要麼與 ℓ 相交，要麼與它平行，所以這個力繞 ℓ 的力矩為零。

因此，無論接觸的細節如何，另一半所貢獻的總力矩 $P_{\text{mom}} \geq 0$，屬翻倒方向。

繞 ℓ 取力矩

這一半處於平衡（equilibrium），所以繞 ℓ 的總力矩為零：

$$2Ta = \tfrac{3}{16}Mga + P_{\text{mom}}.$$

由於 $P_{\text{mom}} \geq 0$，

$$2Ta \;\geq\; \tfrac{3}{16}Mga, \qquad \text{所以} \qquad T \;\geq\; \tfrac{3}{32}Mg,$$

這正是所要證明的結果。等號成立，當且僅當兩半之間完全沒有互相施壓，即兩半僅僅能夠維持在一起。

橙瓣數目不是偶數的情況

假如切面是光滑的，同樣的計算對任何由完整橙瓣組成、夾角為 2θ 的楔形體都適用。取 x 沿它的對稱平面，並取 ℓ 為通過 O 且垂直於該平面的水平線。楔形體的重量為 $\frac{\theta}{\pi}Mg$，作用於距離 $\frac{3\pi a\sin\theta}{16\theta}$ 處，產生的翻倒力矩為 $\frac{3}{16}Mga\sin\theta$。絲帶在它的弧上以 $2T\sin\theta$ 向內拉，作用於高度 a。光滑的切面只會產生垂直於切面的水平推力，而這些推力在 $+x$ 方向的分量不會是負數，所以它們同樣只會增加翻倒力矩。於是 $2Ta\sin\theta \geq \frac{3}{16}Mga\sin\theta$，約去 $\sin\theta$ 後再次得出 $T \geq \frac{3}{32}Mg$。無論我們選取哪一組橙瓣，所得的下界都相同。

驗算

- 題目給出的質心結果在 $2\theta = \pi$ 時給出 $\frac{3a}{8}$，正是大家熟悉的實心半球體質心與其平面的距離。以蒙地卡羅（Monte Carlo）方法估算，這一半的結果為 $0.376a$，而對其他楔形夾角，估算值亦與公式吻合。
- 以數值方法把絲帶在夾角為 2θ 的弧上的法向力加起來，得出 $2T\sin\theta$，例如對半個橙子就是 $2T$。
- 對每一個檢驗過的楔形夾角，所得的下界都同樣是 $\frac{3}{32}Mg \;\approx\; 0.094Mg$（$2\theta = 0.6,\ \pi,\ 2.4,\ 5$）。下界只取決於整個橙子，而與我們選擇怎樣切開它無關，這令人放心。
- 單位：力矩是力乘以長度，而 a 會約去，餘下的是一個力。

常見錯誤

- 繞球心或繞赤道上的一點取力矩。這樣一來，桌面施加的未知力，或另一半施加的未知力，就會進入方程。選取 O 點，正是因為桌面的力繞通過該點的直線沒有力矩。
- 說絲帶對這一半的力是 T。絲帶在這一半的弧的兩端都在拉，所以合力（resultant）是 $2T$。
- 沒有理據就把兩半之間的力設為零。那樣得出的只是等號成立的情況。「至少」二字，來自留意到這個力只能是推力。

STEP 之外

這是一道含有未知內力的靜力學（statics）題目，處理方法是先選取一條軸，消去我們無法求出的未知量，然後利用一個不等式（接觸力只會推，不會拉）來應付餘下的部分。分析磚石拱門和穹頂時，背後也是同一套推理：結構能夠屹立，當且僅當能找到一條始終留在材料內部的推力線。質心的結果本身是球極坐標（spherical polar coordinates）下一個標準的三重積分（triple integral），很值得親自推導一次。想進一步了解剛體平衡，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 14 題

力學 • 剛體的轉動

STEP II 樣本試卷，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s2-q14

關鍵思路

圓盤和質點都繞同一條固定的鉛垂軸轉動，所以最自然的工具是轉動的運動方程（rotational equation of motion）：力矩（torque）= 轉動慣量（moment of inertia）× 角加速度（angular acceleration），並分別應用於兩個物體。兩者之間的摩擦力是一對內力：它令其中一個加快多少（以角動量（angular momentum）計），就令另一個減慢多少。由此立即得出守恆的組合；再把兩條方程相減，便得到一條關於相對角速率的一階方程，而這個相對角速率按指數衰減（exponential decay）。

解答

模型

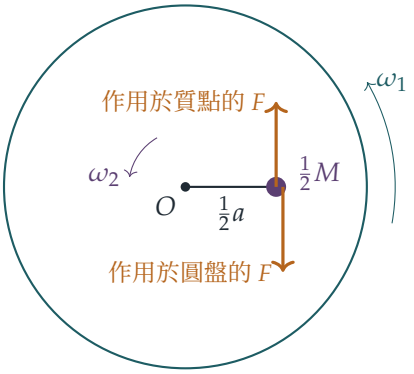
圓盤是一塊均勻薄片（uniform lamina），繞通過其中心 O 的光滑固定軸轉動，所以它對該軸的轉動慣量為

$$I_1 = \tfrac{1}{2}Ma^2.$$

質點的質量為 $\frac{1}{2}M$，由一條輕而剛硬的金屬線固定在距離軸 $\frac{1}{2}a$ 之處，所以它沿半徑為 $\frac{1}{2}a$ 的圓運動，對該軸的轉動慣量為

$$I_2 = \tfrac{1}{2}M\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = \tfrac{1}{8}Ma^2.$$

起初 $\omega_1 = \Omega$ 而 $\omega_2 = 0$，所以在接觸點處圓盤比質點運動得快。因此摩擦力沿質點的運動方向作用於質點（沿切線方向，位於半徑 $\frac{1}{2}a$ 處），而根據牛頓第三定律（Newton's third law），在同一點上有一個大小相等、方向相反的力作用於圓盤。



（俯視圖；$F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$。金屬線的張力沿徑向，所以它對軸沒有力矩。）

運動方程

摩擦力 $F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$ 作用於距離軸 $\frac{1}{2}a$ 之處，並與半徑垂直，所以它對軸的力矩為

$$F \cdot \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2).$$

質點的重量和各法向反作用力（normal reaction）都是鉛垂的，所以它們對鉛垂軸沒有力矩，而軸本身是光滑的。對圓盤而言，摩擦力阻礙轉動：

$$\tfrac{1}{2}Ma^2\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -\tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -k(\omega_1 - \omega_2).$$

對質點而言，摩擦力推動轉動：

$$\tfrac{1}{8}Ma^2\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = 4k(\omega_1 - \omega_2).$$

（對質點，你同樣可以沿切線方向應用牛頓第二定律：$\frac{1}{2}M \cdot \frac{1}{2}a\,\dot{\omega}_2 = F$，這是同一條方程。）

守恆的組合

把第一條方程乘以 4，再加上第二條，

$$4\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -4k(\omega_1 - \omega_2) + 4k(\omega_1 - \omega_2) = 0,$$

所以 $4\omega_1 + \omega_2$ 是常數。在 $t = 0$ 時它等於 $4\Omega + 0$，因此

$$4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega,$$

正如所求。這就是對該軸的角動量守恆（conservation of angular momentum）：$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = \frac{1}{8}Ma^2(4\omega_1 + \omega_2)$，而僅有的外力（軸上的反作用力、重力和鉛垂的反作用力）對該軸都沒有力矩。

求解 ω_1

想一想 我們有兩條耦合的方程。哪一個量能夠獨自滿足一條方程？

兩個變化率都只取決於差 $u = \omega_1 - \omega_2$，所以不妨考慮這個量。把兩條方程相減，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -ku - 4ku = -5ku,$$

其中 $u(0) = \Omega - 0 = \Omega$。分離變數（separating variables）（或認出這是指數衰減），

$$\omega_1 - \omega_2 = u = \Omega\,\mathrm{e}^{-5kt}.$$

把這條式子與 $4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega$ 相加，便消去 ω_2：

$$5\omega_1 = 4\Omega + \Omega\,\mathrm{e}^{-5kt}, \qquad \text{所以} \qquad \omega_1 = \frac{\Omega}{5}\left(4 + \mathrm{e}^{-5kt}\right),$$

正如所求。由此可得 $\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1 = \frac{4}{5}\Omega\left(1 - \mathrm{e}^{-5kt}\right)$。

另一個做法是把 $\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1$ 代入圓盤的方程，得到 $\dot{\omega}_1 = -5k\omega_1 + 4k\Omega$，這是一條線性方程，它滿足 $\omega_1(0) = \Omega$ 的解與上面相同。

驗算

- 在 $t = 0$ 時：$\omega_1 = \frac{1}{5}\Omega(4+1) = \Omega$ 而 $\omega_2 = 0$。正確。
- 當 $t \to \infty$ 時：$\omega_1, \omega_2 \to \frac{4}{5}\Omega$，兩者趨向同一速率，這正是摩擦力最終必然造成的結果。最終的動能（kinetic energy）為 $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}Ma^2\cdot\frac{16}{25}\Omega^2 = \frac{1}{5}Ma^2\Omega^2$，而最初為 $\frac{1}{4}Ma^2\Omega^2$，所以有五分之一的能量因摩擦而損失，這與「完全非彈性」（perfectly inelastic）耦合的預期相符。
- 數值上，取 $M = a = k = \Omega = 1$，把兩條運動方程逐步計算至 $t = 1$，得 $\omega_1 = 0.80135$ 和 $\omega_2 = 0.79461$，與 $\frac{1}{5}(4 + \mathrm{e}^{-5})$ 和 $\frac{4}{5}(1 - \mathrm{e}^{-5})$ 吻合，而 $4\omega_1 + \omega_2$ 自始至終保持為 4。

常見錯誤

- 把質點的轉動慣量當作 $\frac{1}{2}Ma^2$（彷彿它位於圓盤邊緣），而不是 $\frac{1}{2}M(\frac{1}{2}a)^2$。
- 在轉動方程中使用摩擦力本身，而不是它的力矩 $F\cdot\frac{1}{2}a$。
- 在兩條方程中給摩擦力相同的正負號：它令圓盤減慢，卻令質點加快。

STEP 之外

這裏的摩擦力是內力，而 $4\omega_1 + \omega_2$ 的守恆正是碰撞中動量守恆的轉動版本；以指數方式趨向同一速率，與兩個物體以黏滯阻力（viscous drag）耦合的情況是同一套數學。更一般地說，線性系統（linear system）$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ 以 A 的特徵向量（eigenvector）表示時便會解耦（decouple）：在這裏，特徵向量就是組合 $4\omega_1 + \omega_2$（特徵值（eigenvalue）為 0）和 $\omega_1 - \omega_2$（特徵值為 $-5k$）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）細緻地講述剛體轉動和角動量，而 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）則以特徵向量處理線性系統。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 15 題

概率與統計 • 期望值與樣本平均值

STEP II 樣本試卷，第 15 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s2-q15

關鍵思路

國王每天向極大量的小販罰款，所以根據大數定律（law of large numbers），他每天從每名小販身上得到的收入，實際上就等於罰款的期望值（expected value）。因此我們要求出每個方案下的期望罰款。頭兩個方案涉及一組正態變量的樣本平均值（sample mean），其分佈仍然是正態分佈（normal distribution），只是方差（variance）較小。第三個方案是等待時間的問題，所以要用上幾何分佈（geometric distribution）。

解答

設 $W_1, W_2, \ldots$ 為被選中的那箱醃魚各自的重量（以克為單位）。箱中的醃魚基本上是隨機選出的，所以各 W_i 互相獨立（independent），而且每個 $W_i \sim \mathrm{N}(200, 10^2)$。從箱中隨機抽取醃魚，與牠們的重量無關，所以無論我們抽出哪些醃魚、次序如何，牠們仍然是獨立的 $\mathrm{N}(200, 10^2)$ 變量。

我們會用到以下的標準結果：若 $W_1, \ldots, W_m$ 是獨立的 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ 變量，則它們的平均值滿足

$$\overline{W} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} W_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{m}\right).$$

第 (i) 部分

這裏 $m = 625$，所以 $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{625}\right)$，標準差（standard deviation）為 $\frac{10}{25} = 0.4$。於是

$$\mathrm{P}(\overline{W} < 199) = \Phi\left(\frac{199 - 200}{0.4}\right) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) \approx 1 - 0.99379 = 0.00621.$$

期望罰款為

$$1500 \times 0.00621 \approx 9.3 \text{ 克朗}.$$

第 (ii) 部分

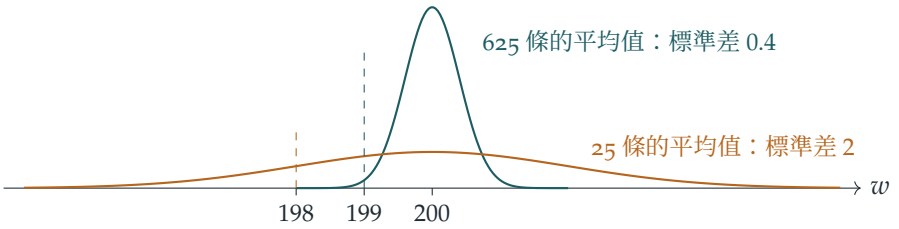
現在 $m = 25$，所以 $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{25}\right)$，標準差為 2。於是

$$\mathrm{P}(\overline{W} < 198) = \Phi\left(\frac{198 - 200}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.84134 = 0.15866,$$

而期望罰款為

$$100 \times 0.15866 \approx 15.9 \text{ 克朗}.$$

下圖說明了為何金額較小的罰款反而勝出。對 625 條醃魚的平均值來說，比平均值低一克的門檻距離平均值有 2.5 個標準差；但對 25 條醃魚的平均值來說，比平均值低兩克的門檻只相距一個標準差。



第 (iii) 部分

設 N 為取出的醃魚數目。每條醃魚重於 200 g 的概率是 $\frac{1}{2}$，因為 200 是一個對稱分佈的平均值，而且 $\mathrm{P}(W = 200) = 0$。抽出的醃魚互相獨立，所以 N 就是在成功概率為 $\frac{1}{2}$ 的獨立試驗中，直至首次成功為止（包括該次在內）的試驗次數。換言之，N 服從幾何分佈：

$$\mathrm{P}(N = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

（嚴格來說，抽完 625 條醃魚後箱子就空了，但當中沒有一條超過 200 g 的機會是 2^{-625}，完全可以忽略不計。）

想一想 怎樣可以不先計算 $\mathrm{E}[N^2]$ 而求出 $\mathrm{E}[N(N-1)]$？

把幾何級數（geometric series）求導兩次。對於 $|x| < 1$，

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

乘以 x^2 並代入 $x = \frac{1}{2}$（$n = 1$ 的一項反正是零）：

$$\mathrm{E}[N(N-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 4.$$

（等價地，取 $p = \frac{1}{2}$，則 $\mathrm{E}[N] = 2$ 及 $\mathrm{Var}(N) = \frac{1-p}{p^2} = 2$，所以 $\mathrm{E}[N^2] = 6$，而 $\mathrm{E}[N^2] - \mathrm{E}[N] = 4$。）因此期望罰款為

$$\mathrm{E}[3N(N-1)] = 3 \times 4 = 12 \text{ 克朗}.$$

結論

在方案 (i)、(ii) 和 (iii) 之下，每名小販每天的期望罰款分別約為 9.3、15.9 和 12 克朗。由於受檢查的箱子數量極多，國王的總收入非常接近檢查次數乘以期望罰款。所以他應該選擇**方案 (ii)**。它的收入比方案 (i) 多大約 70%，比方案 (iii) 多約三分之一。

驗算

- 方案 (iii) 無法查表核對，但這個級數很容易逐項相加：$\frac{3\cdot2}{4} + \frac{3\cdot6}{8} + \frac{3\cdot12}{16} + \cdots = 1.5 + 2.25 + 2.25 + 1.875 + \cdots$。部分和（partial sum）很快就攀升趨近 12。
- 模擬 10^5 箱各有 625 條正態醃魚的箱子，並把三個方案都執行一遍，所得的平均罰款約為 10.2（來自 2×10^4 箱，所以誤差較大）、15.9 和 11.9 克朗。這些數值與 9.31、15.87 和 12 相當接近。

常見錯誤

- 把樣本平均值的標準差當作 $\frac{10}{625}$ 或 $\frac{100}{25}$。被 m 除的是*方差*，所以標準差是除以 $\sqrt{m}$。
- 把 N 當作由 0 開始（只數失敗的次數）。這裏 n 包括那條重的醃魚，所以 $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{2}$，而此時罰款為零。
- 比較被罰款的概率而不是比較期望罰款：方案 (iii) 有一半機會向小販罰款（即 $n \geq 2$ 時），但通常只罰 6 克朗。

STEP 之外

「數量極多，所以用期望值」這個理據就是大數定律；而 $\overline{W}$ 服從方差為 σ^2/m 的正態分佈這一事實，則與中心極限定理（central limit theorem）相伴而來，該定理令這個結論即使在個別重量並非正態分佈時仍然近似成立。謹慎的國王或許還會考慮離散程度：方案 (i)

是罕有但巨額的罰款，其方差遠比其他方案大。藉着對級數求導來求出 $\mathrm{E}[N(N-1)]$ 這類階乘矩（factorial moment），這個想法會引伸出概率生成函數（probability generating function），它是大學一年級概率論的核心工具。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）把這一切都講解得十分清楚。

詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 16 題

概率與統計 • 淘汰賽的概率

STEP II 樣本試卷，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s2-q16

本題在 *Beyond STEP* 第 12.7 節淘汰賽中誰會遇上誰中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/knockout.html

關鍵思路

逐輪追蹤兩位選定的選手 A 和 B。在任何一輪中，只要兩人仍未出局又未曾交手，就只有兩件事要緊：A 是否抽中與 B 對賽？若否，兩人是否都勝出？這兩者都是簡單的概率（probability），而由此得出的乘積會漂亮地逐項相消。至於最後一部分，還有一個巧妙的對稱性（symmetry）論證：數一數整個淘汰賽中的比賽場數。

解答

記 $N = 2^n$，並稱兩位選定的選手為 A 和 B。經過 $r-1$ 輪後，餘下 2^{n-r+1} 位選手，所以第 r 輪有 $M_r = 2^{n-r+1}$ 位選手，而第 n 輪（此時 $M_n = 2$）就是決賽。

我們會反覆用到以下事實：若 A 和 B 同在 M 位隨機配對的選手之中，則 A 的對手等可能地是其餘 $M-1$ 位選手中的任何一位，所以

$$\mathrm{P}(A \text{ 抽中與 } B \text{ 對賽}) = \frac{1}{M-1}.$$

（決賽不設抽籤，但代入 $M = 2$ 時公式給出 1，結果正確。）

第 (i) 部分

在第一輪中 $M_1 = N$，所以

$$\mathrm{P}(A \text{ 和 } B \text{ 在第一輪相遇}) = \frac{1}{2^n - 1}.$$

第 (ii) 部分

設 S_r 為「A 和 B 在第 r 輪開始時都仍在賽事之中」這個事件（event）（這必然表示兩人尚未交手，因為每場比賽的負方即告出局）。在 S_r 發生的條件下，兩人一同晉身第 $r+1$ 輪，當且僅當他們在第 r 輪沒有抽中對賽，然後各自在（不同的）比賽中勝出。兩場比賽的結果互相獨立（independent），勝出的概率各為 $\frac{1}{2}$，所以

$$\mathrm{P}(S_{r+1} \mid S_r) = \frac{M_r - 2}{M_r - 1} \cdot \frac{1}{4}.$$

? **想一想** 怎樣把它化成一個我們真正算得出來的乘積？

記 $M = 2^k$，並留意 $M - 2 = 2(2^{k-1} - 1)$，所以

$$\frac{M-2}{M-1} = \frac{2\,(2^{k-1} - 1)}{2^k - 1}.$$

某一輪的分子（撇除因子 2 不計）正是下一輪的分母。由於 S_1 是必然事件，把 $k = n, n-1, \ldots, n-r+2$ 各輪的結果相乘，便得到一個裂項相消的乘積（telescoping product）：

$$\mathrm{P}(S_r) = \frac{1}{4^{r-1}} \prod_{k=n-r+2}^{n} \frac{2\,(2^{k-1} - 1)}{2^k - 1} = \frac{2^{r-1}}{4^{r-1}} \cdot \frac{2^{n-r+1} - 1}{2^n - 1} = \frac{2^{n-r+1} - 1}{2^{r-1}\,(2^n - 1)}.$$

在 S_r 發生的條件下，兩人在第 r 輪相遇的概率為 $1/(M_r - 1) = 1/(2^{n-r+1} - 1)$，所以

$$\mathrm{P}(A \text{ 和 } B \text{ 在第 } r \text{ 輪相遇}) = \frac{1}{2^{r-1}\,(2^n - 1)}.$$

這條公式簡潔得令人欣喜：每過一輪，在該輪相遇的機會就減半。取 $r = 1$ 便重新得到第 (i) 部分的結果。至於決賽，取 $r = n$：

$$\mathrm{P}(A \text{ 和 } B \text{ 在決賽相遇}) = \frac{1}{2^{n-1}\,(2^n - 1)}.$$

再用對稱性核對一下是否合理：賽制對每位選手一視同仁，所以決賽的兩位選手等可能地是 $\binom{N}{2} = 2^{n-1}(2^n - 1)$ 對選手中的任何一對，由此得出相同的答案。

第 (iii) 部分

對 $r = 1, \ldots, n$，「在第 r 輪相遇」這些事件互斥（mutually exclusive）（兩位選手最多只能交手一次，因為負方會離場），所以我們可利用等比級數（geometric series）把概率相

加：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \text{ 和 } B \text{ 相遇}) &= \frac{1}{2^n-1}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^n-1}\cdot 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\\ &= \frac{2}{2^n}\cdot\frac{2^n-1}{2^n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

? **想一想** 有沒有方法可以完全不用求和就看出這個答案？

有。每場比賽恰好淘汰一位選手，而除冠軍外所有人都會被淘汰，所以比賽總是恰好有 2^n-1 場。每場比賽由一對選手進行，而根據對稱性，$\binom{N}{2}$ 對選手中每一對交手的概率都相同，設為 p。比賽場數的期望值（expected value）等於所有選手對的這些概率之和，所以

$$\binom{2^n}{2}p = 2^n-1 \quad\Longrightarrow\quad p = \frac{2(2^n-1)}{2^n(2^n-1)} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

與求和所得的結果一致。

驗算

- $n=1$：只有兩位選手，他們必定在第一輪相遇，而這一輪就是決賽。三條公式都給出 1。
- $n=2$：四位選手。第 (i) 部分給出 $\frac{1}{3}$，決賽給出 $\frac{1}{6}$，而總和是 $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，與第 (iii) 部分所說的相符。
- $n=3$：把每一種抽籤結果和每一種賽果逐一列舉，準確算出 $\frac{1}{7}$、$\frac{1}{28}$ 和 $\frac{1}{4}$。以 16 位選手模擬 2×10^5 次淘汰賽，得出 0.0664、0.0085 和 0.1247，而準確值則為 $\frac{1}{15}\approx0.0667$、$\frac{1}{120}\approx0.0083$ 和 $\frac{1}{8}$。

常見錯誤

- 忘記了兩位選手若要在較後的一輪相遇，必須先在之前的每一輪都避開對方：因子 $\frac{M-2}{M-1}$ 很容易漏掉。
- 把第 (ii) 部分答作 $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$，即假如兩人互相獨立時雙雙打入決賽的機會。但他們並不獨立：若兩人早早抽中對賽，最多只有一人能夠晉級。

STEP 之外

第 (iii) 部分的論證，其實是配合指示變量（indicator variable）使用的期望值的線性性質（linearity of expectation）：不論各事件是否獨立，比賽場數的期望值都等於所有選

手對各自交手的概率之和。這是概率論和組合數學（combinatorics）中最強大的工具之一，也是用來證明具有指定性質的對象確實存在的「概率方法」（probabilistic method）的基礎。Blitzstein 與 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率入門教科書）有一整章精彩的例子，示範以指示變量立論的方法。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 1 題

純數學 • 數學歸納法

> **STEP III 樣本試卷，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q1

關鍵思路

第 (i) 部分：先算出最初幾個乘積，再用合適的角度去看：只要把每個乘積都寫成分母為 $2n$ 的形式，規律便一目了然。因式分解（factorisation）$1-\frac{1}{m^2}=\frac{(m-1)(m+1)}{m^2}$ 解釋了箇中原因，也令歸納步驟變成一行計算。第 (ii) 部分：固定 n，對 k 作歸納（induct）：在和式中多加一項，其實正是換了個樣子的帕斯卡法則（Pascal's rule）。

解答

第 (i) 部分

記 $P_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$。最初幾個值是

$$P_2=\frac{3}{4},\qquad P_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{2}{3},\qquad P_4=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{16}=\frac{5}{8},\qquad P_5=\frac{5}{8}\cdot\frac{24}{25}=\frac{3}{5}.$$

分母 4、8 提示我們把所有分數都寫成以 $2n$ 為分母：$P_2=\frac{3}{4}$，$P_3=\frac{4}{6}$，$P_4=\frac{5}{8}$，$P_5=\frac{6}{10}$。於是我們猜想

$$P_n=\frac{n+1}{2n}\qquad \text{對於} n\geq 2.$$

用數學歸納法（induction）證明。設 $S(n)$ 為命題 $P_n=\dfrac{n+1}{2n}$。

基礎情況（*base case*）。$P_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$，所以 $S(2)$ 成立。

歸納步驟（*inductive step*）。假設 $S(n)$ 對某個 $n\geq 2$ 成立。由於 $P_{n+1}=P_n\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$，

而 $1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$，故

$$\begin{aligned}P_{n+1}&=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\\&=\frac{n+2}{2(n+1)},\end{aligned}$$

這正是 $S(n+1)$。根據數學歸納法，$S(n)$ 對所有 $n\geq 2$ 成立。

（這個因式分解也解釋了上面的猜想：$P_n=\prod_{m=2}^{n}\frac{m-1}{m}\cdot\prod_{m=2}^{n}\frac{m+1}{m}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}$，兩個乘積都可以逐項相消（telescoping）。）

第 (ii) 部分

固定一個正整數 n，並設 $T(k)$ 為命題

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{n}{r}=(-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

我們對 k 作歸納，證明 $T(k)$ 對 $k=0,1,\ldots,n-1$ 成立。

基礎情況。當 $k=0$ 時，兩邊都等於 $\binom{n}{0}=\binom{n-1}{0}=1$。

歸納步驟。假設 $T(k)$ 對某個滿足 $0\leq k\leq n-2$ 的 k 成立（這樣 $k+1$ 仍在範圍之內）。加上下一項，

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\binom{n}{r}&=(-1)^k\binom{n-1}{k}+(-1)^{k+1}\binom{n}{k+1}\\&=(-1)^{k+1}\left[\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}\right].\end{aligned}$$

想一想 $\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}$ 等於甚麼？

帕斯卡法則指出 $\binom{n}{k+1}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k+1}$：從 n 件物件中選出 $k+1$ 件，某一件指定的物件要麼被選中（其餘 k 件來自另外 $n-1$ 件），要麼沒有被選中（全部 $k+1$ 件都來自另外 $n-1$ 件）。所以方括號內的式子等於 $\binom{n-1}{k+1}$，於是

$$\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\binom{n}{r}=(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k+1},$$

這正是 $T(k+1)$。根據數學歸納法，$T(k)$ 對 $k=0,1,\ldots,n-1$ 成立，證明完畢。

若 $n=1$，唯一的情況是 $k=0$，基礎情況已經涵蓋，所以這個論證在該處無須特別處理。

驗算

- $P_{300} = \frac{301}{600} \approx 0.5017$；用電腦以分數把各因子精確相乘，結果對 2 至 300 的每一個 n 都與 $\frac{n+1}{2n}$ 吻合。當 $n \to \infty$ 時，乘積趨向 $\frac{1}{2}$。
- 當 $n = 4$ 時：部分和（partial sums）$1, 1-4 = -3, -3+6 = 3, 3-4 = -1$ 與 $\binom{3}{0}, -\binom{3}{1}, \binom{3}{2}, -\binom{3}{3}$ 吻合。電腦已對所有 $n \le 79$ 及所有 $k \le n-1$ 精確驗證 (ii)。
- 取 $k = n-1$，再加上最後一項 $(-1)^n\binom{n}{n}$，得 $(-1)^{n-1} + (-1)^n = 0$，這就是大家熟悉的結果 $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r} = (1-1)^n = 0$。

常見錯誤

- 根據約至最簡的分數（$\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}$）來猜想，因而看不出規律：竅門在於把約分還原，寫成統一的形式。
- 在 (ii) 中對 n 而不是對 k 作歸納（可行，但較為繁複），或者忘記了由 k 到 $k+1$ 的一步只需在 $k+1 \le n-1$ 時進行。

STEP 之外

第 (i) 部分是無窮乘積（infinite product）$\prod_{m\ge 2}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{2}$ 的開端。它是歐拉（Euler）乘積 $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{m\ge 1}\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)$ 的特殊情況：把兩邊除以 $m = 1$ 的因子 $1 - x^2$，再令 $x \to 1$ 即可。怎樣理解無窮乘積，以及它們何時收斂（converge），是大學一年級分析學（analysis）的課題。第 (ii) 部分是眾多二項式恆等式（binomial identities）之一，這些恆等式可由帕斯卡法則或生成函數（generating functions）推出：它就是 $(1-x)^n \cdot \frac{1}{1-x} = (1-x)^{n-1}$ 中 x^k 的係數。想了解無窮和與無窮乘積的收斂，Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門書）是很好的讀物。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 2 題

純數學 • 二項式不等式與極限

> **STEP III 樣本試卷，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q2

關鍵思路

設 $y = 1 + x$，其中 $x > 0$，則 y 的冪可寫成二項式展開（binomial expansion），而展開式中每一項都是非負的。因此，我們可以捨去其餘各項，只保留一項，所得的仍然是一個下界（lower bound）。保留含 x 的一項，得到的下界增長速度與 n 相若，足以超越任何固定的 K；若要在除以 n 之後仍能超越 K，便需要一個增長速度與 n^2 相若的下界，所以我們改為保留含 x^2 的一項。

解答

不等式

設 $x \geq 0$，並設 n 為正整數。根據二項式定理（binomial theorem），

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + x^n.$$

由於 $x \geq 0$，首兩項之後的每一項都是非負的，所以

$$(1+x)^n \geq 1 + nx > nx.$$

最後一個不等式（inequality）是嚴格的，原因在於那個 1；正因如此，即使 $x = 0$，結果依然成立（此時不等式變成 $1 > 0$）。

推導 y^n 最終會超過 K

設 $y > 1$，並取 $x = y - 1$，於是 $x > 0$。由第一部分可知，對每個正整數 n，

$$y^n = (1+x)^n > n(y-1).$$

若 $K \leq 0$，則毋須再做甚麼：對每個 n 都有 $y^n > 0 \geq K$，所以取 $N = 1$ 即可。若 $K > 0$，則選取一個整數 N，使得

$$N > \frac{K}{y-1},$$

這是辦得到的，因為 $y - 1 > 0$，所以右邊是一個固定的數。於是對每個整數 $n \geq N$，

$$y^n > n(y-1) \geq N(y-1) > K,$$

其中中間一步用到了 $y - 1 > 0$。這正是我們所需要的結果。注意同一個 N 對所有 $n \geq N$ 都適用，而不僅是對 $n = N$ 適用，因為下界 $n(y-1)$ 隨 n 遞增。

證明 y^n/n 最終會超過 K

由下界 $y^n > n(y-1)$ 只能得出 $y^n/n > y - 1$，而這是一個固定的數，對付不了很大的 K。我們需要為 y^n 找一個增長得比 n 更快的下界。

想一想 這一次，我們應該保留二項式展開中的哪一項？

保留含 x^2 的一項。由於 $x = y - 1 > 0$，展開式中所有項都是正的，所以對每個正整數 n，

$$y^n = (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 > \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

（當 $n = 1$ 時，展開式中並沒有含 x^2 的項，但最後一個不等式仍然成立，因為其右邊等於 0。）兩邊除以 $n > 0$，得

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2}.$$

現在右邊會隨 n 增大而無止境地增長，這正是我們所需要的。若 $K \leq 0$，則取 $N = 1$ 即可，因為 $y^n/n > 0$。若 $K > 0$，則選取一個整數 N，使得

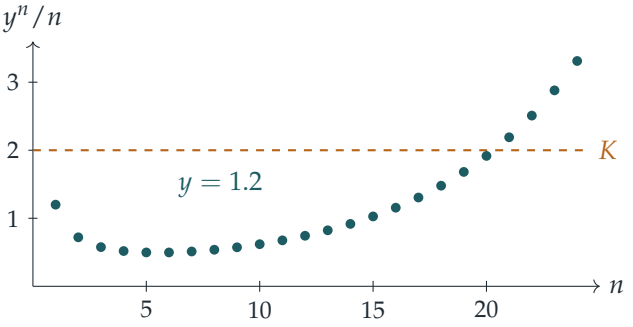
$$N > 1 + \frac{2K}{(y-1)^2}.$$

於是對每個整數 $n \geq N$，我們有 $n - 1 \geq N - 1 > 2K/(y-1)^2$，因此

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2} > \frac{2K}{(y-1)^2} \cdot \frac{(y-1)^2}{2} = K,$$

這就是所要求的結果。

這個下界同樣隨 n 遞增，所以論證對每個 $n \geq N$ 都成立。這一點在這裏十分重要：y^n/n 本身並非總是遞增的。當 y 接近 1 時，它起初會下降（例如，只要 $y < 2$，便有 $y^2/2 < y$），正如 $y = 1.2$ 的略圖所示。因此，我們不能只找出一個滿足 $y^n/n > K$ 的 n，然後聲稱其後各項都會更大。



驗算

試取 $y = 1.01$ 和 $K = 1000$。按照我們的方法，對於 $y^n > K$ 得出 $N = 100\,001$，對於 $y^n/n > K$ 得出 $N = 20\,000\,002$。直接計算可知，其實對每個 $n \geq 1424$，$1.01^n/n > 1000$ 已經成立。我們的 N 遠非最小的可能值，但題目只要求找出某一個 N。我們還以有理數（rational）x 作精確計算，對數千組隨機的 x 和 n 檢驗了兩個不等式，並對數千組隨機的 $y > 1$ 和 K 檢驗了所選的 N（以及許多更大的 n）。

常見錯誤

- 只證明了對某一個 N 有 $y^N > K$，卻沒有解釋為何對每個 $n \geq N$ 都有 $y^n > K$。
- 在最後一部分使用 $y^n > n(y-1)$：除以 n 之後只剩下一個常數，無法超越任意的 K。
- 忘記了 K 可以是負數或零；在這種情況下，$K/(y-1)$ 本身並不是一個合理的下界（不過此時任何 N 都適用）。

STEP 之外

這是大多數學生遇到的第一個嚴格的「ε–N」式論證：它證明了當 $y > 1$ 時，$y^n \to \infty$ 且 $y^n/n \to \infty$。運用同樣的技巧，保留含 x^{k+1} 的一項，便可證明對任何固定的 k 都有 $y^n/n^k \to \infty$，所以指數函數（exponential）的增長勝過任何多項式（polynomial）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 正是由這類推理出發，建立起數列（sequence）與極限（limit）的理論。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 3 題

純數學 • 複數的三角不等式

STEP III 樣本試卷，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q3

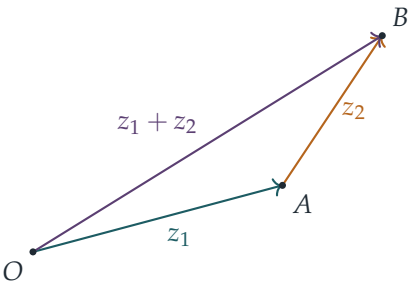
關鍵思路

題中的不等式就是三角不等式（triangle inequality）：三角形任何一邊的長度都不會超過另外兩邊之和。反覆應用這個不等式，便可以用各項模（modulus）之和來界定整個和的模。如果當 $|z| \leq \frac{1}{3}$ 時，方程左方的模總是嚴格小於 1，那麼它就永遠不可能等於 1；而這個上界只需用一個等比級數（geometric series）便可求得。

解答

幾何意義

在阿根圖（Argand diagram）中，把 z_1 看成由原點 O 到點 A 的位移，把 z_2 看成由 A 到點 B 的位移。那麼 $z_1 + z_2$ 就是由 O 直接到 B 的位移。



三角形 OAB 三邊的長度分別是 $|z_1|$、$|z_2|$ 和 $|z_1 + z_2|$。這個不等式說的是：由 O 直接走到 B，路程絕不會比途經 A 更長，也就是三角形的一邊至多等於另外兩邊之和。等號成立，當且僅當三角形退化成一條線段，而 A 位於線段 OB 上，即 z_1 與 z_2 指向同一方向

（其中一個是另一個的非負實數倍，或者其中一個是零）。

利用歸納法（induction），同樣的結論對任意有限多項都成立：

$$|w_1 + w_2 + \cdots + w_n| \le |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|,$$

因為 $|w_1 + \cdots + w_{k+1}| \le |w_1 + \cdots + w_k| + |w_{k+1}|$。從幾何上看，由 n 段直線組成的路徑，其長度至少等於由起點到終點的直線距離。

在 $|z| \le \frac{1}{3}$ 內沒有解

假設 $|z| \le \frac{1}{3}$，並且對每個 i 都有 $|a_i| \le 2$。先用推廣後的三角不等式，再用 $|ab| = |a||b|$，得

$$\begin{aligned}\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| &\le |a_1||z| + |a_2||z|^2 + \cdots + |a_n||z|^n \\ &\le 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots + \tfrac{1}{3^n}\right),\end{aligned}$$

其中第二步用到 $|a_i| \le 2$，以及對每個 k 都有 $|z|^k \le \left(\frac{1}{3}\right)^k$（所涉及的量全部非負，所以可以逐項估計上界）。

括號內是一個有限等比級數，首項為 $\frac{1}{3}$，公比為 $\frac{1}{3}$：

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}\left(1 - 3^{-n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^n} < 1.$$

想一想 上面每一步都只用了 $\le$，為甚麼最後的不等式卻是嚴格的？

嚴格性來自級數，而不是來自三角不等式。由於求和到第 n 項便停止，它與無窮級數的總和 1 相比，恰好少了 $3^{-n} > 0$。所以無論 a_i 取甚麼值，也無論 z 是哪一個滿足 $|z| \le \frac{1}{3}$ 的數，都有

$$\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| \le 1 - 3^{-n} < 1.$$

但假如 z 是一個解，左方就會等於 $|1| = 1$。這是矛盾的，所以方程在 $|z| \le \frac{1}{3}$ 內沒有解，這正是所要證明的。

驗算

- 最壞的情況是 $a_1 = \cdots = a_n = 2$ 且 $z = \frac{1}{3}$，這時每個不等式都變成等式，左方等於 $1 - 3^{-n}$。當 $n = 10$ 時，這個值是 $0.99998\ldots$，僅僅略小於 1。
- 常數 $\frac{1}{3}$ 不能再改進。當每個 $a_i = 2$ 時，實函數 $2(x + x^2 + \cdots + x^n) - 1$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 處取負值，而當 n 很大時，它在稍稍超過 $\frac{1}{3}$ 的地方取正值，所以存在與 $\frac{1}{3}$ 要多接近有多接近的實根。

- 以數值方法測試了 200 000 組隨機選取的 $n \le 30$、滿足 $|a_i| \le 2$ 的 a_i 以及滿足 $|z| \le \frac{1}{3}$ 的 z，左方的模從未達到 1 或以上。

常見錯誤

- 用無窮級數來估計上界，只得到 ≤ 1，這並不能排除等號成立的可能。你需要的是嚴格不等式，而它正是來自級數只有有限項這一點。
- 寫下 $|a_1 z + \cdots + a_n z^n| \le |a_1 z| + \cdots$ 卻沒有說明理由：這是推廣到 n 項的三角不等式，題目設置第一部分正是為此。

STEP 之外

這是**無根區域**（root-free region）最簡單的例子：只要多項式的係數有界，它的根就會被排除在某個圓盤之外。把同樣的估計反過來用，便得到柯西（Cauchy）界：$z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_0$ 的每個根的模都小於 $1 + \max|c_k|$；而在複分析（complex analysis）中，儒歇定理（Rouché's theorem）更把這類論證化為圓內根的個數的精確計算。想看一個極富幾何味道的講述，可以讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 4 題

純數學 • 拋物線的切線

STEP III 樣本試卷，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q4

關鍵思路

一條直線與拋物線（parabola）相切，當且僅當把直線方程代入拋物線方程後，所得的二次方程有重根（repeated root）。因此第一部分只是一行的判別式（discriminant）計算，並且給出一族以 t 標記的切線（tangent）。至於第二部分，可把從某定點所作的切線，看成滿足某個二次方程的 t 值：這樣一來，有關 L 和 M 的一切都可以用兩根之和與兩根之積表示，而這兩個量可直接從係數讀出。

解答

切線

由直線方程得 $x = ty - at^2$。代入 $y^2 = 4ax$ 得

$$y^2 = 4aty - 4a^2t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - 4aty + 4a^2t^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (y - 2at)^2 = 0.$$

這個關於 y 的二次方程有重根 $y = 2at$，所以直線與拋物線恰好交於一點，而且重數為二：直線與拋物線相切。（它並不是與拋物線的軸平行的直線——那種直線也只與拋物線相交一次——因為它不是水平線；當 $t = 0$ 時，它是直線 $x = 0$，即頂點處的切線。）對應的 x 為 $x = t(2at) - at^2 = at^2$，所以切點是

$$(at^2,\ 2at).$$

作為覆核，對 $y^2 = 4ax$ 作隱函數求導（implicit differentiation），得在該點 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2a}{y} = \frac{1}{t}$，這正是 $ty = x + at^2$ 的斜率。

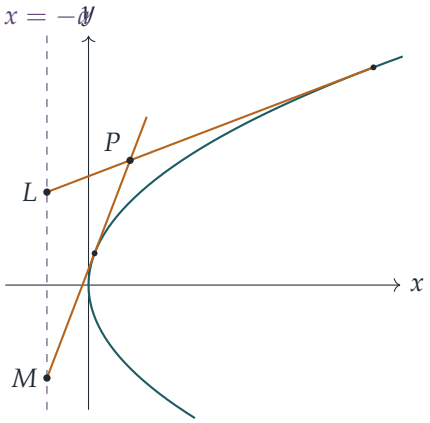
軌跡

拋物線上每一點都可寫成 $(at^2, 2at)$，而且對應的 t 是唯一的，所以每條切線都是直線 $ty = x + at^2$ 的其中一條。設給定的點為 $P = (h, k)$。參數為 t 的切線通過 P，當且僅當

$$at^2 - kt + h = 0.$$

要有兩條切線，就需要兩個相異實根 t_1, t_2，即 $k^2 > 4ah$（P 位於拋物線之外）。這時

$$t_1 + t_2 = \frac{k}{a}, \qquad t_1 t_2 = \frac{h}{a}.$$



參數為 t 的切線與準線（directrix）$x = -a$ 相交於滿足 $ty = -a + at^2$ 之處。只要 $t \neq 0$，便有

$$y = a\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

（若 $t = 0$，切線是 $x = 0$，與準線平行，沒有交點。這種情況只會在 $h = t_1 t_2 a = 0$ 時出現，所以要 L 和 M 存在，必須有 $h \neq 0$，這時 $t_1, t_2 \neq 0$。）因此 L 和 M 分別是 $\left(-a,\, a(t_1 - \frac{1}{t_1})\right)$ 和 $\left(-a,\, a(t_2 - \frac{1}{t_2})\right)$，而由於兩點位於同一條鉛垂線上，

$$\begin{aligned} LM &= \left|a(t_1 - t_2) - a\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)\right| = \left|a(t_1 - t_2) + a\,\frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}\right| \\ &= |a|\,|t_1 - t_2|\left|\frac{t_1 t_2 + 1}{t_1 t_2}\right|. \end{aligned}$$

想一想 怎樣不解二次方程而求得 $t_1 - t_2$？

它的平方是兩根的對稱式：

$$(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = \frac{k^2}{a^2} - \frac{4h}{a} = \frac{k^2 - 4ah}{a^2}.$$

另外

$$\frac{t_1t_2+1}{t_1t_2} = \frac{h/a+1}{h/a} = \frac{h+a}{h}.$$

把 LM 的表達式平方再代入，

$$LM^2 = a^2 \cdot \frac{k^2-4ah}{a^2} \cdot \frac{(h+a)^2}{h^2} = \frac{(h+a)^2(k^2-4ah)}{h^2}.$$

若 $LM = \ell$，兩邊同乘 h^2 得

$$(h+a)^2(k^2-4ah) = \ell^2h^2,$$

所以 $P=(h,k)$ 位於 $(x+a)^2(y^2-4ax) = \ell^2x^2$ 上，這正是所要證明的。

驗算

- 取 $a=1$ 及 $P=(1,3)$，如圖所示。參數滿足 $t^2-3t+1=0$，所以 $t = \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$，而 $t-\frac{1}{t} = \pm\sqrt{5}$（因為 $t_1t_2=1$，故 $1/t_1=t_2$）。因此 $LM = 2\sqrt{5}$，$LM^2=20$，而公式給出 $(1+1)^2(9-4)/1^2 = 20$。
- 準線上的點，即 $h=-a$：公式給出 $LM=0$。事實上，從這樣的點所作的切線，與準線的交點就是該點本身，所以 $L=M$。
- 我們用另一方法獨立地求出切線（直線 $y=k+m(x-h)$，其中 $hm^2-km+a=0$），對超過 14,000 組隨機的 a、h、k 作測試，計算所得的 LM^2 每次都與 $(h+a)^2(k^2-4ah)/h^2$ 吻合。例如 $a=1$、$P=(2,5)$ 時，兩種方法都得出 $LM^2=38.25$。

常見錯誤

- 把切線的參數方程用反了：P 固定而 t 未知，得出的是二次方程 $at^2-kt+h=0$，而不是關於 h 和 k 的方程。
- 寫成 $\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2} = \frac{t_1-t_2}{t_1t_2}$；正確的是 $\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}$，正是這個正負號令兩項相加而非互相抵銷。

STEP 之外

從一點向圓錐曲線（conic）所作的切線，以及連接兩個切點的直線（即該點的極線（polar)），是射影幾何（projective geometry）的起點。在射影幾何中，極點（pole）、極線與準線都可納入同一幅圖像：準線就是焦點（focus）的極線。像本題這樣透過根的對稱函數（symmetric functions）來處理各根，也是邁向方程論（theory of equations）和伽羅瓦理論（Galois theory）的第一步。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 收錄了更多這類風格的坐標幾何題目。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 5 題

純數學 • 方程根的計數

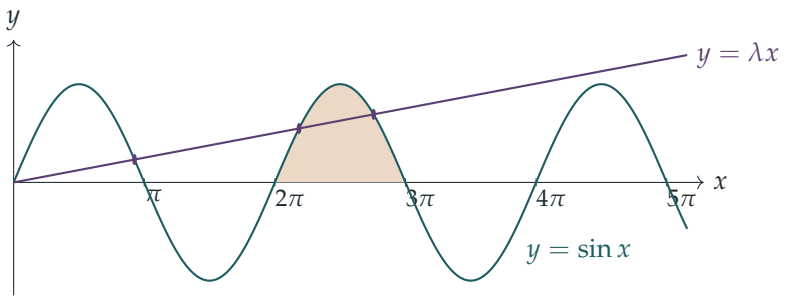
STEP III 樣本試卷，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q5

關鍵思路

把直線 $y = \lambda x$ 與曲線 $y = \sin x$ 畫在一起：方程的解就是兩者的交點。直線只能在 $\sin x > 0$ 的地方與曲線相交，即在正的「拱」$\big((2n-2)\pi, (2n-1)\pi\big)$ 上；又因為 $\sin x$ 在每個拱上都是凹（concave）的，直線與一個拱要麼相交兩次，要麼完全不相交（第一個拱除外，因為它從原點開始）。至於 ϵ 很小時的估算，用麥克勞林級數（Maclaurin series）$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ 就可以了。



（圖中 $\lambda = 0.08$：第一個拱上有一個交點，塗上陰影的第二個拱上有兩個交點，而直線在第三個拱到達頂點之前已升至 1 以上，所以 $N = 3$。）

解答

第 (i) 部分

$\lambda > 1$ **時無解**。曲線 $y = \sin x$ 的斜率（gradient）為 $\cos x \leq 1$，並且通過原點，而直線 $y = x$ 是它在原點的切線（tangent）。當 $x > 0$ 時，我們有 $\sin x < x$（函數 $x - \sin x$ 在

0 處的值為零，其導數（derivative）$1-\cos x \geq 0$ 只在孤立的點上等於零，所以它嚴格遞增（strictly increasing））。從圖像來看，當 $x>0$ 時，曲線嚴格位於其切線 $y=x$ 的下方，而若 $\lambda>1$，直線 $y=\lambda x$ 在該處位於 $y=x$ 的上方。因此

$$\sin x < x < \lambda x \qquad \text{對所有} x>0,$$

故此沒有非零解。

$\lambda = 1-\epsilon^2$ 的情況。當 $x>0$ 時，方程等價於

$$\frac{\sin x}{x} = 1-\epsilon^2.$$

首先，解存在，而且只有一個。在 $(0,\pi]$ 上，函數 $\frac{\sin x}{x}$ 是連續（continuous）的，當 $x\to 0^+$ 時趨向 1，在 $x=\pi$ 處等於 0，所以它在 $(0,\pi)$ 內某處取值 $1-\epsilon^2$；它在該區間上嚴格遞減（由原點連到凹拱上一點的直線，會隨着該點沿拱移動而變得愈來愈平緩），所以這種情況只出現一次。當 $x\geq\pi$ 時再沒有其他解：因為 ϵ 很小，所以 $\lambda x \geq (1-\epsilon^2)\pi > 1 \geq \sin x$。

現在來確定它的位置。利用 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$，

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots = 1-\epsilon^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \cdots = \epsilon^2.$$

? **想一想** 為甚麼可以捨去 x^4 項？我們還未知道 x 是否很小。

當 $\epsilon\to 0$ 時，$\frac{\sin x}{x}\to 1$，而由於 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上由 1 開始嚴格遞減，這個根必定趨向 0。所以當 ϵ 很小時，根也很小，於是 x^4 與 x^2 相比可以忽略。取首階近似，$x^2/6=\epsilon^2$，所以

$$x \approx \epsilon\sqrt{6}.$$

（若保留下一項，$x^2 \approx 6\epsilon^2 + \frac{6}{120}(6\epsilon^2)^2$，可得更精確的結果 $x\approx \epsilon\sqrt{6}\left(1+\frac{3}{20}\epsilon^2\right)$。）

第 (ii) 部分

設 $g(x)=\sin x-\lambda x$，則方程的解就是 g 在 $x>0$ 時的零點。由於當 $x>0$ 時 $\lambda x>0$，每個解都滿足 $\sin x>0$，所以它必定位於其中一個拱

$$A_n = \big((2n-2)\pi,\,(2n-1)\pi\big), \qquad n=1,2,3,\ldots$$

之上。

第一個拱。在原點處，直線的斜率為 $\lambda<1$，比曲線的斜率小，所以直線起初在曲線下方；在 $x=\pi$ 處，直線則在曲線上方（$\lambda\pi>0=\sin\pi$）。由於 $\sin x$ 在 A_1 上是凹的，而直線是直的，兩者在該處恰好相交一次。所以 A_1 上恰好有一個解，它必定是 x_1，並且 $0<x_1<\pi$。

其後的拱。在 $A_{n+1} = (2n\pi, (2n+1)\pi)$ 上，其中 $n \geq 1$，有 $g''(x) = -\sin x < 0$，所以 g 是凹的，最多有兩個零點。在拱的兩端，$\sin x = 0 < \lambda x$，所以該處 $g < 0$。g 的最大值出現在 $g'(x) = \cos x - \lambda = 0$ 之處，即 $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$，而且 $c_n < (2n + \frac{1}{2})\pi$，因為當 $\lambda > 0$ 時 $\arccos\lambda < \frac{\pi}{2}$。由此可知，$g$ 在 $(2n\pi, c_n)$ 上遞增，在 $(c_n, (2n+1)\pi)$ 上遞減，所以：

- 若 $g(c_n) < 0$，直線與這個拱不相交；
- 若 $g(c_n) = 0$，直線與這個拱相切於一點；
- 若 $g(c_n) > 0$，則恰好有兩個解，一個在 $(2n\pi, c_n)$ 內，另一個在 $(c_n, (2n+1)\pi)$ 內。

此外，直線一旦與某個拱不相交，便與其後所有的拱都不相交：若 $x \in A_{n+2}$，則 $x - 2\pi \in A_{n+1}$，所以 $\sin x = \sin(x - 2\pi) < \lambda(x - 2\pi) < \lambda x$。

所以，與直線相交的拱是 $A_1, A_2, \ldots$ 直至最後某一個，它們分別貢獻 $1, 2, 2, \ldots$ 個解，其後可能還有一個切點（tangency）。由於 $N = 2R + 1$ 是奇數，所以沒有切點，而與直線相交的拱恰好是 $A_1, \ldots, A_{R+1}$。把各個解由小至大排列，拱 A_{n+1} $(1 \leq n \leq R)$ 包含 x_{2n} 和 x_{2n+1}，並且

$$2n\pi < x_{2n} < c_n < (2n + \tfrac{1}{2})\pi, \qquad 2n\pi < x_{2n+1} < (2n+1)\pi.$$

第一個不等式給出題目所求不等式的第二行。把 x_{2n+1} 寫成 $x_{2(n+1)-1}$，第二個不等式連同 $0 < x_1 < \pi$，便給出 $(2m-2)\pi < x_{2m-1} < (2m-1)\pi$，其中 $m = 1, \ldots, R+1$。這就是所求的結果。

估算 N。當 λ 很小時，直線與很多個拱相交，所以 $R \geq 1$。在 x_{2R} 處，我們有 $\lambda x_{2R} = \sin x_{2R} \leq 1$，而由上文可知 $x_{2R} > 2R\pi$，所以

$$2R\pi\lambda < 1.$$

另一方面，直線與 $A_{R+2} = \big((2R+2)\pi, (2R+3)\pi\big)$ 不相交。在這個拱的中點 $(2R + \frac{5}{2})\pi$ 處，我們有 $\sin x = 1$，所以必須有 $\lambda(2R + \frac{5}{2})\pi > 1$（否則該處 $g \geq 0$，直線便會與這個拱相交）。把兩者合併，

$$\frac{1}{2\pi\lambda} - \frac{5}{4} < R < \frac{1}{2\pi\lambda}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{1}{\pi\lambda} - \frac{3}{2} < N < \frac{1}{\pi\lambda} + 1.$$

當 λ 非常小時，$\frac{1}{\pi\lambda}$ 非常大，相比之下這個有界的誤差可以忽略，所以

$$N \approx \frac{1}{\pi\lambda}.$$

這是合理的：直線在 $x = 1/\lambda$ 處到達高度 1，而在這一點之前，$\sin x$ 大約有 $\frac{1}{2\pi\lambda}$ 個完整的週期，每個週期貢獻兩個交點。

驗算

- 取 $\epsilon = 0.01$（$\lambda = 0.9999$），用二分法（bisection）求得根為 0.0244953，而 $\epsilon\sqrt{6} = 0.0244949$；兩者之比為 1.000015，正好就是 $1 + \frac{3}{20}\epsilon^2$ 這個修正。
- 當 $\lambda = 0.001$ 時，電腦找到 $N = 317$ 個根，而 $\frac{1}{\pi\lambda} \approx 318.3$；當 $\lambda = 0.01$ 時，電腦找到 31 個根，而估算值為 31.8。就多個 λ 值所找到的全部根，都符合 (ii) 的區間不等式，而 N 也落在上述的界限之內。
- 當 $\lambda = 1.0001$、1.1、2 或 5 時，找不到任何根。

常見錯誤

- 忘記了 x_1 獨自位於第一個拱上：原點也是一個交點，所以這個拱只貢獻一個非零解，而不是兩個。
- 沒有給出理由，便把 x_{2n} 放在所屬拱的前半部分。關鍵在於 g 要過了 $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$ 之後才開始遞減，而這一點位於 $\sin x$ 的頂點之前。

STEP 之外

近似式 $x \approx \epsilon\sqrt{6}$ 是漸近展開（asymptotic expansion）的第一步，而在截斷級數之前先論證根必定很小，正是分析課程所要求的那種嚴謹。利用凹性、單調性（monotonicity）和中間值定理（intermediate value theorem）來數算解的個數，是大學一年級分析課的標準內容；參看 Abbott 的 *Understanding Analysis*。一個相關的經典例子是 $\tan x = x$，它的根趨近 $(n + \frac{1}{2})\pi$，並且出現在熱傳導和振動問題之中。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 6 題

純數學 • 雙曲函數歸約公式

STEP III 樣本試卷，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q6

關鍵思路

被積函數（integrand）$\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u$ 可以很自然地拆成 $\sinh u$ 乘以 $\sinh u\operatorname{sech}^{n+2}u$，而第二個因子除了一個常數倍之外，正是 $\operatorname{sech}^{n+1}u$ 的導數（derivative）。這樣一來，分部積分法（integration by parts）就是順理成章的做法。至於歸約公式（reduction formula），恆等式 $\cosh^2 u-\sinh^2 u=1$ 讓我們可以把同一個積分改寫成兩個 I 之差。

解答

積分恆等式

首先求一個稍後要用的導數。由於 $\operatorname{sech}u=(\cosh u)^{-1}$，由鏈式法則（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{sech}^{n+1}u=-(n+1)\cosh^{-n-2}u\,\sinh u=-(n+1)\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u.$$

因此我們取以下各項作分部積分：

$$f=\sinh u,\qquad g'=\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u,\qquad \text{於是}\qquad f'=\cosh u,\qquad g=-\frac{\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}.$$

由此得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u\,\mathrm{d}u&=\left[-\frac{\sinh u\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}\right]_0^\infty+\frac{1}{n+1}\int_0^\infty \cosh u\operatorname{sech}^{n+1}u\,\mathrm{d}u\\&=-\frac{1}{n+1}\left[\tanh u\operatorname{sech}^n u\right]_0^\infty+\frac{1}{n+1}\int_0^\infty \operatorname{sech}^n u\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

當中用到 $\sinh u\operatorname{sech}^{n+1}u=\tanh u\operatorname{sech}^n u$ 及 $\cosh u\operatorname{sech}^{n+1}u=\operatorname{sech}^n u$。

想一想 為甚麼邊界項（boundary term）會消失？$n > 0$ 這個條件又在哪裏用到？

當 $u = 0$ 時，$\tanh 0 = 0$。當 $u \to \infty$ 時，$\tanh u \to 1$，而 $\operatorname{sech} u = 2/(e^u + e^{-u}) \to 0$，所以 $\operatorname{sech}^n u \to 0$，原因正是 $n > 0$。（若 $n = 0$，該項會趨向 1，而不是 0。）同一個事實 $\operatorname{sech}^n u < 2^n e^{-nu}$ 亦說明了 I_n 在 $n > 0$ 時收斂（converge）。因此邊界項為零，而

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \sinh^2 u \, du = \frac{1}{n+1} I_n,$$

這正是所要證明的結果。

歸約公式

現在用第二種方法計算同一個積分。由於 $\sinh^2 u = \cosh^2 u - 1$，

$$\operatorname{sech}^{n+2} u \sinh^2 u = \operatorname{sech}^{n+2} u \cosh^2 u - \operatorname{sech}^{n+2} u = \operatorname{sech}^n u - \operatorname{sech}^{n+2} u.$$

兩部分在 $[0, \infty)$ 上的積分都收斂（因為 $n > 0$），所以

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \sinh^2 u \, du = I_n - I_{n+2}.$$

與第一個結果比較，

$$I_n - I_{n+2} = \frac{1}{n+1} I_n \quad \Longrightarrow \quad I_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) I_n = \frac{n}{n+1} I_n,$$

即 $(n+1) I_{n+2} = n I_n$，這正是所要證明的結果。

I_6 的值

歸約公式每次把 n 增加 2，所以我們需要一個 n 為偶數的起始值。最容易計算的是

$$I_2 = \int_0^\infty \operatorname{sech}^2 u \, du = \Big[\tanh u\Big]_0^\infty = 1 - 0 = 1.$$

（我們不能由 I_0 開始：它發散（diverge），而且在公式中代入 $n = 0$ 會得出 $I_2 = 0$ 這個錯誤的結論。這正是 $n > 0$ 發揮作用的地方。）於是

$$I_4 = \frac{2}{3} I_2 = \frac{2}{3},$$
$$I_6 = \frac{4}{5} I_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

所以

$$I_6 = \frac{8}{15}.$$



驗算

- 數列 $I_2, I_4, I_6 = 1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}$ 是遞減的，這是必然的：$0 < \operatorname{sech} u \leq 1$，所以冪次愈高，數值愈小。
- 若改由 $I_1 = \int_0^\infty \operatorname{sech} u \, \mathrm{d}u = \left[2 \arctan(\mathrm{e}^u)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$ 開始，公式給出 $I_3 = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{4}$，與直接作數值積分的結果吻合。
- 在 $[0, 60]$ 上使用辛普森法則（Simpson's rule）得 $I_6 \approx 0.5333333$，與 $\frac{8}{15}$ 相符；對於非整數的 n，例如 $n = 0.5$ 和 $n = 2.5$，恆等式和歸約公式同樣通過數值檢驗。

常見錯誤

- 在 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \operatorname{sech}^{n+1} u$ 中弄錯正負號或因子 $n+1$：$\operatorname{sech} u$ 在 $u > 0$ 時遞減，所以導數必定是負數。
- 沒有說明邊界項為何在無窮遠處消失。這是唯一需要用到條件 $n > 0$ 的地方。
- 把答案寫成 $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_2$，卻沒有計算 I_2 的值。

STEP 之外

這類歸約公式與沃利斯公式（Wallis's formula）結構相同：設 $t = \tanh u$（或 $\sin \theta = \tanh u$，即古德曼代換（Gudermannian substitution)），I_n 便化為 $\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} \theta \, \mathrm{d}\theta$，而所得的遞推關係（recurrence）正是沃利斯（Wallis）的遞推關係。到了大學，這些積分會以貝塔函數（Beta function）的值再次出現，$I_n = \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$，從而把遞推關係推廣至所有實數 $n > 0$；而我們處理邊界項時的謹慎態度，正是反常積分（improper integral）理論的起點。若想看嚴謹的論述，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*；若想找更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 7 題

純數學 • 降階法

> **STEP III 樣本試卷，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q7

關鍵思路

當一條二階線性方程（second-order linear equation）含有 x^2y''、xy' 和 y 時，最自然的做法是試 x 的冪：這樣每一項都會變成 x^α 的倍數，而方程就化為關於 α 的條件。一旦知道一個解 y_1，設 $y = y_1 v$ 就是*降階法*（reduction of order）：只含 v 本身的各項會互相抵消，剩下一條關於 v' 的一階方程。

解答

冪函數解

試 $y = x^\alpha$（取 $x > 0$，使 x^α 對任意實數 α 都有意義）。則 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ 及 $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$，所以

$$xy' - y = (\alpha-1)x^\alpha, \qquad x^2y'' = \alpha(\alpha-1)x^\alpha.$$

代入後得

$$x^2y'' + (x-2)(xy'-y) = \big[\alpha(\alpha-1) + (x-2)(\alpha-1)\big]x^\alpha = (\alpha-1)(\alpha+x-2)\,x^\alpha.$$

要使上式對*所有* x 都等於零，括號內的式子必須恆等於零。因子 $\alpha + x - 2$ 取決於 x，不可能恆等於零；因此 $\alpha = 1$。

所以 $y = x$ 是一個解，而這一點可以直接看出：$y'' = 0$ 且 $xy' - y = x - x = 0$。於是任何倍數 $y = Ax$ 也是解，這就是所謂解「與 x^α 成正比」的意思。

通解

按照提示，設 $y = xv$，其中 v 是 x 的函數。則

$$y' = v + xv', \qquad y'' = 2v' + xv'',$$

而方程中出現的那個組合可以化簡得很漂亮：

$$xy' - y = xv + x^2v' - xv = x^2v'.$$

代入方程，

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(2v' + xv'') + (x-2)x^2v' \\ &= x^2\left(xv'' + 2v' + xv' - 2v'\right) \\ &= x^3\left(v'' + v'\right). \end{aligned}$$

想一想 為甚麼所有只含 v 本身（不帶導數）的項都消失了？

因為 $y = x$ 是一個解：假如 v 是常數，$y = xv$ 就是 x 的倍數，左邊便等於零。所以只有 v' 和 v'' 能夠留下來。降階法之所以行得通，正是這個原因，而這也是檢查代數運算的好方法。

在任何不包含 0 的區間上，我們可以除以 x^3，得到

$$v'' + v' = 0.$$

這是關於 $w = v'$ 的一階方程：$w' = -w$，所以 $w = Be^{-x}$，其中 B 為常數。再積分一次（並把正負號併入常數之中），

$$v = A + Be^{-x}.$$

因此通解（general solution）為

$$\boxed{y = Ax + Bxe^{-x}}$$

其中 A 和 B 為任意常數。它含有兩個任意常數，二階線性方程的通解必須如此，而且 x 與 xe^{-x} 這兩部分並非彼此的倍數。

直接驗證新的那一部分：$y = xe^{-x}$ 給出 $y' = (1-x)e^{-x}$ 及 $y'' = (x-2)e^{-x}$，所以

$$x^2y'' + (x-2)(xy' - y) = (x-2)e^{-x}\left[x^2 + x(1-x) - x\right] = 0.$$

關於 $x = 0$ 的一點說明。y'' 的係數在 $x = 0$ 處等於零，所以我們只在遠離 0 的地方除以 x^3。原則上，在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 兩邊可以取不同的常數；但每一個這樣的函數都有 $y(0) = 0$、$y'(0^{\pm}) = A_{\pm} + B_{\pm}$ 及 $y''(0^{\pm}) = -2B_{\pm}$，所以要使 y 在 0 處二階可導，必須有 $B_+ = B_-$，繼而 $A_+ = A_-$。因此 $y = Ax + Bxe^{-x}$ 在整條實數線上也是通解。

驗算

- 如上所述，把 $y = x$ 和 $y = xe^{-x}$ 分別代回方程：兩者都得出零。
- 數值驗算：由 $x = 1$ 出發，以 $y(1) = y_0$、$y'(1) = y_1$ 逐步求解方程，公式預測 $A = y_1$、$B = (y_0 - y_1)e$。取 $y_0 = 2$、$y_1 = 1$，得 $y(4) = 4 + 4e^{-3} \approx 4.199$；以四階龍格—庫塔法（Runge–Kutta）作數值積分，對若干個隨機初始值，結果的誤差都小於 10^{-8}。

常見錯誤

- 由因子 $(\alpha + x - 2)$ 得出 $\alpha = 2 - x$：α 必須是常數，所以這個根不可取。
- 對 $y = xv$ 求 y'' 時出錯（應為 $2v' + xv''$，而不是 $v' + xv''$）。如果含 v 的項沒有抵消，就表示求導時出了錯。
- 停在 $v' = Be^{-x}$，在積分求 v 時忘記第二個常數。

STEP 之外

降階法適用於任何二階線性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$：已知一個解 y_1，代換 $y = y_1 v$ 總會給出一條關於 v' 的一階線性方程，而第二個解可以寫成一個涉及 y_1 和 p 的積分。它與朗斯基行列式（Wronskian）和阿貝爾（Abel）公式關係密切，而在 $x = 0$ 這類點上試 x^{α}，正是以弗羅貝尼烏斯（Frobenius）方法求級數解的第一步。以上內容在 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）中都有論述。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 8 題

純數學 • 向量與柯西–施瓦茲不等式

STEP III 樣本試卷，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q8

關鍵思路

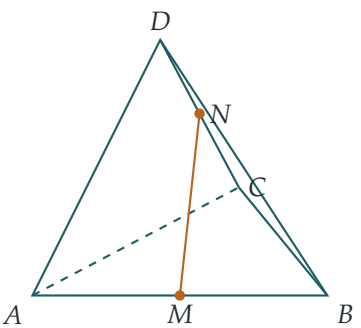
在第 (i) 部分，先為四個頂點設定位置向量（position vector）。我們需要的每一個長度，都是這些向量的某個簡單組合的模（modulus），而長度的平方就是可以展開的點積（dot product）。於是兩邊都會化成同一個式子，而大部分的整理工作都可以靠對稱性（symmetry）完成。在第 (ii) 部分，左邊看起來像是與固定向量 $(3, 2, 6)$ 的點積，而這個向量的長度剛好是整數。這正是柯西－施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality）大派用場的地方。

解答

第 (i) 部分

設四面體（tetrahedron）為 $ABCD$，各頂點相對於任意原點的位置向量為 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$。它的六條棱可分成三對對棱（即沒有公共頂點的棱）：

$$AB \text{ 與 } CD, \qquad AC \text{ 與 } BD, \qquad AD \text{ 與 } BC.$$



考慮 AB、CD 這一對：兩條棱的中點分別是 $M=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ 和 $N=\frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$，所以

$$MN^2=\tfrac{1}{4}\,|\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.$$

另外兩條中線（midline）可用同樣方法求得，因此三條中線的平方和的四倍是

$$S=|-\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2+|-\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2+|-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}|^2.$$

利用 $|\mathbf{u}|^2=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ 展開每一項。每一項都給出 $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2$，另加交叉項 $\pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$；若 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 在該項中同號，交叉項便取正號。

想一想 把三項的交叉項加起來，結果會怎樣？

任取一對頂點，例如 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$。它們在第一項中同號，在另外兩項中異號，所以它們的交叉項合共是 $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。每一對頂點都是如此：三項中的每一項都把四個頂點分成兩對（一對頂點連同與它相對的一對），而每一對頂點恰好只在三項中的其中一項同號。因此

$$S=3\big(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2\big)-2\big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\big).$$

現在看各條棱。例如 $AB^2=|\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。把六條棱全部加起來：每個頂點都在三條棱上，所以每個 $|\mathbf{a}|^2$ 出現三次，而每一對頂點給出一個 $-2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$：

$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=3\sum|\mathbf{a}|^2-2\sum_{\text{各對}}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=S.$$

所以各棱的平方和，等於連接對棱中點的三條線段的平方和的四倍，這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

取

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix},\qquad \text{於是}\qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3x+2y+6,$$

其中 $|\mathbf{a}|=\sqrt{9+4+36}=7$，$|\mathbf{b}|=\sqrt{x^2+y^2+1}$。由於任何實數都不大於它的絕對值，

$$3x+2y+6=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\le|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|=7\sqrt{x^2+y^2+1},$$

這就是所求的不等式。

等號成立的情況。兩步都必須取等號。

- $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ 恰好在 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 平行時成立，因為 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$，而我們需要 $|\cos\theta|=1$。由於 $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$，這表示存在某個 λ 使得 $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$。比較第三個分量得 $1=6\lambda$，所以 $\lambda=\frac{1}{6}$，而 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{3}$。

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ 需要 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$。這裏 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lambda|\mathbf{a}|^2 = \frac{49}{6} > 0$，所以這一步也成立。

直接驗證：當 $x = \frac{1}{2}$，$y = \frac{1}{3}$ 時，左邊是 $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 6 = \frac{49}{6}$，右邊是 $7\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 1} = 7 \cdot \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$。所以等號成立當且僅當

$$x = \tfrac{1}{2}, \qquad y = \tfrac{1}{3}.$$

驗算

- 對於棱長為 1 的正四面體（regular tetrahedron），六條棱的平方和是 6。把它的頂點放在邊長為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的正方體上相間的四個頂點，每條中線都連接一對相對的面的中心，所以長度是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，而 $4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$。
- 以 10^4 個隨機四面體作數值測試，結果與恆等式吻合，誤差只在捨入誤差範圍之內。至於 (ii)，$7\sqrt{x^2+y^2+1} - (3x + 2y + 6)$ 在 2×10^5 個隨機點上都是正數，而它在一個細密網格上的最小值出現在 $(0.5, 0.335)$，接近 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$，而在該點它的值是 0。

常見錯誤

- 漏掉 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leq |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ 這一步，或者在討論等號成立的情況時忽略了它。在這題中因為 $\lambda > 0$，這一步不會出問題，但仍然必須檢查：假如 $\lambda < 0$，兩邊的正負號就會不同。
- 用了 $(3,2,6)$ 和 $(x,y,1)$，卻沒有把 $|\mathbf{a}|$ 算成 7。這題是特意設計的，使 $3^2 + 2^2 + 6^2$ 是一個完全平方數。

STEP 之外

第 (i) 部分是平行四邊形恆等式（parallelogram law）$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$ 在三維空間中的近親。事實上，三條中線相交於形心（centroid），並且互相平分。第 (ii) 部分就是柯西－施瓦茨不等式，它在任何內積空間（inner-product space）中都成立，包括由函數組成的空間，在那裏它可以用來估計積分的上界。想在更廣闊的背景下認識這兩個想法，Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）是很好的起點。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 9 題

純數學 • 矩陣群

> **STEP III 樣本試卷，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q9

關鍵思路

一切都源自一個計算：把兩個這種形狀的一般矩陣相乘，看看結果是甚麼。原來乘積仍是同一形狀，各元素由一條簡單的公式給出，而這條公式幾乎不費吹灰之力就給了我們封閉性（closure）、單位元（identity）、逆元（inverse）、整數子羣（subgroup）和可交換（commute）的條件。記

$$M(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\y&z&1\end{pmatrix}.$$

解答

G 是一個羣

乘積公式。以行乘列，得

$$M(a,b,c)\,M(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\y&z&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a+x&1&0\\b+cx+y&c+z&1\end{pmatrix},$$

即

$$M(a,b,c)\,M(x,y,z)=M(a+x,\ b+cx+y,\ c+z). \tag{$*$}$$

封閉性。元素 $a+x$、$b+cx+y$ 和 $c+z$ 都是實數，所以乘積屬於 G。

結合律（associativity）。題目容許我們假設矩陣乘法滿足結合律。

單位元。單位矩陣是 $I = M(0,0,0)$，它屬於 G，而且對每個矩陣 M 都有 $IM = MI = M$。

逆元。給定 $M(a,b,c)$，我們要找出 $M(x,y,z)$ 使乘積為 $M(0,0,0)$。由 $(*)$，我們需要 $a+x=0$、$c+z=0$ 和 $b+cx+y=0$，所以 $x=-a$、$z=-c$ 及 $y=-b-cx=ac-b$。由於矩陣乘法不滿足交換律，另一個次序也要驗證：

$$M(-a,\,ac-b,\,-c)\,M(a,b,c) = M\big(0,\;(ac-b)+(-c)a+b,\;0\big) = M(0,0,0).$$

所以 $M(a,b,c)^{-1} = M(-a,\,ac-b,\,-c)$，它屬於 G。

羣（group）的四條公理全部成立，所以 G 在矩陣乘法下是一個羣。

整數矩陣

設 H 為所有滿足 $x,y,z \in \mathbb{Z}$ 的 $M(x,y,z)$ 所組成的集合。它是 G 的子集，並且包含 $I = M(0,0,0)$。若 a,b,c,x,y,z 都是整數，則 $a+x$、$b+cx+y$ 和 $c+z$ 也是整數，所以由 $(*)$ 可知 H 在乘法下封閉。逆元 $M(-a,\,ac-b,\,-c)$ 的元素也都是整數，所以 H 在取逆元下封閉。結合律則由 G 承襲而來。所以答案是**是**，H 是 G 的子羣。

> **想一想** 為甚麼單靠乘法下的封閉性並不足夠？

對於無限子集，這是可以出錯的：x,y,z 為非負整數的矩陣 $M(x,y,z)$ 在乘法下封閉，但 $M(1,0,0)$ 的逆元是 $M(-1,0,0)$，並不在該集合之內。在這裏，逆元公式令我們始終留在整數之內，正是這一點使 H 成為子羣。

與所有元素可交換的元素

取 $A = M(a,b,c)$ 和一般的 $B = M(x,y,z)$。由 $(*)$，按兩個次序分別相乘，得

$$AB = M(a+x,\;b+cx+y,\;c+z), \qquad BA = M(x+a,\;y+za+b,\;z+c).$$

第一個和第三個元素必定相同，所以

$$AB = BA \iff cx = az.$$

（特別地，G 不是阿貝爾羣（abelian group）：$M(1,0,0)$ 與 $M(0,0,1)$ 不可交換。）

要 A 與每一個 B 可交換，我們需要對所有實數 x 和 z 都有 $cx = az$。取 $x=1$、$z=0$ 得 $c=0$；取 $x=0$、$z=1$ 得 $a=0$。反過來，若 $a=c=0$，則對所有 x,z 都有 $cx = 0 = az$。所以與整個 G 可交換的元素恰好是

$$A = M(0,b,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

有，這樣的 A 存在：任何 $b \neq 0$ 都給出 $A \neq I$，例如 $A = M(0,1,0)$。由 $(*)$，對 G 中每一個 $B = M(x,y,z)$ 都有 $M(0,1,0)\,M(x,y,z) = M(x,\,1+y,\,z) = M(x,y,z)\,M(0,1,0)$。

驗算

- G 中每個矩陣都是下三角（lower triangular）矩陣，而且對角線上全是一，所以它的行列式（determinant）為 1，必定可逆：我們求得的逆矩陣必然存在，而且同樣是這種形狀。
- 數值驗算：取 $A = M(2,3,5)$ 和 $B = M(1,0,0)$，由 $(*)$ 得 $AB = M(3,8,5)$，但 $BA = M(3,3,5)$，所以 A 與 B 不可交換，正如 $cx = 5 \neq 0 = az$ 所預測的一樣。我們亦以分數作精確運算，用數千個隨機矩陣驗證了乘積公式、逆元公式和可交換的條件。

常見錯誤

- 只驗證一邊的逆元。在非阿貝爾的情況下，值得把兩個乘積都確認一次（或者指出對方陣而言，單邊逆元自動就是雙邊逆元）。
- 以「G 不是阿貝爾羣，所以沒有」來回答最後一部分。非阿貝爾羣仍然可以有與所有元素可交換的非單位元元素，而這個羣正是如此。
- 忘記逆命題：證明了 $a = c = 0$ 是必要條件之後，我們還須驗證這樣的 A 確實與每一個 B 可交換。

STEP 之外

這就是*海森堡羣*（*Heisenberg group*），而與所有元素可交換的元素組成它的*中心*（*centre*）$Z(G)$，在這裏就是矩陣 $M(0,b,0)$，相當於實數在加法下所成的羣的一個複本。整數版本 H 是離散海森堡羣，是羣論和幾何學中備受喜愛的例子；海森堡羣本身則透過位置與動量的對易關係出現在量子力學之中。關於羣、子羣和中心，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 10 題

純數學 • 模算術

> **STEP III 樣本試卷，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q10

關鍵思路

兩部分都與餘數（remainder）有關，所以應選一個合適的數，以它為模（modulo）來計算。在 (i) 中，平方數模 8 只能取少數幾個值，而這些值中任取三個，相加都不可能得到 7。在 (ii) 中，把各個冪改寫，使兩項在模 17 下有相同的底；這樣兩個係數之和便是 17 的倍數。

解答

第 (i) 部分

*奇數的平方。*把奇數寫成 $2k+1$，其中 k 為整數。則

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

兩個連續整數 k 與 $k+1$ 之中必有一個是偶數，所以 $k(k+1)$ 是偶數，而 $4k(k+1)$ 是 8 的倍數。因此，每個奇數的平方除以 8 的餘數都是 1。

*偶數的平方。*把偶數寫成 $2k$。則 $(2k)^2 = 4k^2$。

- 若 k 是偶數，設 $k = 2j$，則 $4k^2 = 16j^2$，是 8 的倍數：餘數為 0。
- 若 k 是奇數，則 k^2 是奇數，設 $k^2 = 2j+1$，於是 $4k^2 = 8j+4$：餘數為 4。

所以每個偶數的平方除以 8 的餘數是 0 或 4。

*推論。*每個平方數模 8 都同餘（congruent）於 0、1 或 4（這包括 $0^2 = 0$，即我們容許三個平方數中有些是零）。假設 $N = a^2 + b^2 + c^2$。則 $N \bmod 8$ 是三個各取自 $\{0, 1, 4\}$ 的數之和的餘數。按其中有多少個等於 4 來分類：

4 的個數	其餘各數之和的可能值，以及總和模 8 的值
0	$0,1,2,3$
1	$4+\{0,1,2\}=4,5,6$
2	$8+\{0,1\}\equiv 0,1$
3	$12\equiv 4$

可能的餘數是 $0,1,2,3,4,5,6$，而 7 從未出現。形如 $8n+7$ 的數除以 8 的餘數是 7，所以它不可能是三個平方數之和。

想一想 為甚麼不能只驗證 7 本身不是三個平方數之和？

因為這個命題涉及無窮多個數 $7,15,23,\ldots$，逐一驗證永遠做不完。以 8 為模來計算，就能一次過處理所有情況：無論 a、b、c 是甚麼，要緊的只是它們的餘數，而上表已涵蓋每一種情形。

第 (ii) 部分

把各個冪拆開，使每一項都是常數乘以一個 n 次冪：

$$2^{3n+1}=2\cdot 8^n, \qquad 3\left(5^{2n+1}\right)=15\cdot 25^n.$$

由於 $25=17+8$，故 $25\equiv 8 \pmod{17}$，因此對所有 $n\geq 0$ 都有 $25^n\equiv 8^n \pmod{17}$（同餘式可以相乘）。於是

$$\begin{aligned} 2^{3n+1}+3\left(5^{2n+1}\right) &= 2\cdot 8^n+15\cdot 25^n \\ &\equiv 2\cdot 8^n+15\cdot 8^n \\ &= 17\cdot 8^n\equiv 0 \pmod{17}. \end{aligned}$$

所以對所有整數 $n\geq 0$，17 整除 $2^{3n+1}+3(5^{2n+1})$，這正是所要證明的。

想一想 如果我沒有學過同餘，怎麼辦？

同樣的想法可以用歸納法（induction）來實現。設 $f(n)=2\cdot 8^n+15\cdot 25^n$。則 $f(0)=17$，並且

$$f(n+1)-8f(n)=15\cdot 25^{n+1}-15\cdot 8\cdot 25^n=15\cdot 25^n(25-8)=17\cdot 15\cdot 25^n,$$

所以 $f(n+1)=8f(n)+17\cdot 15\cdot 25^n$。若 $17\mid f(n)$，則 $17\mid f(n+1)$，由歸納法即得結論。

驗算

試試較小的情況。$7 = 4+1+1+1$ 需要四個平方數，而 $15 = 9+4+1+1$ 同樣需要四個。另一方面，$6 = 4+1+1$ 和 $14 = 9+4+1$ 則沒有問題。電腦搜尋證實，在 5000 以內沒有任何形如 $8n+7$ 的數是三個平方數之和。至於 (ii)：$n = 0$ 時得 $2+15 = 17$，$n = 1$ 時得 $16+375 = 391 = 17\times 23$。我們亦已驗證，對由 0 至 299 的每個 n，該式都可被 17 整除。

常見錯誤

- 忘記 0 也是平方數，所以「三個平方數之和」其實可能只用了一個或兩個非零的平方數。上面的論證已自動包括這種情況，因為 0 是其中一個剩餘（residue）。
- 以「$4k^2+4k$ 可被 4 整除」為理由，說奇數的平方是 1 mod 8：這只能得出 1 mod 4。你還需要 $k(k+1)$ 所提供的因數 2。

STEP 之外

第 (i) 部分是勒讓德（Legendre）三平方和定理（three-square theorem）中較容易的一半：一個正整數是三個平方數之和，當且僅當它不是 $4^a(8n+7)$ 的形式。逆命題（converse）的方向困難得多，需要用到二次型（quadratic forms）的理論。相比之下，拉格朗日（Lagrange）證明了每一個正整數都是四個平方數之和。第 (ii) 部分是 $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ 中的日常算術，大學一年級的課程會由此發展出羣（groups）和環（rings）的研究。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）對同餘和平方和有十分精彩的講解。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 11 題

力學 • 一階微分方程

STEP III 樣本試卷，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q11

本題在 *Beyond STEP* 第 11.13 節鏟雪車問題中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/snowplough.html

關鍵思路

每部鏟雪車的速率都以積雪深度表示，而深度則取決於鏟雪車何時到達某一點。因此，很自然會把時間看成位置的函數，並寫出 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$，即速率的倒數（reciprocal）。對第一部鏟雪車而言，深度就是原有深度加上其後落下的雪；對第二部而言，關鍵的觀察是：它前方的雪，只是從第一部鏟雪車清理該處之後才開始累積的。

解答

把每部鏟雪車看成沿路移動的一點，並由共同的起點量度距離。全文中，深度以米為單位，時間以秒為單位，距離以米為單位。

第 (i) 部分

在時間 t，第一部鏟雪車遇到的雪自 $t = 0$ 起一直不受干擾地落下，所以其深度為

$$z = h + kt.$$

因此速率為

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k} = \alpha t + \frac{\alpha h}{k}.$$

（這裏取倒數並無問題，因為速率為正，所以 x 是 t 的嚴格遞增函數（strictly increasing function）。）這個方程對 t 是線性的，最簡潔的寫法是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(t+\frac{h}{k}\Big)=\alpha\Big(t+\frac{h}{k}\Big).$$

由此得 $t+h/k=Ce^{\alpha x}$，其中 C 為常數。當 $x=0$ 時 $t=0$，所以 $C=h/k$，而行走 x 米所需的時間為

$$t_1(x)=\big(e^{\alpha x}-1\big)\frac{h}{k}\text{ 秒},$$

正如所求。

第 (ii) 部分

建立方程。 設在時間 $t>T$，第二部鏟雪車位於位置 y。第一部鏟雪車在第 (i) 部分所得的時間 $t_1(y)$ 經過這一點，並把該處的雪全部清除。

> **想一想** 第二部鏟雪車前方的積雪深度是多少？

不是 $h+kt$：第一部鏟雪車駛過後，留下的是光禿禿的路面。在位置 y，雪自時間 $t_1(y)$ 起由零開始以速率 k 累積，所以深度為

$$z=k\big(t-t_1(y)\big).$$

（這需要 $t>t_1(y)$，即第二部鏟雪車仍在第一部後面；在兩車相遇之前，這一點都成立。）因此第二部鏟雪車的速率為

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{\alpha k\big(t-t_1(y)\big)}\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=t-\big(e^{\alpha y}-1\big)\frac{h}{k},$$

這正是題目給出的方程。第二部鏟雪車在時間 T 由原點出發，所以初始條件（initial condition）是：當 $y=0$ 時 $t=T$。

驗證解。 把題目提出的解寫成

$$t=t_1(y)+g(y),\qquad g(y)=\Big(T-\frac{\alpha h y}{k}\Big)e^{\alpha y}.$$

於是 $t-t_1(y)=g(y)$，所以我們需要 $\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}t/\mathrm{d}y=g(y)$。求導，並對 g 使用積法則（product rule），得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}&=\frac{\alpha h}{k}e^{\alpha y}\;-\;\frac{\alpha h}{k}e^{\alpha y}\;+\;\alpha\Big(T-\frac{\alpha h y}{k}\Big)e^{\alpha y}\\&=\alpha\,g(y),\end{aligned}$$

其中第一項是 $t_1'(y)$，其後兩項是 $g'(y)$。所以微分方程（differential equation）成立。此外，當 $y=0$ 時，$t=0+T\cdot 1=T$，所以初始條件亦成立。

為甚麼這就是所求的唯一解？這個方程是一階線性方程：若 t 和 $\tilde{t}$ 都滿足它，則兩者之差 u 滿足 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = \alpha u$，所以 $u = u(0)\mathrm{e}^{\alpha y}$。兩者都滿足 $t(0) = T$，所以 $u(0) = 0$，從而 $u \equiv 0$。因此，通過 $(y,t) = (0,T)$ 的解恰好只有一個，而我們已經找到了它。

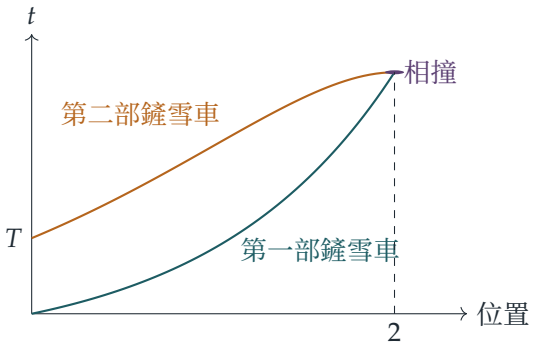
（如果你想直接把它推導出來：乘以積分因子（integrating factor）$\mathrm{e}^{-\alpha y}$ 可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(t\mathrm{e}^{-\alpha y}\right) = -\frac{\alpha h}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha y}\right)$，再由 0 積分至 y，便會得到同一條公式。）

相撞。 若兩部鏟雪車在同一時間到達某一點 y，它們便會在該點相撞；也就是說 $t = t_1(y)$，即 $g(y) = 0$。由於 $\mathrm{e}^{\alpha y} > 0$，這種情況恰好在以下條件成立時出現：

$$T - \frac{\alpha h y}{k} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{kT}{\alpha h}.$$

當 $0 \le y < kT/(\alpha h)$ 時，我們有 $g(y) > 0$（取 $\alpha, h, k > 0$，因為速率必須為正），所以第二部鏟雪車到達每個這樣的點的時間都嚴格遲於第一部，兩車不會更早相遇。因此，兩部鏟雪車在行走了 $kT/(\alpha h)$ 米時相撞。 ■

下圖顯示當 $h = k = \alpha = 1$ 及 $T = 2$ 時，兩條路徑在 (y,t) 平面上的情況；兩條曲線之間的時間差 $g(y)$ 在 $y = 2$ 處縮減至零。



驗算

- 單位：α 的單位是 m^{-1}（因為 $k/(\alpha z)$ 是速率），所以 αx 是無量綱（dimensionless）的，h/k 是時間，而 $kT/(\alpha h)$ 是長度。
- 若 $T = 0$，兩部鏟雪車同時出發，公式給出在距離 0 處相撞；第一部鏟雪車領先的時間 T 越大，相撞的地點便沿路推得越遠，這與預期相符。
- 數值上，對多組隨機選取的 h、k、α 和 T 的值，把每部鏟雪車的運動逐步向前推算（對第二部而言，是由 $t = T$ 時 $y = 0$ 出發，按 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 1/\big(\alpha(t - t_1(y))\big)$ 推算），所得結果與公式相符，誤差小於 10^{-8}。取 $h = k = \alpha = 1$ 及 $T = 2$，如圖中所示，兩部鏟雪車都在時間 $\mathrm{e}^2 - 1 \approx 6.39\,\mathrm{s}$ 到達 $y = 2$。

常見錯誤

- 對第二部鏟雪車也使用深度 $h + kt$。它所鏟的路面在時間 $t_1(y)$ 已被清理過，所以深度是 $k(t - t_1(y))$。
- 驗證解的時候忘記了初始條件：當 $y = 0$ 時 $t = T$；單單是微分方程的解並不足夠。
- 寫成 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 而不是 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}y$：以時間作為因變量（dependent variable），方程便會變成線性，容易處理。

STEP 之外

這屬於經典的「鏟雪車問題」（snowplough problem）一類題目，而把因變量與自變量（independent variable）的角色互換、使方程變成線性的技巧，在大學一年級的微分方程課程中經常用到。上文的唯一性論證，是初值問題（initial value problem）的存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem）的一個最簡單特例。還要留意，當第二部鏟雪車前方的積雪薄至全無時，它的速率會趨向無限大，這反映的是模型的局限，而不是現實情況。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）涵蓋一階線性方程、積分因子和唯一性。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 12 題

力學 • 桿的平衡

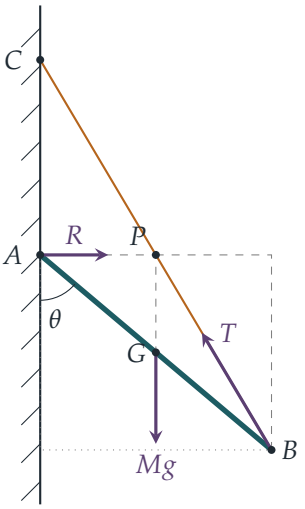
> **STEP III 樣本試卷，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q12

關鍵思路

桿只受三個力作用：它的重量、光滑牆壁的反作用力（reaction），以及繩的張力（tension）。使物體保持平衡（equilibrium）的三個不平行的力必定通過同一點，而在這題中，這一點很容易找到。它完全確定了整個幾何結構，之後只需分解一次力，便可求得張力。

解答

模型。桿是均勻的，所以它的重量 Mg 作用於中點 G。牆壁是光滑的，所以在 A 的反作用力 R 是水平的（垂直於牆壁）。繩是輕而不可伸長的，所以它以張力 T 拉着 B，方向沿 BC。



桿的傾斜角度

反作用力 R 沿着通過 A 的水平線作用，而重量則沿着通過 G 的鉛垂線作用。這兩條線相交於點 P，它與 A 同高，並位於 G 的正上方（或正下方）。由於三個力處於平衡，它們對 P 的力矩（moment）必須互相抵銷；R 和 Mg 對 P 都沒有力矩，所以 T 也沒有，因此繩所在的直線必定通過 P。

? **想一想** 桿從 A 出發，是向上還是向下？

從牆壁起量度水平距離。B 與牆壁的距離是 $L\sin\theta$，其中 θ 是桿與鉛垂線之間的夾角，而 G（因而 P 也一樣）與牆壁的距離是它的一半，即 $\frac{1}{2}L\sin\theta$。繩從 B 成一直線伸延至牆上的 C，所以水平方向上走了一半的點，也就是繩上走了一半的點：P 是 BC 的中點。因此 P 的高度是 B 和 C 兩點高度的平均值。但 P 與 A 同高，而 C 在 A 之上，所以 B 必定在 A 之下，而且低於它的距離恰好等於 AC。

所以桿是從 A 向下垂的。設 θ 為桿與向下鉛垂線的夾角。那麼 B 在 A 之下的深度是 $L\cos\theta$，於是 $AC = L\cos\theta$。相對於 B 來說，點 C 的水平距離是 $L\sin\theta$，高度則高出 $L\cos\theta + L\cos\theta = 2L\cos\theta$。由於繩長為 αL，由畢氏定理（Pythagoras' theorem）得

$$\alpha^2L^2 = L^2\sin^2\theta + 4L^2\cos^2\theta = L^2\left(1 + 3\cos^2\theta\right),$$

所以

$$\cos^2\theta = \frac{\alpha^2 - 1}{3}, \qquad \text{即} \qquad \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{3}},$$

而桿是從 A 向下伸出，與鉛垂線成這個角度。

α 的可能值

我們需要 C 嚴格地在 A 之上，所以 $\cos\theta > 0$。（若 $\cos\theta = 0$，則 C 與 A 重合，桿是水平的；這時 A、B、C 共線（collinear）。）我們亦需要 A、B、C 不共線，所以桿不是鉛垂的：$\sin\theta \neq 0$，即 $\cos^2\theta < 1$。因此

$$0 < \frac{\alpha^2 - 1}{3} < 1 \iff 1 < \alpha^2 < 4 \iff 1 < \alpha < 2,$$

當中用到 $\alpha > 0$。反過來說，對於這個範圍內的任何 α，上述角度都存在，而按這個構造所得的位形中，三個力共點（concurrent），所以力矩平衡，而下文分解力所得的 T 和 R 均為正數。可能值的集合是 $1 < \alpha < 2$。

張力

沿鉛垂方向分解力（resolve）。繩與鉛垂線所成角的餘弦是（鉛垂上升高度）/（長度）$= 2L\cos\theta/(\alpha L)$，而 R 是水平的，所以

$$T \cdot \frac{2\cos\theta}{\alpha} = Mg \quad\Longrightarrow\quad T = \frac{Mg\alpha}{2\cos\theta} = \frac{Mg\alpha}{2}\left(\frac{3}{\alpha^2-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

這裏代入了 $\cos\theta = \sqrt{(\alpha^2-1)/3}$（取正根，因為 $\cos\theta > 0$）。這就是所要求的結果。

為完整起見，沿水平方向分解力可得 $R = T \cdot \dfrac{L\sin\theta}{\alpha L} = \frac{1}{2}Mg\tan\theta > 0$，所以牆壁確實把桿向外推，正如牆壁應有的表現。

驗算

- 當 $\alpha \to 2^-$ 時，$\cos\theta \to 1$：桿鉛垂地懸在 A 之下，繩沿着桿對摺回來，而 $T \to Mg$，因為這時繩承擔了全部重量。當 $\alpha \to 1^+$ 時，$\theta \to 90°$ 且 $T \to \infty$：一根接近水平的桿需要極大的張力才能支撐得住。
- 取 $\alpha = 1.5$，我們得到 $\cos\theta \approx 0.6455$（$\theta \approx 49.8°$）及 $T \approx 1.162\,Mg$。我們以數值方法驗證過：對於在 $(1,2)$ 內隨機選取的數千個 α，對 A 的力矩恰好只在一個角度為零，這個角度與公式吻合，張力亦然；而當 α 在 $(1,2)$ 之外時，並不存在平衡狀態。

常見錯誤

- 把桿畫成從 A 向上傾斜，就像梯子問題那樣。共點的論證迫使 B 在 A 之下，而圖畫錯了的話，方程便沒有相容的解。
- 忘記光滑牆壁的反作用力是水平的，因而引入了不必要的摩擦力或鉛垂分量。

- 把 $\alpha = 1$ 或 $\alpha = 2$ 包括在內：這兩個值給出共線（退化）的位形，而題目已把這種情況排除。

STEP 之外

三力原理是靜力學（statics）中一個一般事實的特殊情況：一個力系處於平衡，當且僅當它的合力以及它對任意一點的合力矩都等於零。像我們選取 P 那樣巧妙地選點，往往是最快捷的途徑。工程力學中對桁架、纜索和框架的分析，背後也是同一個想法。若想深入而全面地了解力與力矩，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 13 題

力學 • 滾動圓環

STEP III 樣本試卷，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

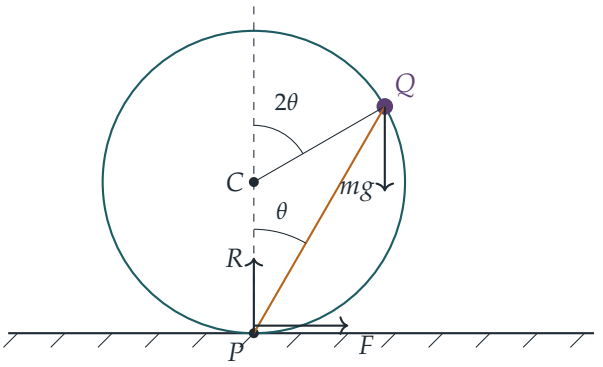
step.maths.org/questions/spec-s3-q13

關鍵思路

由於圓環是輕的，系統中唯一的動能就是質點的動能；又由於圓環作滾動，摩擦力不作功。因此能量守恆（energy conservation）可立即給出速率。滾動亦完全確定了幾何關係：圓環轉過 2θ 之後，其中心已移動了距離 $2a\theta$，由此可把 x 和 y 單用 θ 表示。最後，輕圓環不能承受任何淨力，所以桌面的反作用力恰好就是質點的加速度所要求的力，而且它不能是負數。

解答

把圓環模型化為一個只滾不滑的輕剛性圓，把質點視為固定在環邊上的點質量。設 P 為圓環與桌面的接觸點，C 為圓心，Q 為質點。取圓環沿正 x 方向滾動，使 θ 由 0 開始增加。



這裏 R 和 F 分別是桌面在 P 點作用於圓環的法向反作用力（normal reaction）和摩擦力

(friction)，而弦 PQ 與鉛垂線的夾角為 θ（即圓心角 2θ 的一半）。

速率

R 和 F 都作用於 P 點，而由於圓環作滾動，該點在瞬間是靜止的，所以兩者都不作功。圓環是輕的，所以唯一的動能是質點的動能，唯一的勢能變化也是質點的勢能變化。質點由高度 $2a$ 出發，起初幾乎靜止；當半徑 CQ 與向上的鉛垂線成角 2θ 時，它的高度為 $a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta$。由能量守恆得

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\big(2a - 2a\cos^2\theta\big) = 2mga\sin^2\theta,$$

所以 $v^2 = 4ga\sin^2\theta$，而由於 $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ 給出 $\sin\theta \ge 0$，

$$v = 2(ga)^{1/2}\sin\theta,$$

這正是所求。

位置與 $\dot\theta$

圓環已轉過角 2θ，而只滾不滑意味着圓心向前移動的距離等於弧長 $a\cdot 2\theta$。相對於 C，質點在前方 $a\sin 2\theta$、上方 $a\cos 2\theta$ 處。所以

$$x = 2a\theta + a\sin 2\theta, \qquad y = a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta.$$

對時間求導，

$$\dot x = 2a\dot\theta\,(1 + \cos 2\theta) = 4a\dot\theta\cos^2\theta,$$
$$\dot y = -2a\dot\theta\sin 2\theta = -4a\dot\theta\sin\theta\cos\theta,$$

因此

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big) = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta.$$

? **想一想** 有沒有更快的方法看出 $v = 4a\dot\theta\cos\theta$？

有：P 是瞬時轉動中心（instantaneous centre of rotation），而圓環以角速率 $2\dot\theta$ 轉動。弦 PQ 在 C 所對的角為 $\pi - 2\theta$，所以 $PQ = 2a\cos\theta$，於是 $v = PQ\cdot 2\dot\theta = 4a\dot\theta\cos\theta$，與上面的計算吻合。

由於 $\dot\theta > 0$ 且 $\cos\theta > 0$，與由能量求得的速率比較，

$$4a\dot\theta\cos\theta = 2(ga)^{1/2}\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot\theta = \tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\tan\theta,$$

這就是要求的第一個結果。(左邊必須是變率 $\dot\theta$，而不是 θ：右邊的單位是 s^{-1}。)

鉛垂加速度

把 $\dot\theta$ 代入 $\dot y$，

$$\dot y = -4a\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac12(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2(ga)^{1/2}\sin^2\theta.$$

再求導一次，並再次使用 $\dot\theta$，

$$\ddot y = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac12(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2g\sin^2\theta,$$

這正是所求。同樣地，$\dot x = 4a\cos^2\theta\,\dot\theta = (ga)^{1/2}\sin 2\theta$，而

$$\ddot x = 2(ga)^{1/2}\cos 2\theta\,\dot\theta = g\cos 2\theta\tan\theta.$$

甚麼令滾動停止

圓環是輕的，所以作用於「圓環連質點」這個系統的合力等於 m 乘以質點的加速度。外力有向下的 mg、向上的 R 和水平方向的 F。沿鉛垂方向分解，

$$R - mg = m\ddot y \quad\Longrightarrow\quad R = mg\big(1-2\sin^2\theta\big) = mg\cos 2\theta,$$

而沿水平方向則有 $F = m\ddot x = mg\cos 2\theta\tan\theta$，所以當 $R>0$ 時 $F/R = \tan\theta$。

> **想一想** 當 θ 超過 $\pi/4$ 時，會出甚麼問題？

桌面只能推而不能拉，所以 $R\ge 0$。但 $R = mg\cos 2\theta$ 在 $\theta=\pi/4$ 時降至零，此時質點與圓心同高，而要繼續滾動下去就需要 $R<0$。換一個說法，繼續滾動需要 $\ddot y = -2g\sin^2\theta < -g$：質點向下的加速度要比自由下落還要大，單靠重力是做不到的。所以在 $\theta=\pi/4$ 時接觸力消失，圓環離開桌面。此後質點作拋體運動（projectile motion），初速度的分量為向前 $(ga)^{1/2}$ 和向下 $(ga)^{1/2}$，而輕圓環只是被它帶着走，其最低點升離桌面。

摩擦力可能更早介入。滾動需要 $|F|\le\mu R$，即 $\tan\theta\le\mu$，而當 $\theta\to\pi/4$ 時 $\tan\theta$ 遞增至 1。所以若摩擦系數（coefficient of friction）滿足 $\mu<1$，圓環在 $\tan\theta=\mu$ 時便開始滑動，未及到達 $\theta=\pi/4$。只有當 $\mu\ge 1$ 時，它才會一直滾到 $\theta=\pi/4$，然後跳起。

驗算

- 當 $\theta=0$ 時，$\dot\theta=0$：最高位置是一個平衡位置，這就是為甚麼圓環必須被輕微移離該位置。
- 當 $\theta=\pi/4$ 時：$v=(2ga)^{1/2}$，這是下落距離 a 所得的速率，而質點確實由 $2a$ 降到了 a。

- 電腦獨立地對 $\phi = 2\theta$ 的運動方程作數值積分（由拉格朗日量（Lagrangian）$ma^2(1+\cos\phi)\dot{\phi}^2 - mga(1+\cos\phi)$ 出發），並把有限差分求得的速度和加速度與公式比較。速率、$\dot{\theta}$、$\ddot{y}$、$R = mg\cos 2\theta$ 和 $F/R = \tan\theta$ 全部吻合，誤差在 10^{-6} 以內；例如在 $\theta = \pi/4$ 時，它給出 $R = 0$ 和 $F/R = 1$。

常見錯誤

- 以為圓心移動的距離是 $a\theta$ 而不是 $2a\theta$：圓環轉過的角是 2θ，不是 θ。
- 把摩擦力計入能量方程。接觸點是靜止的，所以圓環滾動時摩擦力不作功。
- 只說質點「掉下來」。質點是固定在環上的；離開桌面的是圓環，因為反作用力否則就要變成負數。

STEP 之外

滾動物體的接觸點就是它的瞬時轉動中心，而只滾不滑是一個約束（constraint），它消去一個自由度（degree of freedom）而不作功。這類約束可由拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）有系統地處理：只需用單一坐標（例如 θ）寫出能量，運動方程便自動得出；上面的驗算正是這樣做的。約束力何時消失的問題（珠子離開球面、汽車離開路拱）是大學一年級動力學的典型題目。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對滾動運動和約束力有詳細的論述。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 14 題

力學 • 轉動碰撞

> **STEP III 樣本試卷，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q14

關鍵思路

樞軸(pivot)對棒施加一個未知的衝量(impulse)，所以線動量(linear momentum)並不守恆；但這個衝量對樞軸沒有力矩(moment)，因此對中點的角動量(angular momentum)守恆。再在接觸點應用牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）（由於碰撞是完全彈性（perfectly elastic）的，恢復係數為 1），一切便確定下來。至於第二部分，先找出質點接下來怎樣運動，然後追蹤兩個物體：棒的另一半會轉過來，到達質點的運動直線。

解答

模型。質點視為點質量；桌面光滑，所以兩個物體都不受摩擦力；棒是均勻的，並在其中點 O 處光滑地樞接。棒對 O 的轉動慣量（moment of inertia）為

$$I = \tfrac{1}{12}m(4a)^2 = \tfrac{4}{3}ma^2.$$

碰撞期間，衝量沿質點的運動直線作用（棒是光滑的，而質點垂直撞向棒），所以質點繼續沿同一直線運動。設碰撞後質點的速度為 v，以其原來的運動方向為正。

角速率

對 O 的角動量。系統（質點和棒）所受的唯一外來衝量來自 O 處的樞軸，而它對 O 的力矩為零。碰撞前，質點對 O 的角動量為 mua，而棒靜止，所以

$$mua = mva + \tfrac{4}{3}ma^2\omega \qquad \Longrightarrow \qquad u = v + \tfrac{4}{3}a\omega. \tag{1}$$

恢復定律。棒上被撞擊的一點與 O 相距 a，所以剛碰撞後，它以速率 $a\omega$ 沿質點原來的

方向運動。恢復係數（coefficient of restitution）為 1，故分離速率等於接近速率：

$$a\omega - v = u. \tag{2}$$

想一想 牛頓恢復定律可以用於轉動中的物體嗎？

可以：它適用於兩個接觸點沿公法線方向的速度。如果你喜歡，也可以改用能量：「完全彈性」表示動能（kinetic energy）守恆，$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ma^2\omega^2$。把它寫成 $m(u-v)(u+v) = \frac{4}{3}ma^2\omega^2$，並利用 (1)，即 $u - v = \frac{4}{3}a\omega$，便得 $u + v = a\omega$（兩邊除以 $\omega \neq 0$），這正是 (2)。

把 (1) 和 (2) 相加，消去 v：

$$2u = \tfrac{7}{3}a\omega \qquad \Longrightarrow \qquad a\omega = \frac{6u}{7},$$

這就是所要求的結果。然後由 (2)，

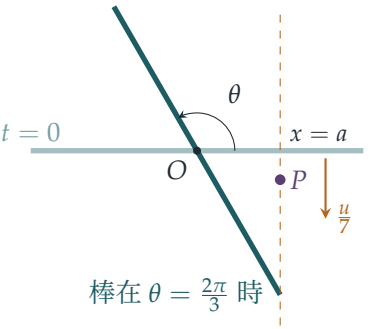
$$v = a\omega - u = -\frac{u}{7},$$

所以質點沿原來的直線以速率 $u/7$ 反彈。

第二次碰撞

在桌面上取坐標軸，以 O 為原點，x 軸沿棒的初始位置，而質點原本沿直線 $x = a$ 向正 y 方向運動，於是它在時間 $t = 0$ 時在 $(a, 0)$ 撞擊棒。那麼當 $t > 0$ 時：

- 質點位於 $\left(a,\ -\frac{u}{7}t\right)$，向負 y 方向勻速運動；
- 被撞擊的一點向正 y 方向運動，所以棒逆時針轉動，在時間 t 時它與 x 軸成角 $\theta = \omega t$。在兩者再次碰撞之前，沒有其他力作用於任何一個物體，所以兩者的運動都是勻速的。



棒的半長為 $2a$，所以只有當棒所在直線上落在直線 $x = a$ 的那一點（它與 O 相距 $a/|\cos\theta|$）距離 O 不超過 $2a$ 時，棒才會到達該直線；也就是說，當 $|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$ 時。在這種情況下，棒在高度 $y = a\tan\theta$ 處與該直線相交。

- 當 $0 < \theta \le \frac{\pi}{3}$ 時，棒與該直線相交於 $y = a\tan\theta > 0$，在 x 軸上方，而質點在其下方：沒有接觸。
- 當 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ 時，棒根本到不了該直線。
- 當 $\frac{2\pi}{3} \le \theta < \pi$ 時，棒的另一半與該直線相交於 $y = a\tan\theta < 0$，與質點在同一側。

現在比較位置。由於 $t = \theta/\omega = \frac{7a\theta}{6u}$，在角度為 θ 時質點的 y 坐標為 $-\frac{u}{7}t = -\frac{a\theta}{6}$。考慮

$$f(\theta) = (\text{棒的}y\text{ 坐標，取於直線}x = a) - (\text{質點的}y) = a\tan\theta + \frac{a\theta}{6}, \qquad \frac{2\pi}{3} \le \theta < \pi.$$

- 在 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 時（棒的末端到達該直線）：$f = a\left(-\sqrt{3} + \frac{\pi}{9}\right) < 0$，因為 $\frac{\pi}{9} < 1 < \sqrt{3}$。質點位於 $y = -\frac{\pi}{9}a \approx -0.35a$，介乎 x 軸與位於 $y = -\sqrt{3}a$ 的棒末端之間：棒的末端已經轉到質點之外。
- 當 $\theta \to \pi^-$ 時：$\tan\theta \to 0$，所以 $f \to \frac{\pi}{6}a > 0$。棒正向上掃回 x 軸，而質點大約位於 $-0.52a$。

f 在 $[\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 上連續，所以根據介值定理（intermediate value theorem），在兩者之間存在某個 θ 使得 $f(\theta) = 0$：在那一刻棒正處於質點的位置，兩者再次碰撞。（由上面頭兩點可知，之前不可能有接觸。）證明至此完成。

以數值計算，碰撞發生在 $\tan\theta = -\theta/6$ 之處，即 $\theta \approx 2.716$（約 155.6°），時間為 $t \approx 3.17\,a/u$，此時質點位於 $y \approx -0.45a$，沿棒量度距離 O 約 $1.10a$。

驗算

- 能量：以 $a\omega = \frac{6}{7}u$ 和 $v = -\frac{1}{7}u$ 代入，最終動能為 $\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{49} + \frac{4}{3}\cdot\frac{36}{49}\right)u^2 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{49}{49}u^2$，恰好等於初始能量。
- 對一個轉動慣量為 I 的物體，在距離 d 處撞擊，重複以上論證可得 $d\omega = 2u/(1 + I/md^2)$。當 $I \to 0$ 時，被撞擊的一點以 $2u$ 離開，正如與一個極輕的物體作彈性碰撞；當 $I \to \infty$ 時，棒幾乎不轉動，質點以速率 u 反彈。這裏 $I/ma^2 = \frac{4}{3}$，得出 $\frac{6}{7}u$。
- 我們以精確分數驗證了 $a\omega = \frac{6}{7}u$、$v = -\frac{1}{7}u$ 同時令角動量和能量守恆，然後把兩個運動按時間逐步推進：碰撞後的首次接觸發生在 $\theta \approx 2.7165$，與用二分法（bisection）解 $\tan\theta + \theta/6 = 0$ 所得的結果吻合。

常見錯誤

- 以為線動量守恆。樞軸會提供衝量，所以只有對樞軸的角動量守恆。
- 使用 $I = \frac{1}{3}m\ell^2$（這是對端點的值），或者忘記棒的長度是 $4a$ 而不是 $2a$。

- 在棒被撞擊的那一半上尋找第二次碰撞。那一半會遠離質點的運動直線；與質點相遇的是轉過來的另一半。

STEP 之外

把對某固定點的角動量與能量條件或恢復條件配合使用，是處理剛體（rigid body）衝擊運動的標準方法，並由此引出撞擊中心（centre of percussion）的概念：即撞擊一個樞接物體時，樞軸處不會產生衝量的那一點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）仔細講解了剛體碰撞和角動量，並收錄了許多正是這一類型的習題。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 15 題

概率與統計 • 隨機網絡的連通性

STEP III 樣本試卷，第 15 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q15

關鍵思路

先把幾何拋開：唯一要緊的，是六條路之中哪幾條仍然開通。任何一條村都能從其餘各村到達，當且僅當開通的道路在四條村之間構成一個連通（connected）的網絡。因此，我們把所有可能的開通道路集合按所含道路的數目分類，數出每種大小之中有多少個是連通的，再各自乘上相應的概率。由於只有四條村，這個點算過程既短又乾淨。

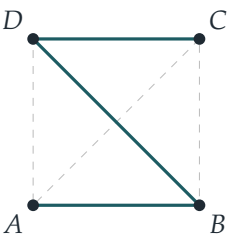
解答

設 $q = 1 - p$ 為某一條路開通的概率。設 K 為下雪之後每條村都能從其餘各村到達這一事件。

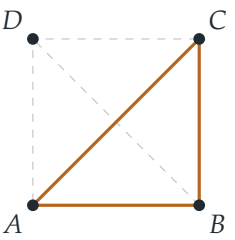
由於六條路互相獨立（independent），任何一個指定的 k 條開通道路的集合（其餘 $6 - k$ 條封閉）出現的概率都是 $q^k p^{6-k}$。所以

$$\mathrm{P}(K) = \sum_{k=0}^{6} N_k \, q^k p^{6-k},$$

其中 N_k 是能把四條村全部連通的 k 條道路集合的數目。



三條路：連通各村的樹



三條路：三角形，D 被隔絕

點算連通的道路集合

最多兩條路開通。每條開通的路連接兩條村，所以從某一條村出發，每條路最多只能帶來一條新的村。要到達其餘三條村，至少需要三條路。因此 $N_0 = N_1 = N_2 = 0$。

三條路開通。三條路的集合共有 $\binom{6}{3} = 20$ 個。假設某個這樣的集合未能連通各村。若有某條村被隔絕，則三條路全部落在其餘三條村之間。但連接那三條村的路只有三條，所以這個集合恰好是一個三角形。若沒有任何村被隔絕，則四條村分成兩對，而最多只有兩條路（每對之內各一條）可以開通，矛盾。所以失敗的情況只有 4 個三角形，每個對應一條被隔絕的村，於是

$$N_3 = 20 - 4 = 16.$$

> ? **想一想** 為甚麼有四條路開通時，網絡絕不可能不連通？

四條或以上的路開通。沿用上面兩種失敗的方式。若有一條村被隔絕，所有開通的路都必須落在其餘三條村之間，而那裏只有三條路。若分成兩對，則最多只容許兩條路開通。有四條或以上的路開通時，兩種情況都不可能發生，所以每個這樣的集合都是連通的：

$$N_4 = \binom{6}{4} = 15, \qquad N_5 = \binom{6}{5} = 6, \qquad N_6 = 1.$$

所求概率

把各個數目合起來，

$$\mathrm{P}(K) = q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 + 16q^3p^3, \qquad q = 1 - p.$$

按 p 的冪展開，得到等價的形式

$$\mathrm{P}(K) = 1 - 4p^3 - 3p^4 + 12p^5 - 6p^6.$$

$p = \frac{1}{2}$ 的情況

此時 $p = q = \frac{1}{2}$，所以道路開通與封閉的 $2^6 = 64$ 種組合全部等可能，每種的概率為 $\frac{1}{64}$。因此

$$\mathrm{P}(K) = \frac{1 + 6 + 15 + 16}{64} = \frac{38}{64} = \frac{19}{32},$$

正是所求。

驗算

- 極端值。當 $p = 0$ 時，每條路都開通，公式給出 1。當 $p = 1$ 時，每條路都封閉，公式給出 $1 - 4 - 3 + 12 - 6 = 0$。

- 補事件（*complement*）。網絡不連通，當且僅當有某條村被隔絕，或者四條村分成兩對而兩對之間沒有任何路相通。一條村被隔絕的概率是 p^3。對四條村運用容斥原理（inclusion–exclusion）（兩條指定的村同時被隔絕需要五條路封閉，而三條村被隔絕即表示四條村全部被隔絕），得出 $4p^3 - 6p^5 + 3p^6$。分成兩對的方法有 3 種，每種在兩條對內的路都開通的情況下，再加上 p^4q^2。以一減去總和，結果與上面的公式吻合：當 $p = \frac{1}{2}$ 時，不連通的概率是 $\frac{32-12+3+3}{64} = \frac{13}{32}$。
- 窮舉法（*brute force*）。用電腦列出全部 64 個道路集合，證實了 $16, 15, 6, 1$ 這幾個數目。以 $p = 0.3$ 進行模擬，得出 0.893，而準確值是 0.8925。

常見錯誤

- 把全部 20 個三條路的集合都當作連通，忘記了那四個三角形。
- 以為任何四條路的集合仍有可能令某條村孤立。一條村只有在它的三條路全部封閉時才會被隔絕。
- 寫 $q^k p^{6-k}$ 時，把 p（封閉）和 $1 - p$（開通）混淆。

STEP 之外

這是隨機圖（random graph）的一個微型例子：網絡的每條邊各自獨立地保留下來，然後我們問所得的結果是否連通。這個 p 的多項式稱為該網絡的可靠度多項式（reliability polynomial），而 16 這個數則是凱萊公式（Cayley's formula）的一個實例：連接 n 個有標號的點的樹（tree）共有 n^{n-2} 棵。對於大型網絡，艾狄胥（Erdős）和倫伊（Rényi）發現，當道路開通的概率越過某個臨界值（threshold）時，連通性會異常突然地出現。若想進一步了解由獨立事件構成的隨機結構，可參閱 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）。

詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 16 題

概率與統計 • 負二項分佈

STEP III 樣本試卷，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q16

關鍵思路

等到 r 個兒子出生，等同於先等一個兒子出生，然後重新開始等下一個，如此重複 r 次。因此 C 可以拆成 r 個分佈相同的等候時間之和，餘下的工作交給期望值的線性（linearity of expectation）便可。至於第 (ii) 部分，竅門是想像總統停止生育之後，嬰兒仍然繼續出生：這樣一來，他在某個時刻之前是否已經停下，就變成一個關於固定數目的孩子的問題，再利用男孩與女孩之間的對稱性（symmetry）便可解決。

解答

以下一律假設每次出生的嬰兒是男孩的概率為 $\frac{1}{2}$，並且與其他各次出生互相獨立（independent）。

第 (i) 部分

對於 $i = 1, 2, \ldots, r$，設 X_i 為第 $(i-1)$ 個兒子出生之後，直至第 i 個兒子出生為止（包括這個兒子在內）所生的孩子數目。（當 $i = 1$ 時，由最初開始數起。）於是

$$C = X_1 + X_2 + \cdots + X_r.$$

每個 X_i 所數的，都是在一輪全新的、獨立而公平的出生之中，直至第一個男孩出現為止的出生次數，所以每個 X_i 的分佈（distribution）都與 X 相同，其中

$$\mathrm{P}(X = k) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

因為 $X = k$ 表示先有 $k-1$ 個女孩，然後才有一個男孩。

要求出 $\mathrm{E}(X)$，可把幾何級數（geometric series）$\sum_{k\geq 0} x^k = \dfrac{1}{1-x}$（適用於 $|x|<1$）求導，得到 $\sum_{k\geq 1} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$。乘以 x 並代入 $x=\frac{1}{2}$，得

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

這個結果合乎常理：如果所有嬰兒之中有一半是男孩，那麼平均要等兩次出生才會有一個男孩。

根據期望值的線性（無論各個 X_i 是否獨立，這個性質都成立，不過這裏它們確實是獨立的），

$$\mathrm{E}(C) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_r) = 2r.$$

第 (ii) 部分

想像有一個無窮無盡的嬰兒序列，各個嬰兒的性別早已預先決定，彼此獨立而且公平；總統按着這個序列生孩子，直至第 r 個兒子出生為止。這樣做完全不會改變 C，卻讓我們即使在他提早停下的情況下，仍然可以談論「首 $2r-1$ 個嬰兒」。

想一想 怎樣只用序列中的首 $2r-1$ 個嬰兒，來描述事件 $C<2r$？

由於 C 是整數，$C<2r$ 即是 $C\leq 2r-1$，也就是說，第 r 個兒子在第 $2r-1$ 個位置或之前出現。這種情況發生，當且僅當至少有 r 個男孩出現在首 $2r-1$ 個嬰兒之中。所以

$$\mathrm{P}(C<2r) = \mathrm{P}(\text{至少有}r\text{ 個男孩出現在首}2r-1\text{ 個嬰兒之中}).$$

現在設 B 和 G 分別為這 $2r-1$ 個嬰兒之中男孩和女孩的數目，於是 $B+G=2r-1$。因為 $2r-1$ 是奇數，B 與 G 不可能相等，而且兩者之中恰好有一個不小於 r：

- 若 $B\geq r$，則 $G=2r-1-B\leq r-1$；
- 若 $B\leq r-1$，則 $G\geq r$。

所以事件 $\{B\geq r\}$ 與 $\{G\geq r\}$ 互斥（mutually exclusive），而且兩者合起來涵蓋了所有可能情況，由此得到

$$\mathrm{P}(B\geq r) + \mathrm{P}(G\geq r) = 1.$$

但每次出生時，男孩和女孩出現的機會均等，所以把「男孩」和「女孩」這兩個標籤對調，並不會改變任何概率，因此 $\mathrm{P}(B\geq r) = \mathrm{P}(G\geq r)$。故此兩者各為 $\frac{1}{2}$，而

$$\mathrm{P}(C<2r) = \tfrac{1}{2},$$

這正是所要證明的。

由此可見，家庭人數的期望值是 $2r$，但家庭人數少於 $2r$ 的情況卻恰好佔一半。家庭人數的分佈是偏斜（skewed）的：略小於 $2r$ 的數值十分常見，而偶爾出現的一長串女孩則把平均值拉高。

驗算

- 取 $r = 1$：$\mathrm{E}(C) = 2$，而 $C < 2$ 表示第一個嬰兒是男孩，其概率為 $\frac{1}{2}$。
- 取 $r = 2$：$C < 4$ 表示 $C = 2$ 或 3，概率分別為 $\frac{1}{4}$ 和 $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$，總和為 $\frac{1}{2}$。
- 對 $r = 1, \ldots, 8$ 把 $c\binom{c-1}{r-1}2^{-c}$ 精確地求和，每次都得到 $\mathrm{E}(C) = 2r$ 和 $\mathrm{P}(C < 2r) = \frac{1}{2}$；以 $r = 3$ 和 200 000 個家庭進行模擬，得出平均值為 6.00，以及 $\mathrm{P}(C < 6) \approx 0.499$。

常見錯誤

- 以「孩子之中有一半是男孩，所以 $C = 2r$」作為論證。這句話就平均而言是對的，但 C 本身是隨機的；第 (i) 部分需要把它分解成各段等候時間，而不能只靠猜測。
- 在第 (ii) 部分只考慮總統實際所生的孩子。當 $C < 2r - 1$ 時，根本就沒有 $2r - 1$ 個孩子；正是把出生序列延伸至停止點之後，計數的論證才得以成立。
- 忘記了 $2r - 1$ 是奇數。正是這一點排除了男孩與女孩數目相同的情況，並使兩個事件互補（complementary）。

STEP 之外

C 的分佈就是負二項（negative binomial）分佈：$\mathrm{P}(C = c) = \binom{c-1}{r-1}2^{-c}$，其中 $c \geq r$。把一個隨機變量（random variable）寫成若干個較簡單部分之和，再運用期望值的線性，是大學一年級概率論中最有力的工具之一；而第 (ii) 部分把「等候時間」與「固定試驗次數中的計數」聯繫起來的竅門，正是連結負二項分佈與二項（binomial）分佈的那種對偶性（duality）（在連續時間的情況下，它連結的是伽瑪（gamma）分佈與泊松（Poisson）分佈）。Blitzstein 與 Hwang 合著的 *Introduction to Probability* 以大量例子講解了這兩個想法。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

樣本試卷詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。