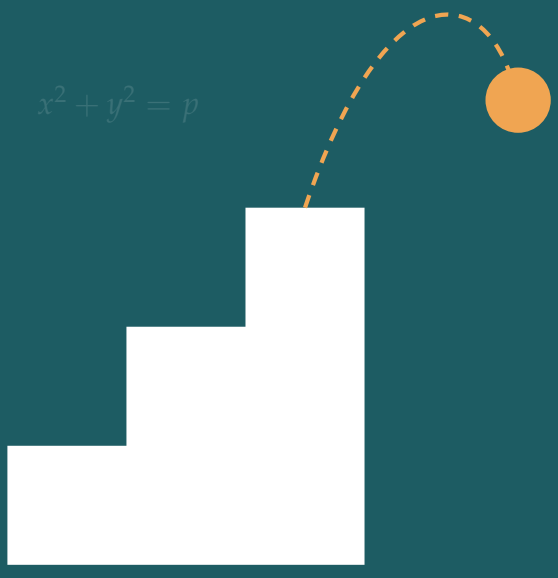
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP II 及 III

2025 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP II 及 III

2025 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2025 年詳細解答

2025 年 STEP 試卷（STEP II 及 III）全部 24 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP II

第 1 題 分段函數 純數學 . . . 3

第 2 題 含模的複數方程 純數學 . . . 8

第 3 題 冪的比較 純數學 . . . 13

第 4 題 下取整函數恆等式 純數學 . . . 17

第 5 題 代換積分法 純數學 . . . 21

第 6 題 與拋物線相切的圓 純數學 . . . 25

第 7 題 非線性微分方程 純數學 . . . 30

第 8 題 整數的平衡分拆 純數學 . . . 34

第 9 題 碰撞與拋體 力學 . . . 38

第 10 題 桿的靜力學 力學 . . . 43

第 11 題 期望值與二項式求和 概率與統計 . . . 47

第 12 題 泊松分佈 概率與統計 . . . 51

STEP III

第 1 題 Beta 函數積分 純數學 . . . 56

第 2 題 迭代函數與周期性 純數學 . . . 60

第 3 題 平均值不等式 純數學 . . . 65

第 4 題 曲線的變換 純數學 . . . 69

第 5 題 三維向量 純數學 . . . 75

第 6 題 根的對稱函數 純數學 . . . 79

第 7 題 反正切函數 純數學 . . . 83

第 8 題 以複數求三角函數之和 純數學 . . . 88

第 9 題 質心 力學 . . . 92

第 10 題 移動木板上的摩擦力 力學 . . . 97

第 11 章 最大值的分佈 概率與統計 101
第 12 章 迴歸隨機變量 概率與統計 105

詳細解答

STEP II 2025，第 1 題

純數學 • 分段函數

STEP II 2025，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

由 Min 構成的函數，其實只是一個在不同區間上由不同公式給出的普通函數。因此每次的第一步，都是找出兩個自變量在哪裏相交，把函數寫成分段函數（piecewise function），然後逐個區間處理，只保留落在其所屬區間內的答案。在接駁處，函數保持連續（continuous），但通常會出現一個角點（corner）；正是這個角點，令 (iv) 中的那一點成為極大點，而導數（derivative）卻不等於零。

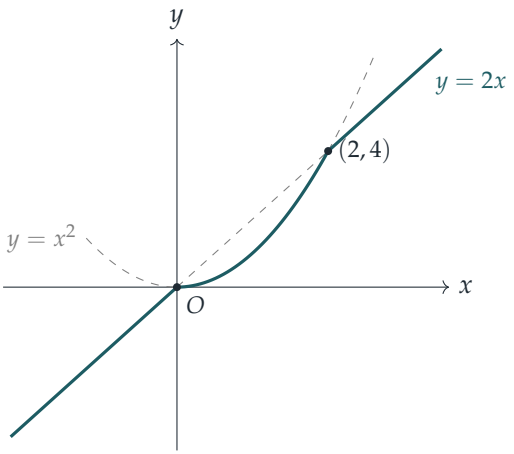
解答

第 (i) 部分

我們有 $x^2 \le 2x \iff x(x-2) \le 0 \iff 0 \le x \le 2$。因此

$$\operatorname{Min}(x^2, 2x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 2x & x < 0 \text{ 或 } x > 2. \end{cases}$$

圖像沿直線 $y = 2x$ 走，只是在 $x = 0$ 與 $x = 2$ 之間會下沉到拋物線（parabola）上，因為拋物線在該處位於其弦（chord）之下。兩段直線部分都在同一條直線上。圖像在 $(0,0)$ 有一個角點，那裏拋物線的斜率（gradient）為 0，而直線的斜率為 2；在 $(2,4)$ 亦有一個角點，那裏兩者的斜率分別為 4 和 2。



第 (ii) 部分

利用 (i) 中的兩段。

- 當 $0 \le x \le 2$：$2x^2 = 5x - 3 \iff 2x^2 - 5x + 3 = 0 \iff (2x-3)(x-1) = 0$，所以 $x = 1$ 或 $x = \frac{3}{2}$。兩者都在 $[0,2]$ 內，所以兩個都成立。
- 當 $x < 0$ 或 $x > 2$：$4x = 5x - 3 \iff x = 3$，它滿足 $x > 2$，所以成立。

解為 $x = 1$、$x = \frac{3}{2}$ 和 $x = 3$。

第 (iii) 部分

我們還需要第二個函數：$x^3 \le 4x \iff x(x-2)(x+2) \le 0 \iff x \le -2$ 或 $0 \le x \le 2$。把兩者合起來，

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) + \mathrm{Min}(x^3, 4x) = \begin{cases} x^3 + 2x & x \le -2, \\ 6x & -2 < x < 0, \\ x^3 + x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 6x & x > 2. \end{cases}$$

$m = 2$。

- $x \le -2$：$x^3 + 2x = 2x$ 給出 $x = 0$，不在該區間內。
- $-2 < x < 0$ 及 $x > 2$：$6x = 2x$ 給出 $x = 0$，兩個區間都不包含它。
- $0 \le x \le 2$：$x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1) = 0$ 給出 $x = 0$ 或 $x = 1$（捨去 $x = -2$）。

所以當 $m = 2$ 時，解為 $x = 0$ 和 $x = 1$。

想一想 方程 $6x = 6x$ 會怎樣？

它對每一個 x 都成立，所以當 $m = 6$ 時，整個區間都是解，而不只是孤立的點。

$m = 6$。

- $x \le -2$：$x^3 + 2x = 6x \iff x(x-2)(x+2) = 0$，只有 $x = -2$ 在該區間內。
- $-2 < x < 0$ 及 $x > 2$：$6x = 6x$ 恆成立，所以這些區間內的每一個 x 都是解。
- $0 \le x \le 2$：$x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2) = 0$ 給出 $x = 0$ 或 $x = 2$（捨去 $x = -3$）。

綜合起來，當 $m = 6$ 時，解集為

$$-2 \le x \le 0 \quad \text{或} \quad x \ge 2.$$

第 (iv) 部分

這裏 $x^3 \le x^2 \iff x^2(x-1) \le 0 \iff x \le 1$（因子 x^2 永不為負，而 $x = 0$ 時取等號）。因此

$$y = \begin{cases} 2x^3 - 5x & x \le 1, \\ 2x^2 - 5x & x > 1. \end{cases}$$

兩條公式在 $x = 1$ 時都給出 $y = -3$，所以曲線在該處連續，並通過 $(1, -3)$。

點 $(1, -3)$。 它不是駐點（stationary point）：在 $x = 1$ 處，左方的斜率是 $6x^2 - 5 = 1$，右方的斜率是 $4x - 5 = -1$。更準確地說，

- 當 $\sqrt{5/6} < x < 1$ 時，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2 - 5 > 0$，所以 y 遞增至 -3；
- 當 $1 < x < \frac{5}{4}$ 時，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x - 5 < 0$，所以 y 由 -3 遞減。

所以在 $x = 1$ 兩側附近的所有點都有 $y < -3$，故 $(1, -3)$ 是局部極大點（local maximum），也是曲線的一個角點。

其他轉向點。 在 $x < 1$ 上，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2 - 5 = 0$ 給出 $x = \pm\sqrt{5/6} = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$，兩者都小於 1。利用 $2x^2 = \frac{5}{3}$，

$$y = x(2x^2 - 5) = -\tfrac{10}{3}x = \mp\tfrac{10}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{30}}{6} = \mp\tfrac{5\sqrt{30}}{9}.$$

由於 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 12x$，$x < 0$ 的那一點是極大點，$x > 0$ 的那一點是極小點。在 $x > 1$ 上，$4x - 5 = 0$ 給出 $x = \frac{5}{4}$，此時 $y = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} = -\frac{25}{8}$；由於拋物線開口向上，這是極小

點。所以其餘三個轉向點（turning point）為

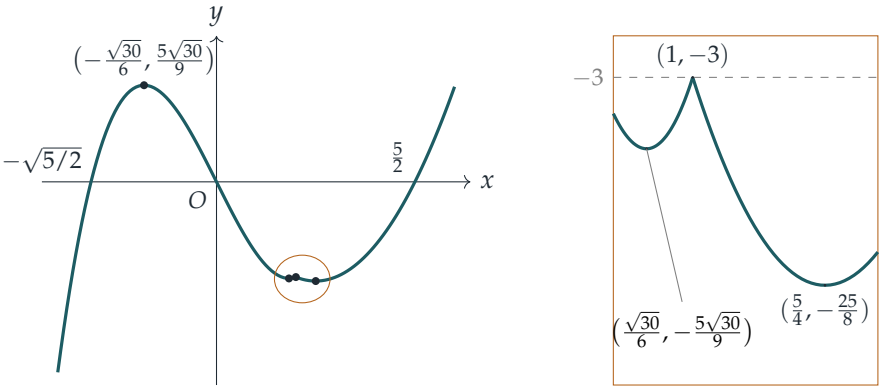
$$\text{極大點}\left(-\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ \tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right),\qquad \text{極小點}\left(\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ -\tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right)\text{ 和 }\left(\tfrac{5}{4},\ -\tfrac{25}{8}\right).$$

草圖。 三次函數 $2x^3-5x$ 是奇函數（odd function），所以曲線在 $-1\le x\le 1$ 的部分關於原點旋轉對稱。曲線與坐標軸相交於：$x(2x^2-5)=0$ 且 $x\le 1$ 之處，即 $x=0$ 和 $x=-\sqrt{5/2}\approx -1.58$；以及 $x(2x-5)=0$ 且 $x>1$ 之處，即 $x=\frac{5}{2}$。當 $x\to-\infty$ 時，$y\to-\infty$；當 $x\to\infty$ 時，$y\to\infty$。

$x=1$ 附近的三個點非常接近，所以值得確定它們的上下次序。把正數 $\frac{5\sqrt{30}}{9}$ 和 $\frac{25}{8}$ 平方，得 $\frac{750}{81}\approx 9.26$ 和 $\frac{625}{64}\approx 9.77$，所以

$$-\tfrac{25}{8}<-\tfrac{5\sqrt{30}}{9}<-3:$$

$x=\frac{5}{4}$ 處的極小點較低，而兩個極小點都在角點之下。在合理的比例下，這個細節是看不見的，所以插圖把它放大了。



驗算

- (ii)：在 $x=\frac{3}{2}$，$\text{Min}(\frac{9}{4},3)=\frac{9}{4}$，而 $2\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{2}=5\cdot\frac{3}{2}-3$；在 $x=3$，$\text{Min}(9,6)=6$，而 $12=15-3$。
- (iii)，$m=6$：試 $x=-1$，此時 $\text{Min}(1,-2)+\text{Min}(-1,-4)=-2-4=-6=6x$；而不在解集內的 $x=1$ 給出 $1+1=2\neq 6$。
- (iv)：用電腦在 $[-3,3]$ 上以 10^{-5} 的步長掃描 y，恰好找到四個轉向點，分別在 $x\approx -0.9129$（$y\approx 3.0429$）、0.9129（-3.0429）、1（-3）和 1.25（-3.125），與上面的數值吻合。

常見錯誤

- 保留了落在其公式適用區間以外的根，例如 (iii) 中 $m = 2$ 時的 $x = -2$。
- 把 $6x = 6x$ 當作只會給出單一數值來解，而沒有意識到它在整個區間上都成立。
- 在 (iv) 中把曲線在 $(1, -3)$ 處畫得圓滑：曲線在該處確實有一個角點，左方斜率為 1，右方斜率為 -1。

STEP 之外

像 $\text{Min}(f, g) = \frac{1}{2}\big(f + g - |f - g|\big)$ 這樣的函數，只要 f 和 g 連續，它就必定連續，但不一定可微（differentiable）；而 (iv) 說明局部極大點不一定是駐點。在數學分析（analysis）課程中，這引出了一個需要小心陳述的結果：可微函數的極值出現在導數為零之處；同時也引出了單側導數（one-sided derivatives）的概念。這類分段定義的函數在最優化（optimisation）中亦十分重要：若干個線性函數的最小值會產生角點，而這些角點正是線性規劃（linear programming）所研究的對象。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）在講解連續性和可微性時，正是以這類例子為出發點。

詳細解答

STEP II 2025，第 2 題

純數學 • 含模的複數方程

STEP II 2025，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

設 $z = x + \mathrm{i}y$，然後把方程拆成實部（real part）和虛部（imaginary part）。模（modulus）必定是實數，所以它對虛部毫無貢獻；而 z^2（或 z^3）的虛部隨即可以因式分解。這個因式分解告訴我們，根必定落在阿根圖（Argand diagram）中的哪幾條直線上；在每條直線上，問題就化為一個單變量的實方程。

解答

第 (i) 部分

(a) 設 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 為實數。於是 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i}$，而 $|z + b|$ 是實數，a 亦然。比較 $z^2 + |z + b| = a$ 兩邊的虛部，得

$$2xy = 0,$$

所以 $x = 0$（此時 z 為純虛數（purely imaginary））或 $y = 0$（此時 z 為純實數）。這正是所要證明的。

(b) 假設 $z = \mathrm{i}y$，其中 y 為實數。那麼 $z^2 = -y^2$，且 $|z + \frac{5}{2}| = \sqrt{y^2 + \frac{25}{4}}$，因此需要

$$\sqrt{y^2 + \tfrac{25}{4}} = y^2 + \tfrac{7}{2}.$$

兩邊皆為正數，所以這等價於平方後的方程

$$y^2 + \tfrac{25}{4} = y^4 + 7y^2 + \tfrac{49}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad y^4 + 6y^2 + 6 = 0.$$

對任何實數 y，左邊至少為 6，所以無解：方程沒有純虛根。

(c) 假設 $z = x$ 為實數，則需要 $x^2 + |x + \frac{7}{2}| = \frac{5}{2}$。我們按 $x + \frac{7}{2}$ 的正負號分情況討論。

- 若 $x \geq -\frac{7}{2}$：$x^2 + x + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$，即 $x^2 + x + 1 = 0$，其判別式（discriminant）為 $1 - 4 = -3 < 0$。沒有實數解。
- 若 $x < -\frac{7}{2}$：$x^2 - x - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$，即 $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$。根 3 和 -2 都不滿足條件 $x < -\frac{7}{2}$，所以兩者都不是解。

因此方程沒有純實根。

? **想一想** 為甚麼解出 $x^2 - x - 6 = 0$ 就停下來是不夠的？

每種情況只在其各自的 x 範圍內描述原方程。若情況方程的某個根落在該範圍之外，它解的其實是另一條方程（模內符號錯了的那條），所以必須捨去。

(d) 現在 $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$；特別地，$b > 0$。

*虛根。*設 $z = \mathrm{i}y$，並記 $Y = y^2 \geq 0$。方程變為 $-Y + \sqrt{Y + b^2} = \frac{1}{2}$，即

$$\sqrt{Y + b^2} = Y + \tfrac{1}{2}.$$

當 $Y \geq 0$ 時右邊為正，所以平方後得到等價的方程：

$$Y + b^2 = Y^2 + Y + \tfrac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad Y^2 = b^2 - \tfrac{1}{4}.$$

由於 $b > \frac{1}{2}$，有 $b^2 - \frac{1}{4} > 0$，所以 $Y = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}}$ 確實是一個正值，於是

$$z = \pm \mathrm{i} \left(b^2 - \tfrac{1}{4}\right)^{1/4}$$

是純虛根。

*實根。*設 $z = x$，並尋找滿足 $x \geq -b$ 的根，此時 $|x + b| = x + b$。方程變為

$$x^2 + x + b - \tfrac{1}{2} = 0,$$

其判別式為 $1 - 4(b - \frac{1}{2}) = 3 - 4b$，由於 $b < \frac{3}{4}$，它是正數。取較大的根

$$x_+ = \frac{-1 + \sqrt{3 - 4b}}{2}.$$

我們必須驗證它落在範圍 $x \geq -b$ 之內。$x_+ \geq -b$ 等價於 $\sqrt{3 - 4b} \geq 1 - 2b$，而這必然成立，因為 $b > \frac{1}{2}$ 使右邊為負，而左邊為正。所以 x_+ 是一個純實根。

因此當 $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$ 時，方程至少有一個純虛根和至少一個純實根，得證。（關於 b 的每個條件都恰好派上用場：$b > \frac{1}{2}$ 用於虛根及 $x_+ \geq -b$，$b < \frac{3}{4}$ 用於實根的判別式。）

第 (ii) 部分

設 $z = x + \mathrm{i}y$。那麼

$$z^3 = x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right)\mathrm{i}, \qquad |z+2|^2 = (x+2)^2 + y^2.$$

後者是實數，所以方程的虛部為

$$y\left(3x^2 - y^2\right) = 0,$$

得 $y = 0$ 或 $y^2 = 3x^2$。（從幾何角度看，z 位於實軸或直線 $y = \pm\sqrt{3}\,x$ 之一上：這些正是輻角為 $\frac{\pi}{3}$ 的倍數的方向，亦即使 z^3 為實數的方向。）

情況 $y = 0$。由實部得 $x^3 + (x+2)^2 = 4$，即

$$x^3 + x^2 + 4x = x\left(x^2 + x + 4\right) = 0.$$

該二次式的判別式為 $1 - 16 < 0$，所以唯一的解是 $x = 0$，即 $z = 0$。

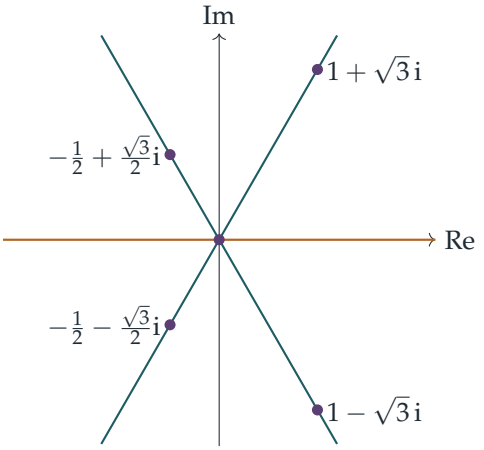
情況 $y^2 = 3x^2$。把 $y^2 = 3x^2$ 代入實部 $x^3 - 3xy^2 + (x+2)^2 + y^2 = 4$：

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^3 + x^2 + 4x + 4 + 3x^2 &= 4 \\ -8x^3 + 4x^2 + 4x &= 0 \\ -4x\left(2x^2 - x - 1\right) &= 0 \\ -4x(2x+1)(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

- $x = 0$ 迫使 $y = 0$：這又是 $z = 0$。
- $x = 1$ 給出 $y^2 = 3$，所以 $z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}$。
- $x = -\frac{1}{2}$ 給出 $y^2 = \frac{3}{4}$，所以 $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$。

每一步都是等價變換（我們只是代入和因式分解），所以以上全部確實都是解。因此方程恰好有五個根：

$$z = 0, \qquad z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}, \qquad z = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.$$



這些根都落在虛部所容許的三條直線 $y=0$ 和 $y=\pm\sqrt{3}\,x$ 上。

驗算

- 以極式(polar form)表示，$1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，所以 $z^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-8$，而 $|3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}|^2=9+3=12$；果然 $-8+12=4$。
- $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ 是單位立方根 (cube root of unity)，所以 $z^3=1$，而 $|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}|^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$；果然 $1+3=4$。
- 在 (d) 中試取 $b=\frac{5}{8}$：則 $Y=\sqrt{\frac{25}{64}-\frac{16}{64}}=\frac{3}{8}$，且 $-\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{3}{8}+\frac{25}{64}}=-\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{1}{2}$。實根為 $x_+=\frac{-1+\sqrt{1/2}}{2}\approx-0.146$，正如所需，它大於 $-\frac{5}{8}$。
- 以電腦在整個區域 $|x|,|y|\le 3$ 內搜尋第 (ii) 部分方程的根，找到的恰好是上述五個根。

常見錯誤

- 把 $|z+b|$ 當作有虛部，或把 $|z+2|^2$ 展開成 $(z+2)^2$。模的平方是 $(x+2)^2+y^2$，是一個實數。
- 忘記檢查情況方程的根是否落在該情況適用的範圍內，如 (c) 和 (d)。
- 在 (ii) 中把虛部除以 y，因而漏掉實根 $z=0$。

STEP 之外

混合了 z 與 $|z|$（或與 $\bar{z}$）的方程並不是 z 的多項式方程，所以代數基本定理（fundamental theorem of algebra）對它們有多少個根毫無說明：這裏一條「三次」方程竟有五個根。正確的看法是把它們視為兩個實未知數的一對實方程。你會在大學一年級的複分析（complex analysis）中再次遇到這個觀點：一個函數只有在僅依賴 z 而不依賴 $\bar{z}$ 時，才是複意義下可微的（這就是柯西－黎曼方程（Cauchy–Riemann equations），柯西（Cauchy）、黎曼（Riemann））。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）把這幅幾何圖像描繪得栩栩如生。

詳細解答

STEP II 2025，第 3 題

純數學 • 冪的比較

STEP II 2025，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

每個形如 a^b 與 b^a 的比較（其中 $a, b > 0$），在取對數（logarithm）並除以 ab 之後，都會變成 $\frac{\ln a}{a}$ 與 $\frac{\ln b}{b}$ 的比較。因此一切都歸結到 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的圖像：它上升至 $x = \mathrm{e}$ 處的唯一峯值，然後下降。位於 e 同一側的兩個數很容易比較；位於兩側的兩個數則需要一塊「踏腳石」，例如 $f(2) = f(4)$ 這個巧妙的巧合。

解答

全文中，對 $x > 0$ 記 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$。由於 ln 是遞增的，對正數 a, b 有

$$a^b > b^a \iff b\ln a > a\ln b \iff \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \iff f(a) > f(b),$$

其中我們除以了 $ab > 0$。每一部分都會用到這個轉換。

第 (i) 部分

由商法則（quotient rule），

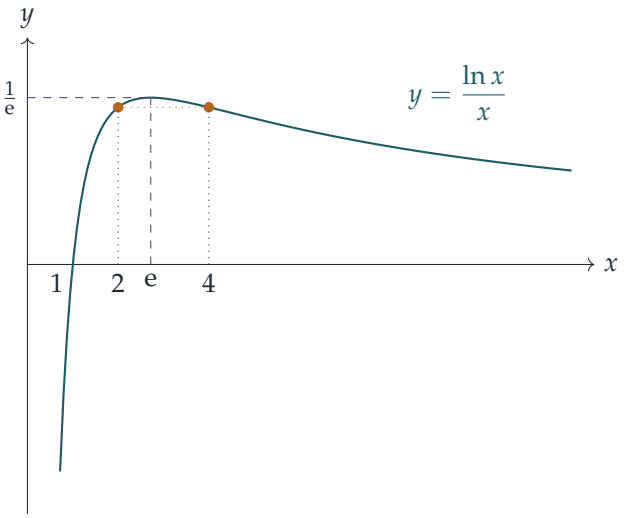
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

它在 $0 < x < \mathrm{e}$ 時為正，在 $x > \mathrm{e}$ 時為負。因此 f 在 $(0, \mathrm{e}]$ 上嚴格遞增（strictly increasing），在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上嚴格遞減，最大值為 $f(\mathrm{e}) = 1/\mathrm{e}$。

其他特徵：

- $f(1) = 0$；在 $(0,1)$ 上 $f < 0$，在 $(1, \infty)$ 上 $f > 0$。

- 當 $x \to 0^+$ 時，$\ln x \to -\infty$ 而 $1/x \to +\infty$，故 $f(x) \to -\infty$：y 軸是一條漸近線（asymptote）。
- 當 $x \to \infty$ 時，由於 $\ln x$ 的增長比 x 慢，$f(x) \to 0^+$：x 軸是一條漸近線。
- 再求導一次得 $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$，因此在 $x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$ 處有一個拐點（point of inflection）。



琥珀色的點標示 $f(2) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{2\ln 2}{4} = f(4)$，我們將在第 (iii) 部分用到。

第 (ii) 部分

(a) 由上述轉換，$3^\pi > \pi^3 \iff f(3) > f(\pi)$。3 與 π 都大於 e，而 f 在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上嚴格遞減；由於 $3 < \pi$，得 $f(3) > f(\pi)$，故 $3^\pi > \pi^3$。

(b) 這裏的不等式是 $\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} > \sqrt{5}^{\,9/4}$，它等價於 $f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$。現在兩個數都小於 e：事實上 $\sqrt{5} < \frac{9}{4} = 2.25 < \mathrm{e}$，其中 $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$ 是因為 $5 < \frac{81}{16}$。在 $(0, \mathrm{e}]$ 上函數 f 嚴格遞增，所以較大的輸入給出較大的值：$f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$，得證。

第 (iii) 部分

取 $a = x$ 及 $b = x + 2$，轉換給出

$$x^{x+2} > (x+2)^x \iff f(x) > f(x+2).$$

對於 $1 < x < 2$，有 $x \in (1,2)$ 及 $x + 2 \in (3,4)$，兩者分處 e 的兩側，因此我們需要一塊踏腳石。

想一想 怎樣比較 f 在 e 左邊某點的值與 f 在其右邊某點的值？

利用穿過兩個琥珀色點的水平線。由於 $1 < x < 2 < \mathrm{e}$ 且 f 在該處遞增，$f(x) < f(2)$。由於 $\mathrm{e} < x+2 < 4$ 且 f 在該處遞減，$f(x+2) > f(4)$。又 $f(2) = f(4)$，因此

$$f(x) < f(2) = f(4) < f(x+2).$$

故 $f(x) < f(x+2)$，所以 $(x+2)^x$ 較大：對 $(1,2)$ 中的每個 x，都有 $(x+2)^x > x^{x+2}$。

第 (iv) 部分

把第一個不等式的兩邊分別改寫為 3 的冪和 $2\sqrt{2}$ 的冪：

$$9^{\sqrt{2}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{2}^{9} = \left(\sqrt{2}^{3}\right)^{3} = \left(2\sqrt{2}\right)^{3}.$$

因此兩個不等式的左邊完全相同，右邊也完全相同；它們是同一個命題，因此等價。

由轉換，$3^{2\sqrt{2}} > (2\sqrt{2})^3 \iff f(3) > f(2\sqrt{2})$。由 $\mathrm{e}^2 < 8$ 得 $\mathrm{e} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$（取正平方根），又由於 $8 < 9$，有 $2\sqrt{2} < 3$。因此

$$\mathrm{e} < 2\sqrt{2} < 3,$$

而由於 f 在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上嚴格遞減，$f(2\sqrt{2}) > f(3)$。所以 $(2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}}$，即

$$\sqrt{2}^{9} > 9^{\sqrt{2}}: \quad \text{較大的是} \sqrt{2}^{9}.$$

第 (v) 部分

設 $a = \sqrt[3]{3}$。我們要比較 8^a 與 a^8，即比較 $f(8)$ 與 $f(a)$。由於 $a < 2 < \mathrm{e} < 8$，兩個輸入再次位於峯值的兩側，而且它們的值原來很接近（$f(a) \approx 0.254$，$f(8) \approx 0.260$），因此我們需要比第 (iii) 部分的技巧更精細的方法。

想一想 能否用 f 在較簡單的點上的值來表示 $f(a)$ 及 $f(8)$？

有用的恆等式是 $f(x^k) = \dfrac{k \ln x}{x^k}$。它給出

$$f(a) = \frac{\frac{1}{3}\ln 3}{a} = \frac{f(3)}{a}, \qquad f(8) = \frac{3\ln 2}{8} = \frac{3}{4} f(2), \qquad f(2\sqrt{2}) = \frac{\frac{3}{2}\ln 2}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} f(2).$$

由第 (iv) 部分，$f(3) < f(2\sqrt{2})$。兩邊除以 $a > 0$，

$$f(a) = \frac{f(3)}{a} < \frac{f(2\sqrt{2})}{a} = \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a}.$$

最後，$a = 3^{1/3} > 2^{1/2} = \sqrt{2}$，因為把兩邊同時取六次方得 $9 > 8$。因此 $2\sqrt{2}\,a > 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$，又由於 $f(2) > 0$，

$$f(a) < \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a} < \frac{3f(2)}{4} = f(8).$$

所以 $f(8) > f(a)$，由轉換即 $8^a > a^8$：較大的是 $8^{\sqrt[3]{3}}$。

驗算

數值上，$3^\pi \approx 31.54$ 對 $\pi^3 \approx 31.01$；$\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} \approx 6.131$ 對 $\sqrt{5}^{9/4} \approx 6.114$；在 $x = 1.5$ 時，$1.5^{3.5} \approx 4.13$ 對 $3.5^{1.5} \approx 6.55$；$9^{\sqrt{2}} \approx 22.36$ 對 $\sqrt{2}^{9} \approx 22.63$；以及 $8^{\sqrt[3]{3}} \approx 20.07$ 對 $\sqrt[3]{3}^{8} \approx 18.72$。全部與上述結論一致。在 (ii) 和 (iv) 中差距很小，這正是需要用圖像論證而非粗略估算的原因。用電腦在 $(1,2)$ 中 10^5 個隨機點檢驗第 (iii) 部分，沒有發現任何例外。

常見錯誤

- 比較 f 在 e 兩側的兩點時，當作 f 是單調（monotonic）的那樣處理。在 (iii) 和 (v) 中，踏腳石是必不可少的。
- 忘記把 $b\ln a > a\ln b$ 除以 ab 時不等號方向不變，只是因為 $ab > 0$。
- 在 (ii)(b) 中，沒有說明 $\frac{9}{4}$ 與 $\sqrt{5}$ 哪個較大，或沒有說明兩者都小於 e。

STEP 之外

方程 $a^b = b^a$ 在 $a \neq b$ 時正正就是 $f(a) = f(b)$，而每條水平線 $y = c$（其中 $0 < c < 1/\mathrm{e}$）都與圖像相交兩次。其中 $a < b$ 的解可參數化為 $a = (1+\frac{1}{t})^t$、$b = (1+\frac{1}{t})^{t+1}$，其中 $t > 0$；取 $t = 1$ 得 $(2,4)$，這是唯一一對這樣的正整數。當 $t \to \infty$ 時兩者都趨向 e，這是大學一年級分析（analysis）中的標準極限之一。關於這類論證背後的單調性與均值定理（mean value theorem）的嚴謹處理，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP II 2025，第 4 題

純數學 • 下取整函數恆等式

STEP II 2025，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

一切都建基於一個事實：$\lfloor x \rfloor = m$ 的意思恰恰是 m 為整數，且 $m \le x < m+1$。第 (i) 部分說明，整數平移可以直接穿過下取整函數（floor function）。有了這一點，便會發現 f_n 是以 $\frac{1}{n}$ 為週期的週期函數（periodic function），因此我們只需在一個短區間上研究它，而在該區間上每一項都很容易計算。第 (iii) 部分其實是 $n = 2$ 的情況換了個樣子出現，它使無窮級數可以伸縮相消（telescope）。

解答

第 (i) 部分

設 $m = \lfloor x \rfloor$，則 m 為整數，且 $m \le x < m+1$。各邊加上整數 n，得

$$m + n \le x + n < (m+n) + 1.$$

由於 $m+n$ 是整數，它就是不超過 $x+n$ 的最大整數。所以 $\lfloor x+n \rfloor = m+n = \lfloor x \rfloor + n$，得證。

第 (ii)(a) 部分

記 $\mathrm{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$。把 x 換成 $x + \frac{1}{n}$，和式中每一項都會向後移一位：

$$\mathrm{f}_n\left(x + \tfrac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor.$$

和式的最後一項是 $\lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$，而 $\lfloor nx+1\rfloor = \lfloor nx\rfloor + 1$，兩者都由第 (i) 部分取 $n=1$ 得出。所以

$$\mathrm{f}_n\left(x+\tfrac{1}{n}\right) = \lfloor x\rfloor + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor x+\tfrac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx\rfloor - 1 = \mathrm{f}_n(x).$$

第 (ii)(b) 部分

設 $0 \le t < \frac{1}{n}$。對於 $0 \le k \le n-1$，

$$0 \le t + \tfrac{k}{n} < \tfrac{1}{n} + \tfrac{n-1}{n} = 1,$$

因此 $\lfloor t+\frac{k}{n}\rfloor = 0$。此外 $0 \le nt < 1$，所以 $\lfloor nt\rfloor = 0$。每一項都是零，因此 $\mathrm{f}_n(t) = 0$。

第 (ii)(c) 部分

> ? **想一想** (a) 部分只讓我們每次向上移 $\frac{1}{n}$。那麼，位於 $[0, \frac{1}{n})$ 下方的 x 要怎樣才能到達？

在點 $x - \frac{1}{n}$ 應用 (a)，得 $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n\left(x-\frac{1}{n}\right)$，所以我們既可以向上移，也可以向下移。由歸納法（induction），對每個整數 m（無論正負），都有 $\mathrm{f}_n\left(x+\frac{m}{n}\right) = \mathrm{f}_n(x)$。

現在任取實數 x，並設 $m = \lfloor nx\rfloor$，則 $m \le nx < m+1$。令 $t = x - \frac{m}{n}$。各邊除以 $n > 0$，得 $0 \le t < \frac{1}{n}$。因此由 (b)，

$$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n\left(t+\tfrac{m}{n}\right) = \mathrm{f}_n(t) = 0$$

成立。所以對所有 x 都有 $\mathrm{f}_n(x) = 0$，這就是恆等式

$$\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\tfrac{1}{n}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x+\tfrac{n-1}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor.$$

第 (iii)(a) 部分

在 (ii)(c) 中取 $n=2$，並在 $\frac{x}{2}$ 處求值：

$$0 = \mathrm{f}_2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \left\lfloor \tfrac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\right\rfloor - \left\lfloor 2\cdot\tfrac{x}{2}\right\rfloor,$$

移項整理即得 $\lfloor \frac{x}{2}\rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2}\rfloor = \lfloor x\rfloor$。

第 (iii)(b) 部分

> **想一想** (iii)(a) 裏只有一個孤零零的 $+1$，它怎樣幫助我們處理 $\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ 這一項？

把分子和分母同時除以 2^k。設 $y = x/2^k$，則

$$\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y+1}{2} \right\rfloor = \lfloor y \rfloor - \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor,$$

這裏用了 (iii)(a)，並以 y 代替 x。所以 $k = 0, 1, \ldots, K$ 各項之和會伸縮相消：

$$S_K = \sum_{k=0}^{K} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{K+1}} \right\rfloor.$$

當 $K \to \infty$ 時，$x/2^{K+1} \to 0$，而答案取決於它從 0 的哪一側趨近。

- 若 $x \geq 0$：一旦 $2^{K+1} > x$，便有 $0 \leq x/2^{K+1} < 1$，所以最後的取整值為 0，此後 $S_K = \lfloor x \rfloor$。
- 若 $x < 0$：一旦 $2^{K+1} \geq -x$，便有 $-1 \leq x/2^{K+1} < 0$，所以最後的取整值為 -1，此後 $S_K = \lfloor x \rfloor + 1$。

無論哪種情況，都只有有限多項不為零，因此該無窮級數為

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{2^2} \right\rfloor + \cdots = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0, \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x < 0. \end{cases}$$

當 x 為非負整數時，和就是 x。

驗算

試取 $x = 7$。各項為 $\lfloor 4 \rfloor = 4$、$\lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 2$、$\lfloor \frac{11}{8} \rfloor = 1$、$\lfloor \frac{15}{16} \rfloor = 0$，之後每一項都是 0。它們的和是 $7 = \lfloor 7 \rfloor$。再試 $x = -\frac{5}{2}$：各項為 $\lfloor -\frac{3}{4} \rfloor = -1$、$\lfloor -\frac{1}{8} \rfloor = -1$、$\lfloor \frac{3}{16} \rfloor = 0$，如此類推。和為 $-2 = \lfloor -\frac{5}{2} \rfloor + 1$，證實負數的情況確實不同。至於 (ii)，取 $n = 3$、$x = 1.5$，得 $1 + 1 + 2 = 4 = \lfloor 4.5 \rfloor$。用電腦對兩萬個隨機有理數 x 及 $1 \leq n \leq 30$ 的各個值作檢驗，題中每一條恆等式以及伸縮相消後的部分和都得到證實。

常見錯誤

- 在 (ii)(c) 中只用 (a) 向上移，這樣只涵蓋了 $x \geq 0$，對負數 x 則甚麼也沒有說明。
- 在 (iii)(b) 中假設對所有 x 都有 $\lfloor x/2^{K+1} \rfloor \to 0$。對於負數 x，它最終停留在 -1，而不是 0。

- 在 a 和 b 都不是整數時寫 $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$。第 (i) 部分正正就是容許這樣寫的情況。

STEP 之外

(ii)(c) 中的恆等式就是埃爾米特恆等式（Hermite's identity）。它屬於一系列在初等數論（elementary number theory）中佔核心地位的取整函數結果，例如勒讓德（Legendre）公式 $\sum_{k\geq 1} \lfloor N/p^k \rfloor$，它給出整除 $N!$ 的質數 p 的最高次冪。(iii)(b) 中的和也在數算某樣東西：對正整數 x，第 k 項就是從 1 到 x 之間能被 2^k 整除但不能被 2^{k+1} 整除的整數個數，而每個整數都恰好被數一次。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是觀察這些思想如何實際運用的好去處。

詳細解答

STEP II 2025，第 5 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2025，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

這裏每個積分（integral）的範圍都是由 0 到 ∞，而形如 $x = u^{-m}$ 的代換（substitution）會把 $[0, \infty)$ 映射到自身，只是兩端互換了。$\mathrm{d}x$ 帶來的負號會抵消上下限的互換，所以我們得到的仍然是一個在 $[0, \infty)$ 上的積分。如果新的被積函數（integrand）正好是原來的負數，那麼這個積分等於它自己的相反數，因此為零。如果新的被積函數是另一個形狀相同的被積函數的倍數，我們就得到兩個積分之間的關係，而毋須計算任何一個積分。在第 (iii) 及第 (iv) 部分，我們把指數（exponent）保留為一般形式，再選取它的值，使 u 的冪互相抵消。

解答

在整個解答中，若 $x = u^{-m}$ 且 $m > 0$，則當 $u \to \infty$ 時 $x \to 0$，而當 $u \to 0$ 時 $x \to \infty$，所以

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\infty^0 f(u^{-m})\left(-mu^{-m-1}\right)\mathrm{d}u = \int_0^\infty f(u^{-m})\,mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u.$$

我們會先在 $m = 1$ 及 $m = 2$ 的情況下使用這個結果，然後再用於一般的 m。

第 (i) 部分

把該積分記為 I，並設 $x = u^{-1}$；把上下限重新排好次序後，$\mathrm{d}x \to u^{-2}\,\mathrm{d}u$。對 $u > 0$，

$$x(x^3+1) = \frac{1}{u}\cdot\frac{1+u^3}{u^3} = \frac{u^3+1}{u^4}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{x(x^3+1)} = \frac{\sqrt{u^3+1}}{u^2},$$

而且

$$\sqrt{x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{u}} - 1 = \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}.$$

因此

$$I = \int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{u^2}{\sqrt{u^3+1}} \cdot \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\int_0^\infty \frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u = -I.$$

由於變量叫甚麼名字並不重要，最後那個積分其實又是 I。所以 $2I = 0$，得 $I = 0$，正如所求。

注意，這並不表示被積函數為零。它在 $(0,1)$ 上是負的，在 $(1,\infty)$ 上是正的，而代換令這兩部分面積恰好互相抵消。

第 (ii) 部分

現在設 $x = u^{-2}$；重新排好上下限後，$\mathrm{d}x \to 2u^{-3}\,\mathrm{d}u$。對 $u > 0$，

$$x^3+1 = u^{-6}+1 = \frac{1+u^6}{u^6}, \qquad \sqrt{x^3+1} = \frac{\sqrt{u^6+1}}{u^3}.$$

因此

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^\infty \frac{u^3}{\sqrt{u^6+1}} \cdot \frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^6+1}},$$

把 u 改名為 x 後，這就是所求的結果。

第 (iii) 部分

第 (i) 部分是 $s = 1$、$p = 3$、$r = \frac{1}{2}$ 的情況，所以我們用字母重複同一方法。把該積分記為 J，並設 $x = u^{-1}$：

$$x^s(x^p+1) = u^{-s} \cdot \frac{1+u^p}{u^p} = \frac{u^p+1}{u^{s+p}}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{x^s(x^p+1)} = u^{-(s+p)/2}\sqrt{u^p+1},$$

同時 $x^r - 1 = (1-u^r)/u^r$。所以

$$J = \int_0^\infty \frac{(1-u^r)\,u^{-r}\,u^{(s+p)/2}\,u^{-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u = -\int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{(s+p)/2-r-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

把它與寫成以下形式的 J 本身比較：

$$J = \int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{-s/2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

想一想 為甚麼只需令 u 的冪相符，而不用計算任何東西？

如果兩個 u 的冪相同，代換就會把 J 變成 $-J$，於是正如第 (i) 部分一樣得 $J = 0$。所以我們需要

$$\frac{s+p}{2} - r - 2 = -\frac{s}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad r = s + \frac{p}{2} - 2.$$

取這個 r 值，便有 $J=-J$，所以 $J=0$。（題目告訴我們 p 和 s 使這些積分收斂（converge），而論證 $J=-J\Rightarrow J=0$ 所需要的就只是這一點。）驗算一下：$s=1$ 和 $p=3$ 給出 $r=1+\frac{3}{2}-2=\frac{1}{2}$，這正是第 (i) 部分。

第 (iv) 部分

第 (ii) 部分是 $k=2$、$p=3$、$q=6$ 的情況，而它來自 $x=u^{-2}$。所以我們嘗試 $x=u^{-m}$，其中 $m>0$，使 $\mathrm{d}x\to mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u$：由於 $x^p+1=(1+u^{mp})/u^{mp}$，

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p+1}} = m\int_0^\infty \frac{u^{mp/2}\,u^{-m-1}}{\sqrt{u^{mp}+1}}\,\mathrm{d}u.$$

多出來的 u 的冪會在以下情況消失：

$$\frac{mp}{2}=m+1 \quad\Longleftrightarrow\quad p=2+\frac{2}{m},$$

此時右方為 $m\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^q+1}}$，其中 $q=mp=2m+2$。

現在取 $m=k$。對任何 $k>0$，選取

$$p=2+\frac{2}{k},\qquad q=2k+2$$

便得到

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p+1}} = k\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^q+1}}.$$

由於 $k>0$，兩個指數都大於 2。這正是這些積分收斂的條件，因為當 x 很大時，被積函數的表現與 $x^{-p/2}$ 相若。所以我們的關係式中的積分都存在。取 $k=2$ 便重新得到第 (ii) 部分的 $p=3$、$q=6$，而 $k=1$ 則給出平凡情況 $p=q=4$。

驗算

- 數值上，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}\approx 2.8044$，而 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6+1}}\approx 1.4022$，恰好是一半，與第 (ii) 部分所說的一致。
- 第 (i) 部分的積分在機器精度內計算出來為零，儘管負的貢獻主要來自 $x=0$ 附近，而正的貢獻則稀疏地分佈在 $(1,\infty)$ 上。
- 對隨機選取的容許 p 和 s，以電腦驗算第 (iii) 部分的積分，在 $r=s+\frac{p}{2}-2$ 時得到零。把 r 改變 0.3，則得到明顯非零的值。
- 對 $k=\frac{1}{2}$（即 $p=6$、$q=3$），第 (iv) 部分的關係式就是把第 (ii) 部分倒過來讀，理應如此。

常見錯誤

- 忘記代換會互換上下限。$\mathrm{d}x$ 帶來的負號與倒轉的上下限互相抵消，漏掉其中任何一個，都會令第 (i) 部分的符號出錯。
- 在第 (iii) 部分處理一般的冪時，寫成 $\sqrt{u^{-s}} = u^{-s}/2$，而不是 $u^{-s/2}$。
- 在第 (iv) 部分，只對某個特定的 k 找出一對 (p,q)，而不是把 p 和 q 寫成適用於每個 $k > 0$ 的函數。

STEP 之外

這些積分全都可以求出閉式（closed form）。代換 $t = x^p/(1+x^p)$ 會把 $\int_0^\infty (1+x^p)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ 變成 $\frac{1}{p}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)$，其中 B 是歐拉（Euler）的 Beta 函數（Beta function）。再配合 Gamma 函數（Gamma function），就可以明確寫出第 (iv) 部分中的比值。利用對稱 $x \mapsto 1/x$ 把一個積分變成它自己的相反數，這個技巧在分析（analysis）和圍道積分（contour integration）中一再出現。若想仔細學習反常積分（improper integrals），包括我們在此可以略過的收斂問題，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。若想看更多 STEP 風格的代換技巧，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）。

詳細解答

STEP II 2025，第 6 題

純數學 • 與拋物線相切的圓

STEP II 2025，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

這裏所有圓的圓心都在 y 軸上，因此一切都關於 x 對稱（symmetric），而「在兩點相切」的意思就是在一對鏡像點 $(\pm x_0, y_0)$ 相切，其中 $x_0 \neq 0$。要刻畫相切（tangency），最簡單的方法是說兩者的法線（normal）一致：通往切點的半徑必須沿着另一曲線在該點的法線方向。一旦第 (i) 和第 (ii) 部分各自給出以圓心高度 a 表示 r^2 的公式，第 (iii) 部分就變成研究一條關於 a 的二次方程（quadratic equation），而它的兩個根（roots）正是 a_1 和 a_2。

解答

第 (i) 部分

設圓與拋物線（parabola）相切於 $P = (x_0, y_0)$，其中 $x_0 \neq 0$。（兩個不同的切點不可能都在對稱軸上，因為拋物線與 $x = 0$ 只相交於原點；而且由對稱性，若 (x_0, y_0) 是切點，則 $(-x_0, y_0)$ 也是。）

圓在 P 的法線沿着半徑方向 $(x_0,\ y_0 - a)$。把拋物線寫成 $2ky - x^2 = 0$，它的法線沿着梯度（gradient）方向 $(-2x_0,\ 2k)$。相切即表示這兩個向量平行：

$$x_0 \cdot 2k - (y_0 - a)(-2x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_0\,(k + y_0 - a) = 0.$$

由於 $x_0 \neq 0$，得 $y_0 = a - k$。由於 P 在拋物線上，$x_0^2 = 2ky_0 = 2k(a - k)$；又由於 P 在圓上，故

$$r^2 = x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a - k) + k^2 = k(2a - k),$$

得證。

反過來，設 $a > k > 0$ 且 $r^2 = k(2a-k)$。令 $y_0 = a-k > 0$ 及 $x_0 = \sqrt{2k(a-k)} > 0$。按構造，$(\pm x_0, y_0)$ 都在拋物線上；又因 $x_0^2 + (y_0-a)^2 = 2k(a-k) + k^2 = r^2$，它們也在圓上。在這兩點，法線 $(\pm x_0, -k)$ 與 $(\mp 2x_0, 2k)$ 平行，所以兩曲線在該處有公共切線。由於 $x_0 \neq 0$，圓與拋物線在兩個不同的點相切。

（作為交叉驗證，把 $x^2 = 2ky$ 代入圓的方程，得 $y^2 - 2(a-k)y + (a-k)^2 = 0$，即 $(y-(a-k))^2 = 0$：這是一個重根（repeated root），正是相切在代數上的標誌。）

第 (ii) 部分

直線 $y = c + x$，即 $x - y + c = 0$，與圓相切當且僅當它與圓心 $(0, a)$ 的距離等於 r：

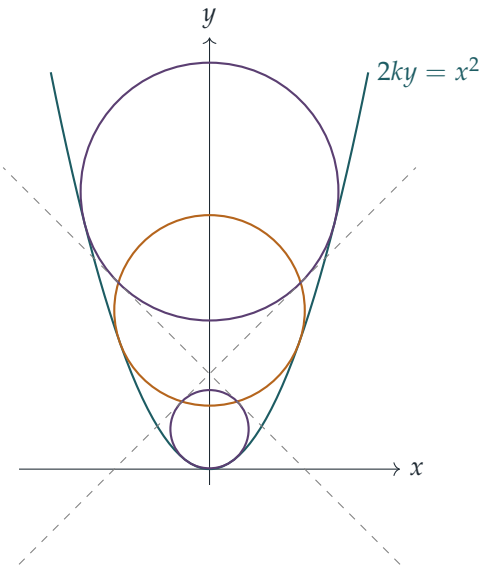
$$r = \frac{|0 - a + c|}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad r^2 = \frac{(a-c)^2}{2}.$$

直線 $y = c - x$ 是它關於 y 軸的鏡像，所以給出相同的條件。

切點就是從 $(0, a)$ 到直線的垂足（foot of the perpendicular）。半徑垂直於直線，故方向為 $(1, -1)$；從 $(0, a)$ 移動 $t(1, -1)$ 而落在 $y = c + x$ 上，得 $a - t = c + t$，所以 $t = \frac{a-c}{2}$。與 $y = c + x$ 的切點是

$$\left(\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right),$$

而由對稱性，與 $y = c - x$ 的切點是 $\left(-\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right)$。



$k = 1$、$c = 3$ 的情況：拋物線、與它相切的兩個圓 C_1、C_2（紫紅色）、直線 $y = 3 \pm x$（虛線），以及第 $(iii)(b)$ 部分的圓（琥珀色）。

第 (iii)(a) 部分

每個圓都與拋物線在兩點相切，所以由第 (i) 部分，$r_i^2 = k(2a_i - k)$；每個圓又與直線 $y = c \pm x$ 相切，所以由第 (ii) 部分，$r_i^2 = \frac{1}{2}(a_i - c)^2$。兩式相等，得

$$(a_i - c)^2 = 2k(2a_i - k) \quad \Longrightarrow \quad a_i^2 - 2(c + 2k)\, a_i + c^2 + 2k^2 = 0.$$

所以 a_1 和 a_2 都滿足二次方程 $a^2 - 2(c + 2k)a + c^2 + 2k^2 = 0$。由於 $a_1 \neq a_2$，它們正是這方程的兩個根，因此

$$a_1 + a_2 = 2c + 4k, \qquad a_1 a_2 = c^2 + 2k^2.$$

於是

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= (a_1 + a_2)^2 - 2a_1 a_2 \\ &= 4c^2 + 16kc + 16k^2 - 2c^2 - 4k^2 \\ &= 2c^2 + 16kc + 12k^2, \end{aligned}$$

(a) 得證。

第 (iii)(b) 部分

由第 (ii) 部分，C_i 上的切點是 $\left(\pm\frac{a_i - c}{2},\ \frac{a_i + c}{2}\right)$。記 $u_i = a_i - c$ 會更整潔，這樣切點就是 $\left(\pm\frac{u_i}{2},\ c + \frac{u_i}{2}\right)$。

> **想一想** 我們需要一個經過四點的圓，但只有 d 和 p 兩個未知數。怎樣才能在不明確解出 a_1 和 a_2 的情況下確定它們？

這四點是兩對鏡像點，而任何圓心在 y 軸上的圓都是對稱的，所以只需令圓經過 $u = u_1$ 及 $u = u_2$ 時的點 $\left(\frac{u}{2}, c + \frac{u}{2}\right)$ 即可。這條件是

$$\frac{u^2}{4} + \left(c - d + \frac{u}{2}\right)^2 = p^2 \quad \Longleftrightarrow \quad u^2 + 2(c - d)\, u + 2(c - d)^2 - 2p^2 = 0. \qquad (*)$$

另一方面，把 $a = u + c$ 代入 (a) 中的二次方程，得

$$u^2 - 4k\, u + 2k^2 - 4kc = 0, \qquad (**)$$

它的根恰好是 u_1 和 u_2，而由於 $a_1 \neq a_2$，這兩個根不相等。圓經過全部四點，當且僅當 u_1 和 u_2 都是 $(*)$ 的根。兩個具有相同兩個相異根的首一 (monic) 二次多項式必然相同，所以與 $(**)$ 比較係數：

$$2(c - d) = -4k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k,$$

然後 $2(c - d)^2 - 2p^2 = 8k^2 - 2p^2 = 2k^2 - 4kc$，所以

$$p^2 = 3k^2 + 2kc = k(3k + 2c).$$

第 (iii)(c) 部分

我們使用第 (i) 部分的逆命題（converse）。當 $d = c + 2k$ 時，

$$k(2d - k) = k(2c + 3k) = p^2,$$

所以這個圓正好具有 $r^2 = k(2a - k)$ 的形式，只是以 d 代替 a。剩下要驗證的是 $d > k$。

> **想一想** (a) 和 (b) 都沒有提及任何不等式，那麼像 $d > k$ 這樣的不等式（inequality）從何而來？

它來自 C_1 和 C_2 確實與拋物線在兩點相切這一事實。在第 (i) 部分，在兩點相切迫使切點滿足 $y_0 = a - k$ 且 $x_0^2 = 2k(a - k) > 0$（因為 $x_0 \neq 0$），所以 $a_1 > k$ 且 $a_2 > k$。把兩式相加並利用 (a)，

$$2c + 4k = a_1 + a_2 > 2k \quad \Longrightarrow \quad c > -k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k > k.$$

所以 $d > k > 0$ 且 $p^2 = k(2d - k)$，由第 (i) 部分的後半，圓 $x^2 + (y - d)^2 = p^2$ 與拋物線 $2ky = x^2$ 在兩點相切，即 $\left(\pm\sqrt{2k(c + k)},\ c + k\right)$。

驗算

取 $k = 1$、$c = 3$（即上圖）。(a) 中的二次方程是 $a^2 - 10a + 11 = 0$，所以 $a = 5 \pm \sqrt{14} \approx 8.742$ 及 1.258。兩者之和為 $10 = 2c + 4k$，平方和為 $78 = 2 \cdot 9 + 16 \cdot 3 + 12$。(b) 給出 $d = 5$ 及 $p^2 = 9$。圓 $x^2 + (y - 5)^2 = 9$ 與 $2y = x^2$ 相交於 $2y + (y - 5)^2 = 9$，即 $(y - 4)^2 = 0$：在 $y = 4$ 有重根，所以兩者相切於 $(\pm 2\sqrt{2}, 4)$，與 (c) 的預測一致。四個切點中的每一個，例如 $\left(\frac{\sqrt{14}+2}{2}, \frac{\sqrt{14}+8}{2}\right)$，與 $(0, 5)$ 的距離都是 3。所有結果也已用電腦對數以百計隨機選取的容許 k 和 c 值驗證過。

常見錯誤

- 在 (i) 中，忘記切點滿足 $x_0 \neq 0$。正是這一點讓我們可以除以 x_0，也正是它給出 $a > k$。
- 在 (iii)(a) 中，只用了 $r^2 = k(2a - k)$ 或只用了 $r^2 = \frac{1}{2}(a - c)^2$。關於 a 的二次方程來自兩者同時成立。
- 在 (iii)(c) 中，驗證了 $p^2 = k(2d - k)$ 卻沒有驗證 $d > k$。沒有這一點，這個「圓」可能只在原點相切，甚至完全不相切。

STEP 之外

由第 (i) 部分，圓心在 y 軸上且與拋物線兩度相切的圓是 $x^2 + y^2 - k^2 - 2a(y-k) = 0$：一條關於參數 a 為線性的方程。這樣的一族圓稱為圓束（pencil of circles，又稱共軸圓系（coaxal system）），而 C_1、C_2 以及 (b) 中的圓都屬於這一族。比對法線是邁向曲線之間接觸（contact）這一概念的第一步；與曲線達到二階接觸的圓就是它的曲率圓（circle of curvature），這會在曲線微分幾何（differential geometry of curves）的入門課程中遇到。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了許多同一風格、STEP 式的坐標幾何題目。

詳細解答

STEP II 2025，第 7 題

純數學 • 非線性微分方程

STEP II 2025，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

右邊的 $2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 恰好是 x^2 對 t 的導數（derivative），所以方程可以立即積分一次，得到一階方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + C$。初始條件決定 C，而三個部分正好對應 C 的三種可能符號：零、正和負。之後每個一階方程都可以分離變數（separation of variables），粒子的運動情況可以從公式讀出，甚至直接從 $x^2 + C$ 的符號看出來。

解答

積分一次

由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right) = 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，方程即是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right), \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + C$$

其中 C 為常數。在 $t = 0$ 時 $x = a$，所以 C 等於初速度減去 a^2。在三個部分中，分別有 $C = 0$、$C = p^2$ 及 $C = -q^2$。

第 (i) 部分

此時 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2$。只要 $x \neq 0$，速度便是正數，所以 x 從 $a > 0$ 開始遞增，永遠不會到達 0；因此我們可以除以 x^2 並分離變數：

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = t \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{1 - at}.$$

當 t 從 0 增加至趨近 $\frac{1}{a}$ 時，粒子沿正方向移動，而且愈來愈快（其速度為 x^2），並且當 $t \to \frac{1}{a}$ 時 $x \to \infty$。粒子在有限時間 $\frac{1}{a}$ 內逃逸至無窮遠，而解在該時刻之後並不存在。

第 (ii) 部分

現在 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + p^2$，它恆為正數，所以可以分離變數：

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2+p^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\left(\arctan\frac{x}{p} - \arctan\frac{a}{p}\right) = t.$$

設 $\alpha = \arctan\dfrac{a}{p}$，由於 $a, p > 0$，它位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內，於是

$$x = p\tan\left(pt + \alpha\right).$$

此式在 $pt + \alpha < \frac{\pi}{2}$ 時成立。粒子同樣沿正方向移動，速率不斷增加，而當 $pt + \alpha \to \frac{\pi}{2}$ 時 $x \to \infty$，即當

$$t \to \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{p}\right) = \frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a},$$

這裏用到了當 $\theta > 0$ 時 $\arctan\theta + \arctan\frac{1}{\theta} = \frac{\pi}{2}$。所以粒子在有限時間內逃逸至無窮遠，而且比 (i) 更早，這正符合較大初速度的預期。

第 (iii) 部分

現在

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 - q^2 = (x-q)(x+q).$$

在 $x = \pm q$ 處速度為零，所以這兩個位置是平衡點（equilibria）。$x^2 - q^2$ 的符號已經說明了一切：當 $x > q$ 時粒子向右移動，當 $-q < x < q$ 時向左移動。所以答案取決於 a 與 q 的大小比較。

利用部分分式（partial fractions）$\dfrac{1}{x^2-q^2} = \dfrac{1}{2q}\left(\dfrac{1}{x-q} - \dfrac{1}{x+q}\right)$ 分離變數：

$$\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{x-q}{x+q}\right| = t + \text{常數}.$$

取指數，並以 $t = 0$ 時 $x = a$ 確定常數，可推想

$$\frac{x-q}{x+q} = Ke^{2qt}, \qquad K = \frac{a-q}{a+q}, \qquad \text{即} \qquad x = q\,\frac{1+Ke^{2qt}}{1-Ke^{2qt}}.$$

為確保各種情況下符號都正確，我們直接驗證。設 $E = Ke^{2qt}$，則 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2qE$。於是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = q\cdot\frac{2\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}{(1-E)^2} = \frac{4q^2E}{(1-E)^2}, \qquad x^2 - q^2 = q^2\,\frac{(1+E)^2-(1-E)^2}{(1-E)^2} = \frac{4q^2E}{(1-E)^2},$$

兩者相等。在 $t = 0$ 時，$1 + K = \frac{2a}{a+q}$ 而 $1 - K = \frac{2q}{a+q}$，所以 $x = q\cdot\frac{a}{q} = a$。因此只要 $1 - E \neq 0$，這條公式就是方程的解。注意由於 $a > 0$，有 $-1 < K < 1$。

情況 $a > q$。 此時 $0 < K < 1$，而 $E = Ke^{2qt}$ 從 K 開始遞增。粒子以正速度 $a^2 - q^2$ 出發，沿正方向移動，愈來愈快。當 $e^{2qt} = \frac{1}{K}$ 時分母 $1 - E$ 達到 0，所以

$$x \to \infty \quad \text{當} \quad t \to \frac{1}{2q} \ln \frac{a+q}{a-q}.$$

與 (i) 和 (ii) 一樣，粒子在有限時間內逃逸至無窮遠。

情況 $a = q$。 此時 $K = 0$，對所有 t 都有 $x = q = a$。初速度為 0，加速度 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 亦然：粒子在 $x = a$ 處保持靜止。

情況 $0 < a < q$。 此時 $-1 < K < 0$，所以 $E < 0$，而分母 $1 - E > 1$ 永不為零：解對所有 $t \geq 0$ 都存在。

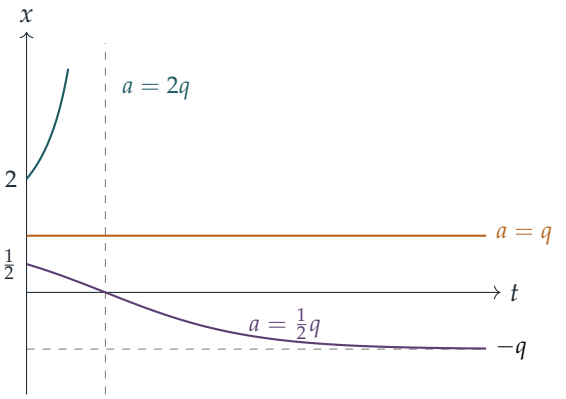
想一想 粒子會停在原點，還是穿過原點？它最終會到哪裏？

初速度 $a^2 - q^2$ 為負數，所以粒子沿負方向移動。當 $E = -1$，即 $t = \frac{1}{2q} \ln \frac{q+a}{q-a}$ 時，粒子位於原點，並且直接穿過，因為該處的速度是 $-q^2 \neq 0$。當 $t \to \infty$ 時，$E \to -\infty$，而

$$x = q\,\frac{1+E}{1-E} \to -q.$$

在整個過程中 $|x| < q$（因為當 $E < 0$ 時 $\frac{1+E}{1-E} \in (-1, 1)$），所以速度 $x^2 - q^2$ 一直保持負值：粒子穩定地向左移動，趨近 $x = -q$ 但永遠不會到達。它的速率 $q^2 - x^2$ 在經過原點時最大，為 q^2，之後逐漸減小至零。

以雙曲函數(hyperbolic functions)表示，這些解為：當 $a > q$ 時 $x = -q \coth\left(qt - \operatorname{arcoth} \frac{a}{q}\right)$，當 $a < q$ 時 $x = -q \tanh\left(qt - \operatorname{artanh} \frac{a}{q}\right)$。下圖展示 $q = 1$ 時的三種情況。



對於 $a = 2q$ 和 $a = \frac{1}{2}q$，特殊時刻 $\frac{1}{2q} \ln 3$（垂直虛線）分別是爆破時刻和穿過原點的時刻。

驗算

- 在 (ii) 中令 $p \to 0$：$p\tan(pt + \arctan\frac{a}{p}) \to \frac{a}{1-at}$ 及 $\frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a} \to \frac{1}{a}$，與 (i) 吻合。在 (iii) 中 $a > q$ 的情況下令 $q \to 0$，結果亦相同。
- 對 $x = \frac{a}{1-at}$ 求導：$\dot{x} = \frac{a^2}{(1-at)^2} = x^2$ 及 $\ddot{x} = \frac{2a^3}{(1-at)^3} = 2x\dot{x}$。
- 以數值方法逐步推進原來的二階方程，例如取 $a = 0.5$、$q = 1.4$，得到 $t = 1$ 時 $x \approx -1.0814$，$t = 3$ 時 $x \approx -1.3987$，與公式相符；而粒子在 $t \approx 0.2669$ 時位於原點，正如預測。

常見錯誤

- 沒有察覺 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 是一個恰當導數，轉而嘗試如 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 配合 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的代換；這方法可行，但較費時。
- 在 (iii) 中漏掉對數內的絕對值，以致當 $a < q$ 時得出錯誤的 K 符號。
- 遺漏平衡情況 $a = q$，或說粒子「停在 $-q$」，但其實它只是趨近該點。

STEP 之外

這裏看到的有限時間爆破（finite-time blow-up）是非線性方程的標誌：$\dot{x} = x^2$ 的右邊完全光滑，但其解只在有限時間內存在，這在線性方程中從不會發生。第 (iii) 部分是相線分析（phase-line analysis）的初步：平衡點 $x = q$（不穩定）和 $x = -q$（穩定）支配着整個運動，你甚至在求解之前就可以從 $x^2 - q^2$ 的符號預測其行為。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）討論了這兩個概念，包括解的存在性與唯一性。

詳細解答

STEP II 2025，第 8 題

純數學 • 整數的平衡分拆

STEP II 2025，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

把一個集合的每個元素都加上同一個數 c，其總和與平方和的變化是可以控制的：變化只取決於元素的個數、元素之和，（就平方而言）再無其他。因此，若兩個元素個數相同的集合，其總和與平方和已經相等，那麼把兩者各自平移一份再互相對調，便可構造出一個更大的平衡分割（balanced partition）。第 (ii) 部分正是這個想法背後的代數，第 (iii) 及 (iv) 部分則是它的兩個應用。

解答

第 (i) 部分

$1, 2, \ldots, 8$ 的總和是 36，它們的平方和是 204，所以每一半的總和須為 18，平方和須為 102。

把 8 放進 B。B 其餘三個元素的總和須為 10，平方和須為 $102 - 64 = 38$。由 1 至 7 中選出三個互不相同、總和為 10 的數，所得三元組為

$$\{1,2,7\},\ \{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,5\},$$

其平方和分別為 54、46、42 和 38。只有 $\{2,3,5\}$ 符合要求，所以

$$A = \{1,4,6,7\}, \qquad B = \{2,3,5,8\}.$$

驗證：$1+4+6+7 = 18 = 2+3+5+8$，且 $1+16+36+49 = 102 = 4+9+25+64$。（以上搜尋亦顯示，除了對調 A 與 B 之外，這是唯一一個分成兩組各四個數的平衡分割。）

第 (ii) 部分

用二項式定理（binomial theorem）展開每個立方：

$$\sum_{k=1}^{m}(c+b_k)^3 = mc^3 + 3c^2\sum_{k=1}^{m} b_k + 3c\sum_{k=1}^{m} b_k^2 + \sum_{k=1}^{m} b_k^3,$$

以 a_k 代替 b_k 亦同理。因此

$$\begin{aligned}&\left(\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3\right) - \left(\sum b_k^3 + \sum(c+a_k)^3\right)\\ &\qquad = 3c^2\left(\sum b_k - \sum a_k\right) + 3c\left(\sum b_k^2 - \sum a_k^2\right),\end{aligned}$$

因為 mc^3 項互相抵消，兩份 $\sum a_k^3$ 和兩份 $\sum b_k^3$ 亦然。根據假設，兩個括號都等於零，所以對每個實數 c，兩邊都相等，得證。

留意同樣的展開降低一次方便得到

$$\sum a_k^2 + \sum(c+b_k)^2 - \sum b_k^2 - \sum(c+a_k)^2 = 2c\left(\sum b_k - \sum a_k\right) = 0,$$

而對一次方則有 $\sum a_k + \sum(c+b_k) = \sum b_k + \sum(c+a_k)$，因為兩者都等於 $mc + \sum a_k + \sum b_k$。

第 (iii) 部分

取 (i) 中的平衡分割，令 a_k 依次取 $1,4,6,7$，b_k 依次取 $2,3,5,8$，並取 $c=8$。於是 $c+a_k$ 依次為 $9,12,14,15$，$c+b_k$ 依次為 $10,11,13,16$。設

$$A = \{1,4,6,7\}\cup\{10,11,13,16\}, \qquad B = \{2,3,5,8\}\cup\{9,12,14,15\}.$$

這兩個集合不相交（disjoint），各有 8 個元素，合起來正是 $\{1,2,\ldots,16\}$，因為 $\{1,\ldots,8\}$ 和 $\{9,\ldots,16\}$ 都分別被分到兩者之中。

> **想一想** 為甚麼要把 B 的平移副本放進 A，而不是把 A 的平移副本放進去？

因為這正是 (ii) 的模式：該處左邊是 $\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3$，即我們的 A 的立方和；右邊則是我們的 B 的立方和。所以取 $c=8$ 代入 (ii)，便得到兩者的立方和相等。(ii) 末尾的兩條額外恆等式則給出總和相等及平方和相等，所以這個分割同樣是平衡的。

直接計算：兩半的總和都是 68，平方和都是 748，立方和都是 9248。

第 (iv) 部分

把 S 的元素寫成 $(n+k)^2$，其中 $k=0,1,\ldots,11$。對任何由 k 值組成的集合 K，

$$\sum_{k\in K}(n+k)^2 = |K|\,n^2 + 2n\sum_{k\in K} k + \sum_{k\in K} k^2.$$

所以，若把 $\{0,1,\ldots,11\}$ 分成兩個大小相同、總和相同、平方和亦相同的集合，則對應的平方數對每個 n 都會有相等的總和。

題目給出的 $\{1,\ldots,11\}$ 的分割，總和相等（各為 33），平方和亦相等（各為 253），但兩部分的大小分別是 6 和 5。把 $k=0$ 加進較小的部分便可解決這個問題：它使大小增加一，而對總和及平方和都沒有影響。所以我們採用

$$\{1,3,4,5,9,11\} \quad 及 \quad \{0,2,6,7,8,10\},$$

兩者大小都是 6，總和都是 33，平方和都是 253。因此

$$\begin{aligned} C &= \{(n+1)^2,(n+3)^2,(n+4)^2,(n+5)^2,(n+9)^2,(n+11)^2\},\\ D &= \{n^2,(n+2)^2,(n+6)^2,(n+7)^2,(n+8)^2,(n+10)^2\} \end{aligned}$$

的元素總和都是 $6n^2+66n+253$。由於 $n>0$，這十二個平方數互不相同，所以 C 與 D 不相交，而且兩者的並集是 S。

驗算

- 在 (iv) 中取 $n=1$，得 $C=\{4,16,25,36,100,144\}$ 及 $D=\{1,9,49,64,81,121\}$，兩者總和都是 $325=6+66+253$。
- 在 (iii) 中，總和 68 及平方和 748 分別是 1 至 16 的總和 136 及平方和 1496 的一半；立方和 9248 則是 $136^2=18496$ 的一半。
- 用電腦搜尋從 $1,\ldots,8$ 中選出四個數的所有方法，確認了 (i) 中的分割在對調之下是唯一的；(iv) 的構造亦已對 n 直至 499 驗證過。

常見錯誤

- 在 (iv) 中直接使用題目給出的 A 和 B：兩者大小 6 與 5 不同，所以 n^2 項不會抵消。缺少的元素 n^2（即 $k=0$）必須歸入 B。
- 在 (iii) 中平移了錯誤的一半：把 $\{9,12,14,15\}$（即平移後的 a_k）與 $\{1,4,6,7\}$ 放在一起，總和與平方和仍然平衡，但立方和會相差 $2\left(\sum b_k^3-\sum a_k^3\right)=2(672-624)=96$。

STEP 之外

這就是 Prouhet–Tarry–Escott 問題：把一個整數集合分成兩部分，使兩者的 j 次方和對 $j=1,\ldots,k$ 都相等。以 $c=16,32,\ldots$ 重複 (iii) 中「平移再對調」的做法，便得到 $\{0,1,\ldots,2^{k+1}-1\}$ 的 Thue–Morse 分割，它使直至 k 次的所有方和都平衡；其證明就

是用歸納法（induction）重複 (ii) 的二項式展開。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是學習這類初等數論（elementary number theory）的好讀物。

詳細解答

STEP II 2025，第 9 題

力學 • 碰撞與拋體

STEP II 2025，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

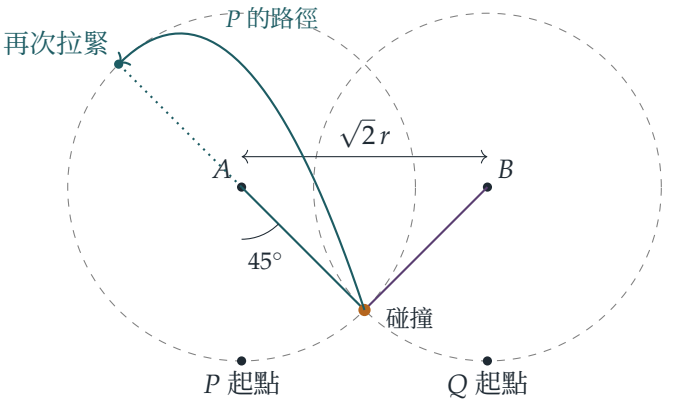
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

對稱性（symmetry）完成了大部分工作。兩質點必定在 AB 的垂直平分線（perpendicular bisector）上相遇，這就確定了它們碰撞時的位置和速率。碰撞剛結束時，每條繩子都會鬆弛，所以每個質點都只是普通的拋射體（projectile），直至它與懸點的距離回升至 r 為止。把這個距離條件寫出來，就得到一條關於 t 的四次方程（quartic）。三重根（triple root）有其物理意義：質點到達圓周時正沿着圓周運動，因此繩子拉緊時不會產生急扯。

解答

模型：P 和 Q 是質量為 m 的質點（在碰撞中視作細小光滑的球體），繩子輕而不可伸長，且沒有空氣阻力。設 P 在左方，懸於 A，並以 A 為原點取坐標軸，x 軸水平（指向 B），y 軸豎直向上。



上圖顯示在第 (iv) 部分的特殊情況下，P 在碰撞後的飛行軌跡：它在遠側、水平線以上 45° 的位置重新回到自己的圓周上。

第 (i) 部分

整個裝置關於 AB 的垂直平分線對稱，所以兩質點在這條線上相遇。此時每個質點都已從最低點水平移動了 $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,r = r\sin 45°$，所以每條繩子與向下的豎直方向成 45°。每個質點上升了 $r - r\cos 45° = r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$。到這一刻為止繩子都是拉緊的，而其張力 (tension) 不做功，所以由能量守恆（conservation of energy），碰撞前一刻的速率 v 滿足

$$v^2 = u^2 - 2gr\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = u^2 - gr(2 - \sqrt{2}).$$

（兩質點要到達這裏，需要 $u^2 > gr(2-\sqrt{2})$。）

每個質點都沿着自己的圓周運動，與水平成 45°，所以

$$\text{速度：質點}P = \left(\tfrac{v}{\sqrt{2}}, \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right), \qquad \text{速度：質點}Q = \left(-\tfrac{v}{\sqrt{2}}, \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right).$$

兩質點在同一高度相遇，所以連心線（line of centres）是水平的，兩者之間的衝量（impulse）也是水平的。因此豎直分量保持不變。在水平方向上，兩者的動量大小相等、方向相反，所以碰撞前後的總動量都是零。於是由牛頓恢復定律（Newton's law of restitution），每個質點都以接近速率的 e 倍反彈。碰撞剛結束時，

$$\text{水平速率} = \frac{ev}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}ev\sqrt{2}, \qquad \text{豎直分量} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,v\text{（向上）}，$$

而 P 此時正向左運動，遠離 Q。

想一想 在碰撞期間，繩子會否也施加衝量？

不會。繩子只能拉，而且只能沿自身方向拉。碰撞剛結束時，P 相對於 A 位於 $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$，速度為 $\left(-\frac{ev}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$。它沿 $\overrightarrow{AP}$ 的分量是 $-\frac{1}{2}(1+e)v < 0$，所以 P 正向 A 運動。繩子立即鬆弛，因此從來不需要衝擊張力。

第 (ii) 部分

從碰撞時起計算 t。在繩子再次拉緊之前，P 是一個拋射體，所以相對於 A，

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{ev}{\sqrt{2}}\,t, \qquad y = -\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

繩子拉緊的條件恰好是 $x^2 + y^2 = r^2$。乘以 2，使 $\sqrt{2}\,x$ 和 $\sqrt{2}\,y$ 出現，得

$$(r - evt)^2 + \left(-r + vt - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,gt^2\right)^2 = 2r^2.$$

這條式在 $t = 0$ 時成立，因為在碰撞那一刻繩子仍然拉緊，所以我們要找的時間是一個非零根。由對稱性，Q 在同一時刻發生同樣的情況。兩質點在水平方向上互相遠離，所以它們不可能先再次相撞。

第 (iii) 部分

展開並消去 $2r^2$：

$$\tfrac{1}{2}g^2t^4 - \sqrt{2}\,gv\,t^3 + \big((1+e^2)v^2 + \sqrt{2}\,rg\big)t^2 - 2(1+e)rv\,t = 0.$$

除以 $t \neq 0$ 後剩下一條三次方程（cubic）。現在

$$\frac{z}{c} = \frac{vt}{r}\cdot\frac{rg}{\sqrt{2}\,v^2} = \frac{gt}{\sqrt{2}\,v}, \qquad \text{所以} \qquad t = \frac{\sqrt{2}\,v}{g}\cdot\frac{z}{c}.$$

代入此式，並把整條三次方程除以 $\sqrt{2}\,v^3/g$。記 $w = z/c$，各項變為

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}g^2t^3 &\longrightarrow w^3,\\
-\sqrt{2}\,gv\,t^2 &\longrightarrow -2w^2,\\
\big((1+e^2)v^2 + \sqrt{2}\,rg\big)t &\longrightarrow \Big(1+e^2+\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}\Big)w = \Big(\frac{2}{c}+1+e^2\Big)w,\\
-2(1+e)rv &\longrightarrow -\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}(1+e) = -\frac{2}{c}(1+e),
\end{aligned}$$

其中用到 $\dfrac{2}{c} = \dfrac{2rg}{\sqrt{2}\,v^2} = \dfrac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}$。這就是所求的方程

$$\Big(\frac{z}{c}\Big)^3 - 2\Big(\frac{z}{c}\Big)^2 + \Big(\frac{2}{c}+1+e^2\Big)\Big(\frac{z}{c}\Big) - \frac{2}{c}(1+e) = 0.$$

第 (iv) 部分

若關於 w 的三次方程有三重根 α，它必定是 $(w-\alpha)^3 = w^3 - 3\alpha w^2 + 3\alpha^2 w - \alpha^3$。比較係數，

$$3\alpha = 2, \qquad 3\alpha^2 = \frac{2}{c}+1+e^2, \qquad \alpha^3 = \frac{2}{c}(1+e).$$

所以 $\alpha = \frac{2}{3}$。記 $k = 2/c$。於是 $k = \frac{4}{3} - 1 - e^2 = \frac{1}{3} - e^2$，而最後一條方程變為

$$\Big(\tfrac{1}{3}-e^2\Big)(1+e) = \tfrac{8}{27} \iff 27e^3 + 27e^2 - 9e - 1 = 0 \iff (3e-1)(9e^2+12e+1) = 0.$$

二次因式的根是 $\frac{-2\pm\sqrt{3}}{3}$，兩者都是負數，所以不可能是恢復係數（coefficient of restitution）。因此 $e = \frac{1}{3}$。於是 $k = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$，所以 $c = 9$，並且

$$v^2 = \frac{c\,rg}{\sqrt{2}} = \frac{9rg}{\sqrt{2}} = \tfrac{9}{2}\sqrt{2}\,rg,$$

正如所求。

? **想一想** 重根說明了運動的甚麼特點？

設 $D(t) = x^2 + y^2 - r^2$。除一個正因子外，D 等於 $w(w-\alpha)^3$。當 $0 < w < \alpha$ 時它是負數，所以在繩子拉緊之前，P 一直嚴格位於自己的圓內。由於 α 是重根（repeated root），在該處亦有 $D' = 0$。但 $D' = 2(x\dot{x} + y\dot{y})$，所以在那一刻，沿繩子方向的速度分量是零：質點到達時正沿着圓周運動。衝擊張力會沿繩子方向作用，只有在需要消除沿繩子方向的速度分量時才會出現。這裏沒有這樣的分量，所以沒有衝量，速度不變，也沒有動能損失。

第 (v) 部分

能量只在碰撞中損失。從碰撞到圓周最低點之間，只有重力做功：飛行期間沒有張力，拉緊時沒有急扯，之後張力又與運動方向垂直。碰撞剛結束時，速率的平方是

$$\frac{e^2v^2}{2} + \frac{v^2}{2} = \frac{(1+e^2)v^2}{2},$$

而質點位於其最低點之上 $r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 處。因此

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{(1+e^2)v^2}{2} + gr\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9rg}{\sqrt{2}} + gr\left(2-\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2}rg + (2-\sqrt{2})rg = \left(2+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}rg. \end{aligned}$$

我們還應檢查繩子在下擺途中一直保持拉緊。當 $w = \frac{2}{3}$ 時，$t = \frac{2\sqrt{2}v}{3g}$。代入後得位置 $\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ 及速度 $\left(-\frac{v}{3\sqrt{2}}, -\frac{v}{3\sqrt{2}}\right)$。所以 P 在遠離 B 的一側、水平線以上 $45°$ 處重新回到自己的圓周上，速率的平方為 $\frac{v^2}{9} = \frac{rg}{\sqrt{2}}$。在該處沿指向 A 的方向分解，

$$T + mg\sin 45° = \frac{m}{r}\cdot\frac{rg}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad T = 0,$$

所以繩子拉緊時張力為零。當 P 向下擺動時，其速率增加，而重力向內的分量減少，所以此後 $T > 0$。質點沿圓周一直擺到最低點；若從這一點起用能量計算，也得到相同的 U^2 值：$\frac{rg}{\sqrt{2}} + 2gr\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg$。

驗算

- 取 $r = 1$ 及 $g = 9.81$，以電腦逐步模擬飛行和圓周擺動，得 $U^2 \approx 40.430$。這與 $\frac{1}{2}(4+3\sqrt{2})g \approx 40.430$ 吻合，而且在整個擺動過程中張力一直非負。
- 求 U^2 的兩條途徑（從碰撞點出發，以及從繩子拉緊的位置出發）結果一致。
- 若 $e = 1/3$ 且 $c = 9$，則 $w^3 - 2w^2 + \frac{4}{3}w - \frac{8}{27} = \left(w - \frac{2}{3}\right)^3$ 準確成立。

常見錯誤

- 把上升的高度當作 $r\cos 45°$（即懸點以下的深度），而不是 $r - r\cos 45°$。
- 把恢復定律應用於整個速度。只有沿連心線的分量（這裏是水平分量）會受影響。
- 忘記排除關於 e 的三次方程的負根。

STEP 之外

重根條件表示兩條曲線（拋射體的拋物線和圓）以高階相切：它們相交、有共同的切線，而在這裏甚至有相同的曲率（curvature），這正是繩子拉緊時張力恰好為零的原因。接觸階（order of contact）和密切圓（osculating circle）會在大學一年級的曲線及微分幾何（differential geometry）課程中出現。衝擊約束（impulsive constraint）以及它們何時會耗散能量，是動力學中的標準課題。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是看這些概念如何發展的好去處。

詳細解答

STEP II 2025，第 10 題

力學 • 剛桿的靜力學

STEP II 2025，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

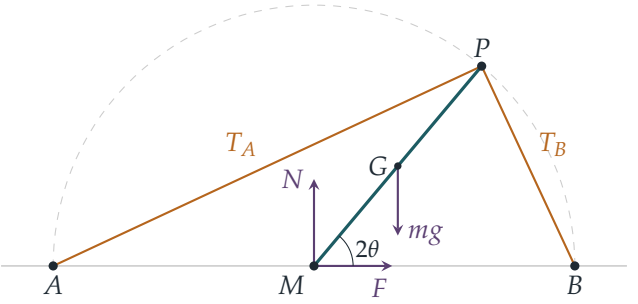
關鍵思路

由於 $MA = MB = MP = a$，點 P 位於以 AB 為直徑的圓上，而整道題正是由這一個觀察推動的：它給出 P 處的直角、以 θ 表示的繩長，以及每條繩與桿所成的角。根據胡克定律（Hooke's law），張力（tension）為 $\lambda(\text{長度} - \ell)/\ell$，它自然地分拆成「$\lambda \times$ 長度$/\ell$」部分和常數「$-\lambda$」部分；這個分拆正是第 (i) 部分所要求的分解。之後，只要對適當選取的點取力矩（moment），就能消去我們不需要的力。

解答

把桿模型化為均勻（uniform）剛性桿，其重量 mg 作用於中點 G；把繩模型化為遵從胡克定律的輕彈性繩（light elastic string）。把 M 置於原點，$B = (a, 0)$，$A = (-a, 0)$，於是

$$P = (a\cos 2\theta,\ a\sin 2\theta).$$



（圖中摩擦力 F 的方向會在第 (iii) 部分加以說明。）

第 (i) 部分

由於 $MA = MB = MP = a$，點 P 位於以 M 為圓心、AB 為直徑的圓上。根據半圓上的圓周角定理（angle in a semicircle），$\angle APB = 90°$。

繩長。三角形 MPA 是等腰三角形（isosceles），$MP = MA$，頂角 $\angle PMA = 180° - 2\theta$，因此兩個底角為 $\angle MPA = \angle MAP = \theta$。同理，三角形 MPB 的頂角為 2θ，所以 $\angle MPB = 90° - \theta$。在直角三角形 APB 中，斜邊(hypotenuse) $AB = 2a$，且 $\angle PAB = \theta$，故

$$PA = 2a\cos\theta, \qquad PB = 2a\sin\theta.$$

由於 $\theta < 45°$，有 $PB < PA$；兩條繩都處於張緊狀態，所以 $2a\sin\theta > \ell$。

分拆力。設 $\mathbf{u}_A$ 和 $\mathbf{u}_B$ 為由 P 分別指向 A 和 B 的單位向量（unit vector）。根據胡克定律，繩 PA 的張力為 $\lambda(PA - \ell)/\ell$，因此它在 P 點施於桿上的力為

$$\frac{\lambda(PA-\ell)}{\ell}\,\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,PA\,\mathbf{u}_A - \lambda\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,\overrightarrow{PA} - \lambda\mathbf{u}_A,$$

PB 的情況亦然。把兩者相加，

$$\text{繩的合力} = \frac{\lambda}{\ell}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) - \lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B).$$

由於 M 是 AB 的中點，$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$，而 $|\overrightarrow{PM}| = a$。所以第一項是沿桿方向（指向 M）、大小為 $2a\lambda/\ell$ 的力。

至於第二項，$\mathbf{u}_A$ 和 $\mathbf{u}_B$ 是互相垂直的單位向量（P 處的角是直角），所以 $\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B$ 是單位正方形的對角線：其長度為 $\sqrt{2}$，方向沿 $\angle APB$ 的角平分線（bisector）。因此 $-\lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B)$ 是沿 $\angle APB$ 的角平分線（指離 AB）、大小為 $\sqrt{2}\,\lambda$ 的力。這就是所求的分解。

第 (ii) 部分

對 M 取力矩；該處的摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction）沒有力矩。以逆時針方向為正（B 位於右方）。

想一想 M 與每條繩所在直線的距離是多少？

直線 PA 與 PM 所成的角為 $\angle MPA = \theta$，而 $PM = a$，所以 M 到直線 PA 的垂直距離為 $a\sin\theta$。同理，M 到直線 PB 的距離為 $a\sin(90° - \theta) = a\cos\theta$。重量作用於 M 右方水平距離 $\frac{1}{2}a\cos 2\theta$ 處。

繩 PA 把 P 拉向 A（繞 M 逆時針）；PB 和重量則使桿順時針轉動。以 T_A、T_B 表示兩條繩的張力，

$$T_A\,a\sin\theta \;=\; T_B\,a\cos\theta + mg\cdot\tfrac{1}{2}a\cos 2\theta.$$

代入 $T_A = \lambda(2a\cos\theta - \ell)/\ell$ 和 $T_B = \lambda(2a\sin\theta - \ell)/\ell$，

$$\begin{aligned} T_A\sin\theta - T_B\cos\theta &= \frac{\lambda}{\ell}\big(2a\cos\theta\sin\theta - \ell\sin\theta - 2a\sin\theta\cos\theta + \ell\cos\theta\big) \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta). \end{aligned}$$

（這其實就是那個大小為 $\sqrt{2}\lambda$、沿角平分線的力的力矩，因為沿桿方向的力對 M 沒有力矩。）於是力矩方程變為

$$\lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta).$$

由於 $0 < \theta < 45°$，有 $\cos\theta - \sin\theta > 0$，所以可以兩邊除以它：

$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{2\lambda}{mg}.$$

λ 的範圍。寫成 $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$。桿與地面傾斜，所以 $0 < \theta < 45°$，即 $45° < \theta + 45° < 90°$，在此範圍內 sin 由 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 嚴格遞增至 1。因此

$$1 < \cos\theta + \sin\theta < \sqrt{2} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}mg < \lambda < \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,mg,$$

這就是這種平衡（equilibrium）存在的必要條件（necessary condition）。

第 (iii) 部分

> **想一想** 對哪一點取力矩，能使兩條繩的力都從力矩方程中消失？

兩條繩都作用於 P，所以對 P 取力矩：這樣方程中只出現重量和 M 處的兩個地面作用力。相對於 P，點 M 位於水平距離 $a\cos 2\theta$（向左）及垂直距離 $a\sin 2\theta$（向下）處；G 的相應距離則為其一半。

假設摩擦力 F 指向 B（下文會加以證實）。對 P 取力矩：

- N（在 M 處向上，位於 P 左方）的順時針力矩為 $N\,a\cos 2\theta$；
- F（在 M 處指向 B，位於 P 下方）的逆時針力矩為 $F\,a\sin 2\theta$；
- mg（在 G 處向下，位於 P 左方）的逆時針力矩為 $mg\cdot\frac{1}{2}a\cos 2\theta$。

平衡時，

$$Na\cos 2\theta = Fa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}mg\,a\cos 2\theta.$$

由於 $2\theta < 90°$，有 $\cos 2\theta > 0$，兩邊除以 $a\cos 2\theta$ 得

$$N - F\tan 2\theta = \tfrac{1}{2}mg,$$

此即所求。

摩擦力的方向。沿水平方向分解，F 與繩力的水平分量平衡。由第 (i) 部分，$\mathbf{u}_A = (-\cos\theta, -\sin\theta)$，$\mathbf{u}_B = (\sin\theta, -\cos\theta)$，而 $\overrightarrow{PM} = (-a\cos 2\theta, -a\sin 2\theta)$，所以繩力的水平分量為 $-\frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta + \lambda(\cos\theta - \sin\theta)$。因此指向 B 的摩擦力為

$$F = \frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta - \lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta)\left(\frac{2a(\cos\theta + \sin\theta)}{\ell} - 1\right),$$

由於 $2a\sin\theta > \ell$（兩條繩都張緊），它是正數。所以摩擦力確實指向 B，而 F 就是其大小。

驗算

- 第 (ii) 部分的極限情況合理：當 $\theta \to 0$，桿幾乎平躺，$\lambda \to \frac{1}{2}mg$；當 $\theta \to 45°$，桿變為鉛直，$\lambda \to mg/\sqrt{2}$。
- 數值驗算：取 $a = 1$、$mg = 10$、$\theta = 20°$、$\ell = 0.5$，則 $\lambda = 5(\cos 20° + \sin 20°) \approx 6.408$，張力為 $T_A \approx 17.68$ 及 $T_B \approx 2.36$，分解後得 $N \approx 18.26$、$F \approx 15.81$，所以 $N - F\tan 40° \approx 5.00 = \frac{1}{2}mg$。對 M 的力矩亦平衡。以電腦對數千個隨機構形進行驗算，所有結果在捨入誤差範圍內均成立。

常見錯誤

- 把張力寫成 $\lambda \times$ 伸長量，而不是 $\lambda \times$ 伸長量$/\ell$。
- 除以 $\cos\theta - \sin\theta$ 或 $\cos 2\theta$ 時，沒有指出 $\theta < 45°$ 使它們為正。
- 在第 (iii) 部分對 M 取力矩：這樣會消去 N 和 F，而它們恰恰是我們想求的力。對 P 取力矩則會消去繩的力。

STEP 之外

第 (i) 部分的分拆是一個一般事實的巧妙例子：作用於剛體（rigid body）上的一組力，等價於單一個力加上一個力偶（couple），而你可以隨意把各力分組，使力矩的計算最為簡便。這裏「每條繩 $-\lambda$」的部分，表現得就像一對張力恆定的繩，其合力完全由幾何決定。剛體靜力學（statics）、虛功（virtual work）及平衡的穩定性，在 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）中有深入的討論。

詳細解答

STEP II 2025，第 11 題

概率與統計 • 期望值與二項式求和

STEP II 2025，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

兩個遊戲都在第一次擲出 $2k$ 時結束，所以兩者都可以寫成對擲骰次數 r 的求和。Ali 的和近似幾何級數（geometric series），而第 (i) 部分正是計算擲骰次數期望值（expected value）所需的工具。至於 Zen，一局勝出的遊戲由 $2k$ 之前出現了哪些數字決定，因為一旦知道這個集合，遞增的次序就隨之確定。數算這些集合會引入二項式係數（binomial coefficients），所以這個和就是第 (iii) 部分的那個和。

解答

第 (i) 部分

當 $|x| < 1$ 時，幾何級數給出

$$\sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{1}{1-x}.$$

冪級數（power series）在其收斂區間（interval of convergence）內可以逐項微分（differentiate term by term），因此兩邊對 x 求導，得

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1,$$

即為所求。

第 (ii) 部分

每一次擲骰的結果可分為三類：

$$\mathrm{P}(\text{擲出}2k) = \frac{1}{2k}, \qquad \mathrm{P}(\text{偶數，但不是}2k) = \frac{k-1}{2k}, \qquad \mathrm{P}(\text{奇數}) = \frac{1}{2}.$$

設 R 為擲骰次數。Ali 以 $R = r$ 勝出，當且僅當第 $1, \ldots, r-1$ 次擲出的都是 $2k$ 以外的偶數，而第 r 次擲出 $2k$。各次擲骰互相獨立（independent），所以設 $x = \dfrac{k-1}{2k}$，便有

$$\mathrm{P}(\text{Ali 勝出且} R = r) = \frac{1}{2k}\, x^{r-1}.$$

(a) 對幾何級數求和（注意 $0 \le x < 1$）：

$$\mathrm{P}(\text{Ali 勝出}) = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{2k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

這個結果有一個快捷的看法。$2k$ 以外的偶數不影響結果，可以不理會。遊戲的勝負取決於奇數和 $2k$ 哪一個先出現。共有 k 個奇數面和一個 $2k$ 面，出現機會均等，所以 $2k$ 先出現的概率是 $\frac{1}{k+1}$。

(b) 若 Ali 以 $R = r$ 勝出，他賺得 £r，否則一無所得，所以由第 (i) 部分，

$$\mathrm{E}(\text{Ali 的收入}) = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot \frac{1}{2k}\, x^{r-1} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{2k}\left(\frac{2k}{k+1}\right)^2 = \frac{2k}{(k+1)^2} \text{ 英鎊.}$$

第 (iii) 部分

把該表達式記為 S。它的通項是 $(r+1)\binom{n}{r}x^r$，其中 $r = 0, 1, \ldots, n$。因子 $r+1$ 提示我們對 x^{r+1} 求導：

$$S = \sum_{r=0}^{n} (r+1)\binom{n}{r} x^r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{r+1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(x(1+x)^n\Big),$$

這裏用了二項式定理（binomial theorem）。由乘積法則（product rule），

$$S = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = (1+x)^{n-1}\big(1 + (n+1)x\big).$$

第 (iv) 部分

假設 Zen 恰好擲了 r 次而勝出。最後一次擲出 $2k$，而首 $r-1$ 次擲出的是取自 $\{1, 2, \ldots, 2k-1\}$ 的嚴格遞增（strictly increasing）的數。（無論如何它們都必須小於 $2k$，因為遊戲在第一次擲出 $2k$ 時便停止。）

> **想一想** 長度為 r 的勝出序列有多少個？

一個嚴格遞增序列，只要知道其中出現了哪些數，便完全確定，因為把一組互不相同的數按遞增次序排列只有一種方法。所以長度為 r 的勝出序列與 $\{1, \ldots, 2k-1\}$ 的 $(r-1)$ 元子集（subset）一一對應。這樣的子集共有 $\binom{2k-1}{r-1}$ 個，且 $1 \le r \le 2k$。

每一個特定的 r 次擲骰序列的概率都是 $\left(\frac{1}{2k}\right)^r$。因此

$$\mathrm{E}(\text{Zen 的收入}) = \sum_{r=1}^{2k} r\binom{2k-1}{r-1}\left(\frac{1}{2k}\right)^r = \frac{1}{2k}\sum_{j=0}^{2k-1}(j+1)\binom{2k-1}{j}\left(\frac{1}{2k}\right)^j,$$

其中 $j = r-1$。這正是第 (iii) 部分中 $n = 2k-1$、$x = \frac{1}{2k}$ 時的和，此時 $1+(n+1)x = 1+2k\cdot\frac{1}{2k} = 2$。所以

$$\text{E(Zen 的收入)} = \frac{1}{2k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2}\cdot 2 = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2} \text{ 英鎊.}$$

第 (v) 部分

把 Zen 的預期收入除以 Ali 的預期收入：

$$\rho = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2}\cdot\frac{(k+1)^2}{2k} = \frac{(k+1)^2}{2k^2}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}}{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2}}.$$

現在設 k 很大。那麼

- $\dfrac{(k+1)^2}{k^2} = \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^2 \approx 1$；
- $\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^2 \approx 1$；
- 由題目給出的近似式，取 $n = 2k$，得 $\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^{2k} \approx \mathrm{e}$。

所以

$$\rho \approx \frac{\mathrm{e}}{2} \approx \frac{2.71828}{2} = 1.359\ldots,$$

即當 k 很大時，Zen 的預期收入約為 Ali 的 1.359 倍，也就是多出稍高於 35%，即為所求。

驗算

- 當 $k = 1$ 時，骰子就是一枚兩面為 1,2 的硬幣。Ali 只有在第一次擲出 2 時才勝出，概率為 $\frac{1}{2} = \frac{1}{k+1}$，此時賺得 £1，所以預期收入為 $\frac{1}{2} = \frac{2k}{(k+1)^2}$。Zen 以序列 2（概率 $\frac{1}{2}$，賺得 £1）和 1,2（概率 $\frac{1}{4}$，賺得 £2）勝出，所以她的預期收入是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$。公式與此吻合：$k = 1$ 時指數 $2k-2$ 為 0，所以公式給出 $\frac{1}{1}\cdot 1 = 1$。
- 當 $k = 3$ 時，Ali 的預期收入是 $\frac{3}{8}$，Zen 的是 $\frac{1}{3}\left(\frac{7}{6}\right)^4 = \frac{2401}{3888} \approx 0.618$。兩者都與直接列舉所有勝出序列的結果相符，也與遊戲的電腦模擬結果相符。
- 比率 ρ 在 $k = 10$ 時約為 1.456，在 $k = 100$ 時約為 1.369，在 $k = 10^4$ 時約為 1.3592。它遞減趨向 $\mathrm{e}/2 = 1.35914\ldots$。

常見錯誤

- 在第 (iv) 部分用階乘去數有序序列，而不是數子集。每個集合只有一種遞增排列。
- 忘記 Zen 遊戲中較早的擲骰不能包含 $2k$。這使範圍變成 $\{1,\ldots,2k-1\}$，所以 $n = 2k-1$，而不是 $2k$。
- 在第 (ii) 部分把繼續遊戲的概率寫成 $\frac{k}{2k}$，而不是 $\frac{k-1}{2k}$。擲出 $2k$ 雖然是偶數，但它會結束遊戲。

STEP 之外

第 (iii) 部分是生成函數（generating functions）的一個小例子：把一個數列編碼為一個冪級數的係數，然後對這個級數運用微積分。概率生成函數（probability generating functions）把這個想法更進一步。若 $G(s) = \mathrm{E}(s^X)$，則 $\mathrm{E}(X) = G'(1)$，這正是本題兩次用到的求導技巧。極限 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$ 在概率論中隨處可見，例如以泊松分佈近似二項分佈（Poisson approximation to the binomial）。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）有一章很好地講解生成函數。

詳細解答

STEP II 2025，第 12 題

概率與統計 • 泊松分佈

STEP II 2025，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

對於泊松分佈（Poisson distribution），相鄰兩項概率的比有簡單的形式 $p_r/p_{r-1} = \lambda/r$，因此每一個差（difference）d_r 都可以寫成某個已知概率乘以一個關於 r 的簡單有理因子。d_r 的正負號告訴我們 p_r 在哪裏上升、在哪裏下降；再深入一層，二階差分（second difference）$d_{r+1} - d_r$ 的正負號告訴我們 d_r 在哪裏上升、在哪裏下降，而這個正負號由一個關於 r 的二次式（quadratic）決定。那個看似古怪的數 $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$，其實只不過是該二次式的一個根（再加一）。

解答

全文中 $p_r = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^r/r!$，所以當 $r \geq 1$ 時

$$p_r = \frac{\lambda}{r}\, p_{r-1}, \qquad p_{r-1} = \frac{r}{\lambda}\, p_r,$$

而且每個 p_r 都嚴格為正。

第 (i) 部分

當 $r \geq 1$ 時，

$$d_r = p_r - p_{r-1} = p_{r-1}\left(\frac{\lambda}{r} - 1\right) = \frac{p_{r-1}}{r}\,(\lambda - r).$$

由於 $p_{r-1}/r > 0$，d_r 的正負號與 $\lambda - r$ 的正負號相同；又因為 λ 不是整數，d_r 永不為零。設 $m = \lfloor \lambda \rfloor$，即小於 λ 的最大整數，於是 $\lambda - 1 < m < \lambda$（由於 $\lambda \notin \mathbb{Z}$，兩個不等式（inequality）都是嚴格的）。那麼

- 當 $1 \leq r \leq m$ 時，$r < \lambda$，所以 $d_r > 0$，且 $p_0 < p_1 < \cdots < p_m$；

▶ 當 $r \geq m+1$ 時，$r > \lambda$，所以 $d_r < 0$，且 $p_m > p_{m+1} > p_{m+2} > \cdots$。

（若 $\lambda < 1$，則 $m = 0$，第一組為空。）因此對每個 $r \neq m$ 都有 $p_r < p_m$：m 是唯一的最可能取值，而且 $\lambda - 1 < m < \lambda$。

第 (ii) 部分

現在看看 d_r 本身如何變化。當 $r \geq 1$ 時，設 $e_r = d_{r+1} - d_r = p_{r+1} - 2p_r + p_{r-1}$。把所有項都用 p_r 表示，

$$e_r = p_r\left(\frac{\lambda}{r+1} - 2 + \frac{r}{\lambda}\right) = \frac{p_r}{\lambda(r+1)}\Big(\lambda^2 - 2\lambda(r+1) + r(r+1)\Big).$$

前面的因子為正，所以 e_r 的正負號與下式相同：

$$Q(r) = r^2 + (1-2\lambda)r + \lambda^2 - 2\lambda.$$

這個二次式的判別式（discriminant）是 $(1-2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 - 2\lambda) = 1 + 4\lambda$，所以它的根是

$$\alpha = \lambda - \tfrac{1}{2} - \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}}, \qquad \beta = \lambda - \tfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}},$$

而 $Q(r) < 0$ 恰好當 $\alpha < r < \beta$。因此

$$d_{r+1} < d_r \iff \alpha < r < \beta, \qquad d_{r+1} > d_r \iff r < \alpha \text{ 或 } r > \beta.$$

注意 $\beta + 1 = \lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$ 不是整數，所以 β 也不是整數，而 $k = \lfloor \beta + 1 \rfloor = \lfloor \beta \rfloor + 1$ 正是滿足下式的整數：

$$k < \lambda + \tfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}} < k + 1.$$

? **想一想** 既然 $r < \alpha$ 時 d_r 也是遞增的，我們到底應該在哪裏尋找 d_r 的最小值？

由第 (i) 部分，$r < \lambda$ 時 $d_r > 0$，$r > \lambda$ 時 $d_r < 0$，所以最小值必定在負項之中，即 $r \geq m+1$。此外 $\beta > \lambda$（因為 $\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} > \frac{1}{2}$）而 $\alpha < \lambda$，所以每個 $r \geq m+1$ 都滿足 $r > \alpha$；而由 $k > \beta > \lambda$ 可得 $k \geq m+1$。因此在整數 $r \geq m+1$ 上：

▶ 當 $m+1 \leq r \leq k-1$ 時：$r < \beta$，所以 $e_r < 0$，得 $d_{m+1} > d_{m+2} > \cdots > d_k$；

▶ 當 $r \geq k$ 時：$r > \beta$，所以 $e_r > 0$，得 $d_k < d_{k+1} < d_{k+2} < \cdots$。

（當 $k = m+1$ 時，第一組為空。）所以 d_k 嚴格小於其他每一個負的 d_r，當然也小於所有正項。d_r 的最小值出現在 $r = k$，正如所求。換言之：p_r 在 $r = k-1$ 與 $r = k$ 之間下降得最陡。

第 (iii) 部分

首先，若 $\lambda < 1$，則由第 (i) 部分，每個 d_r 都是負數。但當 $r \to \infty$ 時 $d_r \to 0$（因為 $p_r \to 0$），所以對任何 r，總有後面的某一項比 d_r 大：最大值根本無法取得，更不會在 $r = 1$ 取得。因此我們需要 $\lambda > 1$（由於 λ 不是整數，$\lambda = 1$ 已被排除）。

現設 $\lambda > 1$，於是 $d_1 > 0$。正項為 $d_1, \ldots, d_m$，任何最大值都在它們之中。

- 若最大值在 $r = 1$，則 $d_2 < d_1$，即 $e_1 < 0$。
- 反之，若 $e_1 < 0$，則 $\alpha < 1 < \beta$，所以每個滿足 $1 \leq r < \beta$ 的整數 r 都有 $e_r < 0$。由於 $m < \lambda < \beta$，得 $d_1 > d_2 > \cdots > d_m$，而其後各項都是負數。所以最大值在 $r = 1$。

因此，當 $\lambda > 1$ 時，最大值在 $r = 1$ 恰好當 $e_1 < 0$，即當 $Q(1) < 0$：

$$Q(1) = 1 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 2 < 0 \iff 2 - \sqrt{2} < \lambda < 2 + \sqrt{2}.$$

結合 $\lambda > 1$（以及 $2 - \sqrt{2} < 1$），條件為

$$1 < \lambda < 2 + \sqrt{2}.$$

第 (iv) 部分

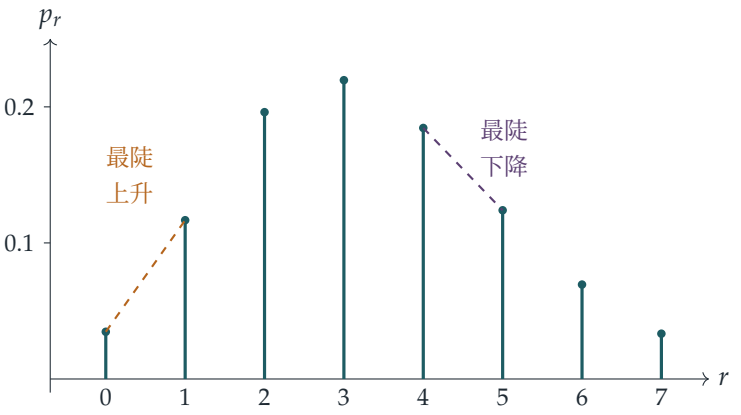
當 $\lambda = 3.36$ 時，$\lambda + \frac{1}{4} = 3.61 = 1.9^2$，所以：

- 由第 (i) 部分，眾數（mode）是 $m = 3$；
- $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} = 3.86 + 1.9 = 5.76$，所以 $k = 5$：最陡的下降是由 p_4 到 p_5；
- $1 < 3.36 < 2 + \sqrt{2} \approx 3.41$，所以最陡的上升是由 p_0 到 p_1（只是剛剛好：$\alpha = 0.96$ 很接近 1，所以 d_1 與 d_2 幾乎相等）。

利用 $p_r = \frac{3.36}{r} p_{r-1}$ 及 $p_0 = \mathrm{e}^{-3.36} \approx 0.035$，得出近似值

$$p_0, \ldots, p_7 \approx 0.035,\ 0.117,\ 0.196,\ 0.220,\ 0.185,\ 0.124,\ 0.069,\ 0.033.$$

草圖應顯示：一開始就急升，然後逐漸平緩，在 $r = 3$ 達到峯值；隨後下降越來越陡，在 $r = 4$ 與 $r = 5$ 之間最陡，之後再漸趨平緩。



驗算

- 對 20,000 個隨機的 $\lambda \in (0, 40)$ 計算 p_r 及 d_r，證實眾數是 $\lfloor \lambda \rfloor$，d_r 的最小值在 $\lfloor \lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \rfloor$，而且（當 $\lambda > 1$ 時）d_r 的最大值在 $r = 1$ 恰好當 $\lambda < 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$。
- 當 $\lambda = 3.36$：$d_1 \approx 0.0820$ 而 $d_2 \approx 0.0794$，所以 d_1（以些微之差）是最大的；$d_4, d_5, d_6 \approx -0.035, -0.061, -0.055$，所以 d_5 是最小的，與預測一致。
- 小的 λ：當 $\lambda \to 0$ 時，$\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \to 1$，所以 $k = 1$。事實上，此時幾乎所有概率都集中在 0，最大的下降就是第一個，即 $p_1 - p_0$。

常見錯誤

- 忘記 d_r 在 $r < \alpha$ 時也是遞增的，因而沒有解釋為何最小值不可能在該區域（那是 $d_r > 0$ 的區域）。
- 在第 (iii) 部分只檢查 $d_2 < d_1$，而漏掉 $\lambda < 1$ 的情況——此時每個 d_r 都是負數，數列根本取不到最大值。
- 寫成 $\lambda - 1 \leq m \leq \lambda$：正正因為 λ 不是整數，這些不等式才是嚴格的。

STEP 之外

差 d_r 與 e_r 是一階及二階導數（derivative）的離散版本，而 k 標示了泊松分佈的一個離散「拐點」（point of inflection）。當 λ 很大時，泊松分佈近似於平均值為 λ、標準差（standard deviation）為 $\sqrt{\lambda}$ 的正態分佈（normal distribution），而後者的拐點位於 $\lambda \pm \sqrt{\lambda}$；可與這裏的 $\alpha, \beta \approx \lambda \pm \sqrt{\lambda}$ 比較。利用比值 p_r / p_{r-1} 的技巧是求離散分佈眾數的標準方法，在 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》），或

Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）中有更深入的探討。

詳細解答

STEP III 2025，第 1 題

純數學 • Beta 函數積分

STEP III 2025，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

這裏用到的每一步，不是代換（substitution），就是恆等式（identity）$x+(1-x)=1$。反射 $x \mapsto 1-x$ 會把 p 和 q 的角色互換；用 $x+(1-x)$ 拆開被積函數（integrand），可以把相鄰的值聯繫起來；$x=\sin^2\theta$ 把積分化成三角積分；而 $x=t/(1+t)$ 則把 $[0,1)$ 拉伸到 $[0,\infty)$。最後那個積分就是把前面的結果串連起來，最終化為一個可以親手計算的 $\sin^4\theta$ 積分。

解答

第 (i) 部分

代入 $u=1-x$，於是 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$，而 $x=0,1$ 分別對應 $u=1,0$：

$$\mathrm{b}(p,q)=\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\,\mathrm{d}u=\mathrm{b}(q,p).$$

第 (ii) 部分

把右方的兩個積分相加，

$$\begin{aligned}\mathrm{b}(p+1,q)+\mathrm{b}(p,q+1)&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\big[x+(1-x)\big]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{b}(p,q),\end{aligned}$$

移項即得 $\mathrm{b}(p+1,q)=\mathrm{b}(p,q)-\mathrm{b}(p,q+1)$。

現在設 $q = p$。由第 (i) 部分，$\mathrm{b}(p, p+1) = \mathrm{b}(p+1, p)$，所以

$$\mathrm{b}(p+1,p) = \mathrm{b}(p,p) - \mathrm{b}(p+1,p) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{b}(p+1,p) = \tfrac{1}{2}\mathrm{b}(p,p).$$

第 (iii) 部分

設 $x = \sin^2\theta$，則 $\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，且 $1 - x = \cos^2\theta$。當 θ 由 0 變到 $\frac{1}{2}\pi$ 時，x 由 0 遞增至 1，而且 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 都是非負的，因此 $x^{p-1} = (\sin\theta)^{2p-2}$ 及 $(1-x)^{q-1} = (\cos\theta)^{2q-2}$，正負號不會出問題。因此

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-2}(\cos\theta)^{2q-2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

至於第二個結果，取 $q = p$，並利用 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$：

$$\mathrm{b}(p,p) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)^{2p-1}\mathrm{d}\theta = 2^{2-2p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin 2\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta = 2^{1-2p}\int_0^{\pi} (\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi,$$

其中 $\phi = 2\theta$。

> **想一想** 怎樣才能回到一個在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上、形如 $\mathrm{b}(p,\cdot)$ 的積分？

$\sin\phi$ 在 $[0,\pi]$ 上的圖像關於 $\phi = \frac{1}{2}\pi$ 對稱（代入 $\phi \mapsto \pi - \phi$ 即可見），所以在 $[0,\pi]$ 上的積分是在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上積分的兩倍。此外，在三角形式中取 $q = \frac{1}{2}$，便有 $(\cos\theta)^{2q-1} = (\cos\theta)^0 = 1$，得

$$\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

因此

$$\mathrm{b}(p,p) = 2^{1-2p}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi = 2^{1-2p}\,\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2^{2p-1}}\,\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}),$$

正是所求。

第 (iv) 部分

我們希望當 t 由 0 變到 ∞ 時，x 由 0 變到 1，同時 $1-x$ 的形式要簡單；$x = \dfrac{t}{1+t}$ 兩者兼備，且

$$1 - x = \frac{1}{1+t}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{(1+t)-t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}.$$

當 t 由 0 遞增至 ∞ 時，x 由 0 遞增並趨向 1。所以

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^{q-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t.$$

第 (v) 部分

把被積函數與第 (iv) 部分對照：$p-1=\frac{3}{2}$ 且 $p+q=6$，所以 $p=\frac{5}{2}$，$q=\frac{7}{2}$。這個積分就是 $\mathrm{b}\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$，我們逐步把它化簡：

$$\begin{aligned}\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{7}{2}\right) &= \mathrm{b}\left(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2}\right) && \text{由 (i)}\\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}\right) && \text{由 (ii)，取}p=\tfrac{5}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}\,\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right) && \text{由 (iii)，取}p=\tfrac{5}{2}.\end{aligned}$$

最後，由三角形式取 $p=\frac{5}{2}$、$q=\frac{1}{2}$，

$$\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

兩次使用 $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$，

$$\sin^4\theta=\tfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)=\tfrac{1}{8}\left(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta\right).$$

餘弦項在 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上的積分為零（它們的原函數（antiderivative）$\sin 2\theta$ 和 $\sin 4\theta$ 在兩個端點都等於零），所以 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi=\frac{3\pi}{16}$，而 $\mathrm{b}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{8}$。因此

$$\int_0^\infty\frac{t^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^6}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\cdot\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{256}.$$

驗算

- 取 $p=q=1$，由定義得 $\mathrm{b}(1,1)=1$，而 (ii) 給出 $\mathrm{b}(2,1)=\frac{1}{2}$，與直接計算 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ 的結果吻合。
- 同樣取 $p=1$，第 (iii) 部分說 $\mathrm{b}(1,1)=\frac{1}{2}\,\mathrm{b}(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2=1$。結果一致。
- 數值上，$3\pi/256\approx 0.036816$，而用電腦直接對 $t^{3/2}/(1+t)^6$ 在 $[0,\infty)$ 上作數值積分，結果在很多位小數上都吻合。再粗略檢查一下大小：被積函數在 $t=\frac{1}{3}$ 處達到峯值，約為 0.034，其「隆起」部分的寬度約為 1 的數量級，所以積分值為百分之幾是合理的。

常見錯誤

- 在 (iv) 中，忘記了 $\mathrm{d}x$ 帶來的因子 $(1+t)^{-2}$，結果得出錯誤的冪 $p+q-2$。
- 在 (iii) 中，只在 θ 的區間 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上積分 $(\sin 2\theta)^{2p-1}$，卻忘記了 $\phi=2\theta$ 會令積分範圍加倍、並令 $\mathrm{d}\theta$ 減半。

► 在 (v) 中，把 p 對應到指數 $\frac{3}{2}$，而不是 $\frac{3}{2}+1$。

STEP 之外

函數 b(p,q) 就是歐拉（Euler）的 beta 函數（beta function），通常記作 $B(p,q)$。它與 gamma 函數（gamma function）的關係是 $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$，而第 (iii) 部分的結果正是 Γ 的勒讓德（Legendre）倍元公式（duplication formula）的一種形式；利用 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，一行便可重新得出 $3\pi/256$。beta 函數在概率論中亦有出現，它是 beta 分佈（beta distribution）的歸一化常數（normalising constant）。想進一步了解這類積分，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）；關於 beta 分佈，則可參閱 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）。

詳細解答

STEP III 2025，第 2 題

純數學 • 迭代函數與周期性

STEP III 2025，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 8.8 節週期三蘊含混沌中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/period-three.html

關鍵思路

本題所有函數都由直線段組成，所以整道題的關鍵在於清楚掌握自己身處哪一段。逐段求出 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 和 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$，利用內層函數的正負號去掉每個絕對值（modulus）。然後倒過來理解有關數列的問題：$\mathrm{f}^n(x) = x$ 的解是一個經過 n 步後回到自身的起始值；而每個小於 7 的數在 f 下恰好有兩個原像（preimage），且兩者互為相反數。

解答

以下記 $\mathrm{f}^2(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 和 $\mathrm{f}^3(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$。由於 f 只取決於 $|x|$，三個函數都是偶函數（even function），所以只需處理 $x \geq 0$ 的情況，再關於 y 軸作反射即可。

第 (i) 部分

(a) $y = \mathrm{f}(x)$ 的圖像是一個倒 V 形，頂點為 $(0, 7)$，斜率（gradient）為 ∓ 2，與 x 軸相交於 $x = \pm\frac{7}{2}$。

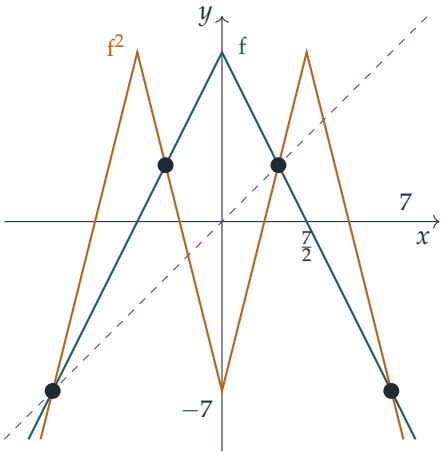
求 f^2 時需要知道 $\mathrm{f}(x)$ 的正負號。若 $0 \leq x \leq \frac{7}{2}$，則 $\mathrm{f}(x) = 7 - 2x \geq 0$，所以

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(7 - 2x) = 4x - 7.$$

若 $x \geq \frac{7}{2}$，則 $\mathrm{f}(x) \leq 0$，所以 $|\mathrm{f}(x)| = 2x - 7$，且

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(2x - 7) = 21 - 4x.$$

因此 $y = \mathrm{f}^2(x)$ 呈 W 形：在 $x = 0$ 處的值為 -7，在 $x = \pm\frac{7}{2}$ 處(正是 f 等於零的位置)有高度為 7 的峯，斜率為 ± 4，x 截距為 $\pm\frac{7}{4}$ 和 $\pm\frac{21}{4}$。解 $7 - 2x = 4x - 7$ 和 $7 - 2x = 21 - 4x$，可知兩條圖像相交於 $(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$ 和 $(\pm 7, -7)$。



(青色：$y = \mathrm{f}(x)$；琥珀色：$y = \mathrm{f}^2(x)$；虛線：$y = x$。)

(b) 我們在四段上分別求解，只保留落在相應範圍內的根。

- $0 \le x \le \frac{7}{2}$：由 $4x - 7 = x$ 得 $x = \frac{7}{3}$，在範圍內。
- $x \ge \frac{7}{2}$：由 $21 - 4x = x$ 得 $x = \frac{21}{5} = 4.2$，在範圍內。
- $-\frac{7}{2} \le x \le 0$：此時 $\mathrm{f}^2(x) = -4x - 7$，由 $-4x - 7 = x$ 得 $x = -\frac{7}{5}$，在範圍內。
- $x \le -\frac{7}{2}$：此時 $\mathrm{f}^2(x) = 21 + 4x$，由 $21 + 4x = x$ 得 $x = -7$，在範圍內。

所以 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ 恰好有四個解：

$$x = -7, \quad -\tfrac{7}{5}, \quad \tfrac{7}{3}, \quad \tfrac{21}{5}.$$

(c) 數列的週期（period）為 2，當且僅當 $u_2 = u_0$，即 $\mathrm{f}^2(a) = a$，但 $u_1 \ne u_0$，即 $\mathrm{f}(a) \ne a$。

想一想 (b) 的四個答案是否都給出週期為 2 的數列？

不是。其中兩個是 f 本身的不動點(fixed point)：$\mathrm{f}(\frac{7}{3}) = 7 - \frac{14}{3} = \frac{7}{3}$ 與 $\mathrm{f}(-7) = 7 - 14 = -7$。它們給出常數數列，週期為 1。另外兩個則互相交換：

$$\mathrm{f}\left(-\tfrac{7}{5}\right) = 7 - \tfrac{14}{5} = \tfrac{21}{5}, \qquad \mathrm{f}\left(\tfrac{21}{5}\right) = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}.$$

所以數列的週期為 2，當且僅當 $a = -\frac{7}{5}$ 或 $a = \frac{21}{5}$。

(d) 取 $a = \frac{28}{5}$，

$$u_1 = 7 - \tfrac{56}{5} = -\tfrac{21}{5}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}, \qquad u_3 = \mathrm{f}\left(-\tfrac{7}{5}\right) = \tfrac{21}{5}.$$

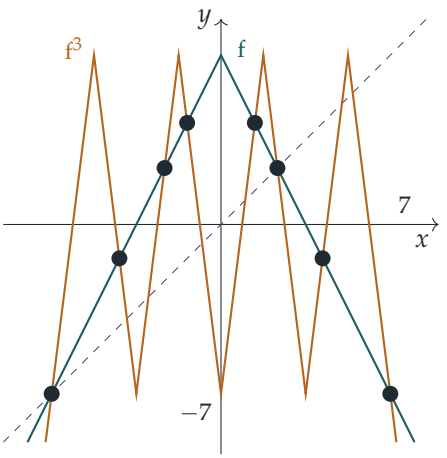
從 u_2 起，該數列就是 (c) 部分中以 $-\frac{7}{5}$ 為起點的數列，所以 $u_2, u_3, u_4, \ldots$ 為 $-\frac{7}{5}, \frac{21}{5}, -\frac{7}{5}, \ldots$，週期為 2。最後，$u_0 = \frac{28}{5}$ 和 $u_1 = -\frac{21}{5}$ 都與 $u_2 = -\frac{7}{5}$ 及 $u_3 = \frac{21}{5}$ 各不相同。（四對都要檢查，不能只查 $u_0 \neq u_2$ 和 $u_1 \neq u_3$。）這正是題目所要求的。

第 (ii) 部分

(a) 現在把 f 作用於 $\mathrm{f}^2(x)$，在 f^2 每段變號的位置，即 $x = \frac{7}{4}$ 和 $x = \frac{21}{4}$ 處，把該段再分開。對於 $x \geq 0$：

$$\mathrm{f}^3(x) = 7 - 2\left|\mathrm{f}^2(x)\right| = \begin{cases} 7 + 2(4x - 7) = 8x - 7, & 0 \leq x \leq \frac{7}{4}, \\ 7 - 2(4x - 7) = 21 - 8x, & \frac{7}{4} \leq x \leq \frac{7}{2}, \\ 7 - 2(21 - 4x) = 8x - 35, & \frac{7}{2} \leq x \leq \frac{21}{4}, \\ 7 + 2(21 - 4x) = 49 - 8x, & x \geq \frac{21}{4}. \end{cases}$$

所以圖像以斜率 ± 8 在 -7 與 7 之間來回曲折：谷底在 $(0, -7)$ 和 $(\pm\frac{7}{2}, -7)$，峯頂在 $(\pm\frac{7}{4}, 7)$ 和 $(\pm\frac{21}{4}, 7)$，然後在 $|x| > \frac{21}{4}$ 時一直下降。把 $7 - 2x$ 與每一段聯立求解，可知它與 $y = \mathrm{f}(x)$ 相交於 $(\pm\frac{7}{5}, \frac{21}{5})$、$(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$、$(\pm\frac{21}{5}, -\frac{7}{5})$ 和 $(\pm 7, -7)$。



（青色：$y = \mathrm{f}(x)$；琥珀色：$y = \mathrm{f}^3(x)$；虛線：$y = x$。）

(b) 從 $a = 1$ 開始：$u_1 = 7 - 2 = 5$，$u_2 = 7 - 10 = -3$，$u_3 = 7 - 6 = 1$。從 $a = -\frac{7}{9}$ 開始：

$$u_1 = 7 - \tfrac{14}{9} = \tfrac{49}{9}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{98}{9} = -\tfrac{35}{9}, \qquad u_3 = 7 - \tfrac{70}{9} = -\tfrac{7}{9}.$$

所以兩個數列都在三步後回到起點：它們分別是 3-循環（cycle）$1 \to 5 \to -3 \to 1$ 和 $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$。

3-循環中的每一項(不只是起始值)都滿足 $\mathrm{f}^3(x) = x$，所以這給出六個解 $1,\ 5,\ -3,\ -\frac{7}{9},\ \frac{49}{9},\ -\frac{35}{9}$。此外，f 的任何不動點都滿足 $\mathrm{f}^3(x) = x$，這就加上第 (i) 部分的 $\frac{7}{3}$ 和 -7。合共八個不同的解。

想一想 我們怎樣知道沒有其他解？

(ii)(a) 中的公式顯示 f^3 由八段直線組成（$x \geq 0$ 時四段，加上它們的鏡像），每段的斜率都是 ± 8。由於沒有任何一段與 $y = x$ 平行，每段與直線 $y = x$ 最多相交一次，所以最多有八個解。我們已找到八個，因此 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x$ 的完整解集是

$$x = -7, \quad -\tfrac{35}{9}, \quad -3, \quad -\tfrac{7}{9}, \quad 1, \quad \tfrac{7}{3}, \quad 5, \quad \tfrac{49}{9}.$$

(草圖亦吻合：虛線與八條琥珀色線段各相交一次。)

(c) 我們仿照 (i)(d) 的思路，從一個 3-循環倒推。由於 $\mathrm{f}(y) = c$ 表示 $|y| = \frac{1}{2}(7 - c)$，每個 $c < 7$ 恰有兩個原像 $\pm\frac{1}{2}(7 - c)$。從循環 $1 \to 5 \to -3 \to 1$ 中取 $u_3 = 1$。1 在循環內的原像是 -3，所以要離開循環，就選另一個原像 $u_2 = 3$，它不在循環中。於是

$$\mathrm{f}(u_1) = 3 \ \Rightarrow\ |u_1| = 2, \quad \text{取} u_1 = 2; \qquad \mathrm{f}(u_0) = 2 \ \Rightarrow\ |u_0| = \tfrac{5}{2}, \quad \text{取} u_0 = \tfrac{5}{2}.$$

所以 $a = \frac{5}{2}$ 可行。順推驗證：

$$\tfrac{5}{2},\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ -3,\ 1,\ 5,\ -3,\ \ldots$$

從 u_3 起，數列沿循環 $1, 5, -3$ 運行，週期為 3；而 $u_0, u_1, u_2 = \frac{5}{2}, 2, 3$ 都與 1、5 和 -3 不同。

(其他選擇亦可：例如 $a = -\frac{5}{2}$ 或 $a = \pm\frac{9}{2}$，它們導致 $u_1 = -2$；或 $a = \frac{3}{2}$，它經由 $u_2 = -1$ 在 $u_3 = 5$ 進入循環。)

驗算

- 每個所聲稱的解都可以用手迭代驗證：例如 $\frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9} \to \frac{49}{9}$，以及 $\frac{28}{5} \to -\frac{21}{5} \to -\frac{7}{5} \to \frac{21}{5} \to -\frac{7}{5}$。
- 用電腦在 $-30 \leq x \leq 30$ 範圍內掃描 $\mathrm{f}^3(x) - x$，只在 -7、-3.889、-3、-0.778、1、2.333、5 和 5.444 附近發現變號，與八個解吻合；對 $\mathrm{f}^2(x) - x$ 作同樣掃描，只發現 -7、-1.4、2.333 和 4.2。
- 計數檢查：f^n 有 2^n 段斜率為 $\pm 2^n$ 的線性段，所以 $\mathrm{f}^n(x) = x$ 有 2^n 個解。當 $n = 2$ 時，這是 $4 = 2 + 2$（兩個不動點和一個 2-循環）；當 $n = 3$ 時，這是 $8 = 2 + 3 + 3$（兩個不動點和兩個 3-循環）。

常見錯誤

- 在 (i)(c) 中給出 (i)(b) 的全部四個解：不動點給出的週期是 1。
- 在 (ii)(b) 中只列出 1 和 $-\frac{7}{9}$，或忘記不動點 $\frac{7}{3}$ 和 -7 亦滿足 $\mathrm{f}^3(x) = x$。
- 草圖中把圖像交點的位置畫錯；用代數方法求出交點即可避免。

STEP 之外

這是離散動力系統（discrete dynamical system）的初步體驗。由於 f 是斜率為 2 的帳篷映射（tent map），f^n 有 2^n 段，所以存在任何週期的週期點，而這個映射是混沌（chaotic）行為的標準例子。沙可夫斯基定理（Sharkovskii's theorem）指出，對於實數線上的連續映射，若存在週期為 3 的點，則必存在任何週期的點，這就是著名的口號「週期三意味着混沌」（period three implies chaos）。Strogatz 的 *Nonlinear Dynamics and Chaos*（《非線性動力學與混沌》）是一本易讀的迭代映射入門書。

詳細解答

STEP III 2025，第 3 題

純數學 • 平均值不等式

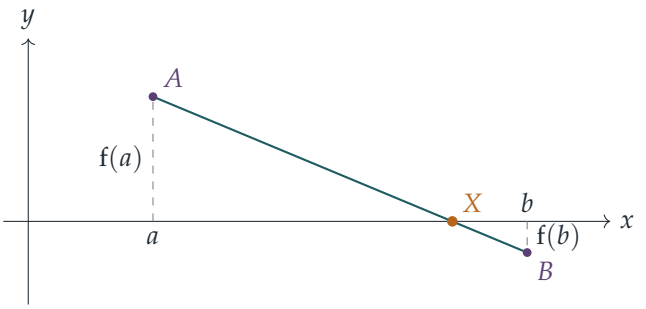
STEP III 2025，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

由於 A 位於軸的上方而 B 位於軸的下方，交點 X 會把 AB 按兩個高度之比 $\mathrm{f}(a) : \mathrm{f}(b)$ 分割。因此 m 是 a 與 b 的*加權平均*（*weighted average*），而接下來的一切，都是關於這些權重如何隨 f 改變。一旦把 m 寫成單一比值 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$ 的函數，比較兩個不同的 f 就變成比較兩個數。



解答

第 (i) 部分

由 A、其垂足 $(a,0)$ 及 X 組成的三角形，與由 B、其垂足 $(b,0)$ 及 X 組成的三角形，是相似三角形（similar triangles）（在 X 處的對頂角相等，在垂足處均為直角）。因此

$$\frac{m-a}{b-m} = \frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)} \quad \Longrightarrow \quad m\,\mathrm{f}(b) - a\,\mathrm{f}(b) = b\,\mathrm{f}(a) - m\,\mathrm{f}(a),$$

所以

$$\boxed{m = \frac{a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(a) + \mathrm{f}(b)}}.$$

（由於 $\mathrm{f} > 0$，分母為正；把 $y = 0$ 代入直線方程 $y - \mathrm{f}(a) = -\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{b-a}(x-a)$，亦可得出相同答案。）

值得設 $r = \mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b) > 0$，把分子和分母同時除以 $\mathrm{f}(b)$，將結果改寫為：

$$m = \frac{a + br}{1 + r} = b - \frac{b - a}{1 + r}. \qquad (*)$$

第 (ii) 部分

當 $\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$ 時，

$$m = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{ab},$$

此即所求。

至於第二個目標，分子 $a^{n+1} + b^{n+1}$ 應該是由 $a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)$ 通分後得來，這提示 $\mathrm{f}(b)$ 應該表現得像 b^{-n}。試取 $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$，它在 $x > 0$ 時為正：

$$m = \frac{ab^{-n} + ba^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{b^n + a^n},$$

這裏把分子和分母同時乘以 $a^n b^n$。所以 $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$ 符合要求（它的任何正常數倍亦然，因為 m 只取決於比值 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$）。留意 $n = -\frac{1}{2}$ 正好還原第一個結果。

第 (iii) 部分

設 $r_1 = \mathrm{g}_1(a)/\mathrm{g}_1(b)$ 及 $r_2 = \mathrm{g}_2(a)/\mathrm{g}_2(b)$，兩者均為正數。由 $(*)$，$M_i = b - \dfrac{b-a}{1+r_i}$。由於 $b - a > 0$，當 $r > 0$ 時，式子 $b - \frac{b-a}{1+r}$ 對 r 嚴格遞增（strictly increasing），所以只需證明 $r_1 > r_2$。

> **想一想** 一個關於函數 $\mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$ 的條件，怎樣轉化為關於 r_1 和 r_2 的條件？

記 $h = \mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$。於是

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathrm{g}_1(a)\,\mathrm{g}_2(b)}{\mathrm{g}_1(b)\,\mathrm{g}_2(a)} = \frac{h(a)}{h(b)} > 1,$$

因為 h 遞減（decreasing）且 $a < b$，故 $h(a) > h(b) > 0$。由於 $r_2 > 0$，可得 $r_1 > r_2$，從而 $M_1 > M_2$。

由此。我們需要三個函數，使其對應的 m 值分別是這三個平均值。

- $f(x) = 1$（常數）給出 $m = \dfrac{a+b}{2}$。
- 由第 (ii) 部分，$f(x) = \sqrt{x}$ 給出 $m = \sqrt{ab}$。
- $f(x) = x$ 給出 $m = \dfrac{ab+ba}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}$。

現在把剛證明的結果應用兩次。取 $g_1 = 1$、$g_2 = \sqrt{x}$，比值 $g_1/g_2 = x^{-1/2}$ 在 $x > 0$ 時遞減，所以 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$。取 $g_1 = \sqrt{x}$、$g_2 = x$，比值同樣是 $x^{-1/2}$，亦為遞減，所以 $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$。合起來，

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

第 (iv) 部分

曲線經過 A 和 B，所以

$$f(a) = p(c-a)^3, \qquad -f(b) = p(c-b)^3, \ \text{即}\ f(b) = p(b-c)^3.$$

由於 $f(b) > 0$，我們有 $p \neq 0$ 及 $b \neq c$，因此可以相除：

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \left(\frac{c-a}{b-c}\right)^3.$$

每個實數都恰好有一個實立方根（cube root），所以取立方根是可逆的，故

$$\frac{c-a}{b-c} = \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^{1/3},$$

此即所求。把右方記作 k（$k > 0$），則 $c - a = k(b-c)$，所以 $c(1+k) = a + kb$，而

$$c = \frac{a+kb}{1+k} = \frac{a\,f(b)^{1/3} + b\,f(a)^{1/3}}{f(a)^{1/3} + f(b)^{1/3}},$$

這裏把分子和分母同時乘以 $f(b)^{1/3}$。

想一想 我們以前在哪裏見過這條公式？

它正是第 (i) 部分的公式，只是把 f 換成 $f^{1/3}$，而後者在 $x > 0$ 時同樣有定義且為正。所以 c 就是函數 $f^{1/3}$ 所對應的 m 值。取 $g_1 = f$ 及 $g_2 = f^{1/3}$，應用第 (iii) 部分：

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = f(x)^{2/3}.$$

若 f 遞減且為正，則 $f^{2/3}$ 亦然，因為 $t \mapsto t^{2/3}$ 在 $t > 0$ 時遞增。因此第 (iii) 部分給出 $M_1 > M_2$，其中 $M_1 = m$（對應 f 本身）及 $M_2 = c$。故 $c < m$。

驗算

- 取 $a = 1$、$b = 4$。三個平均值為 $2.5 > 2 > 1.6$，而 $\mathrm{f} = \sqrt{x}$ 給出 $m = (1 \cdot 2 + 4 \cdot 1)/3 = 2 = \sqrt{4}$。
- 當 $\mathrm{f}(x) = 1/x$、$a = 1$、$b = 4$ 時：$m = \frac{1/4+4}{5/4} = 3.4$，而 $k = 4^{1/3} \approx 1.587$ 給出 $c \approx 2.84 < 3.4$，與第 (iv) 部分的預測一致。m 和 c 都位於 a 與 b 之間，正如加權平均必然如此。
- 在第 (ii) 部分中設 $n = 0$，得 $\mathrm{f} = 1$ 及 $m = \frac{a+b}{2}$；設 $n = -1$，得 $\mathrm{f} = x$ 及 $m = \frac{2ab}{a+b}$，與第 (iii) 部分一致。

以上各項，以及對每個結果在大量不同的 a、b 和 f 下所作的隨機測試，均已用電腦核實。

常見錯誤

- 忘記 B 的高度是 $-\mathrm{f}(b)$，結果得出分母 $\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)$，而所得的點未必位於 a 與 b 之間。
- 在第 (iii) 部分，試圖一次過交叉相乘四個函數值來比較 M_1 和 M_2，而不是化簡為單一比值 r。
- 在第 (iv) 部分，把 $\mathrm{g}_1 = \mathrm{f}^{1/3}$、$\mathrm{g}_2 = \mathrm{f}$ 的次序弄反：它們的比值 $\mathrm{f}^{-2/3}$ 是遞增的，所以按這個次序不能應用第 (iii) 部分。

STEP 之外

這裏每一個 m 都是加權平均 $\lambda a + (1-\lambda)b$，而第 (iii) 部分巧妙地為整個冪平均族 $\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)/\left(a^n + b^n\right)$（即萊默平均（Lehmer means））排出大小次序，它們隨 n 遞增。平均值之間的不等式，以及背後的凸性（convexity）論證，是大學一年級分析課的基本內容。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）和 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）都是見識更多這類論證的好去處。

詳細解答

STEP III 2025，第 4 題

純數學 • 曲線的變換

STEP III 2025，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

設平面上的映射 T 有逆映射（inverse）。那麼曲線 $f\left(T^{-1}(x,y)\right)=0$ 就是曲線 $f(x,y)=0$ 在 T 之下的像，因為一點在新曲線上，當且僅當 T^{-1} 把它送到舊曲線上。第 (i) 部分就旋轉（rotation）的情況證明這一點。第 (ii) 部分對反射（reflection）做同樣的事，此時 $T^{-1}=T$。在第 (iii) 部分，我們留意到代換（substitution）$u=x-2y$ 把方程變成 $y=\sin x$ 的一個水平剪切（horizontal shear），再用參數化（parametrisation）便能求出切線（tangent），完全免去隱函數微分（implicit differentiation）的麻煩。

解答

第 (i) 部分

把矩陣乘積展開，得

$$x_2=\frac{x_1-y_1}{\sqrt{2}},\qquad y_2=\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}.$$

把 $(x,y)=(x_2,y_2)$ 代入 G_2 方程中的兩個括號：

$$\begin{aligned}\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{y_2}{\sqrt{2}}&=\frac{(x_1-y_1)+(x_1+y_1)}{2}=x_1,\\ -\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{y_2}{\sqrt{2}}&=\frac{-(x_1-y_1)+(x_1+y_1)}{2}=y_1.\end{aligned}$$

所以 G_2 的方程左邊在 (x_2,y_2) 的值是 $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}$。由於 (x_1,y_1) 在 G_1 上，這個值等於 1。因此 (x_2,y_2) 在 G_2 上。

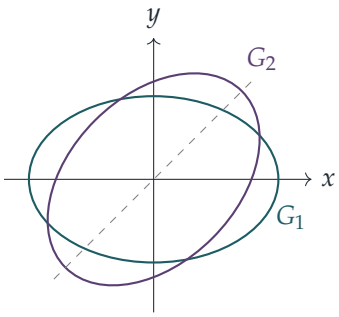
至於旋轉，留意 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$，所以矩陣是

$$R = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix},$$

即繞原點逆時針旋轉 45°。我們剛剛證明了 R 把 G_1 上每一點都映射到 G_2 上。要證明 G_2 恰好就是旋轉後的曲線，我們還需要 G_2 上每一點都來自 G_1。取 G_2 上任意一點 (x, y)，並設

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}},$$

這就是 $R^{-1}(x, y)$（反方向轉回 45°）。G_2 的方程正好說明 $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$，所以 $(x_1, y_1) \in G_1$，而且 $R(x_1, y_1) = (x, y)$。因此 $G_2 = R(G_1)$：橢圓（ellipse）G_2 就是把 G_1 繞原點逆時針旋轉 45° 所得的曲線。



第 (ii)(a) 部分

把該矩陣記作 M。點 (x, y) 是不變點（invariant point），當且僅當 $M\binom{x}{y} = \binom{x}{y}$，即

$$-0.6x + 0.8y = x, \qquad 0.8x + 0.6y = y.$$

第一式給出 $0.8y = 1.6x$，所以 $y = 2x$；第二式給出 $0.8x = 0.4y$，兩者其實一樣。所以不變點所成的直線（即鏡線（mirror line））是

$$y = 2x.$$

第 (ii)(b) 部分

記 $(X, Y) = M(x, y) = (-0.6x + 0.8y,\ 0.8x + 0.6y)$。第二條方程正是

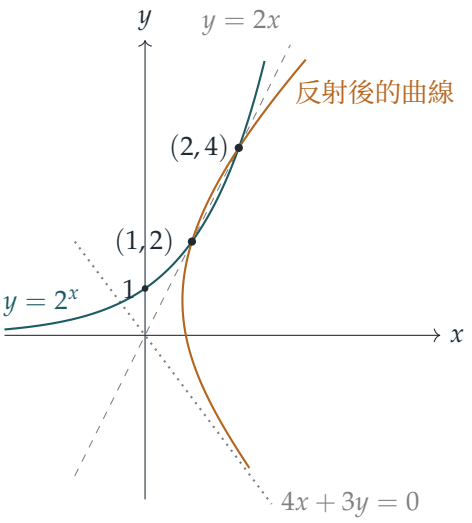
$$Y = 2^X.$$

所以 (x, y) 在第二個圖像上，當且僅當 $M(x, y)$ 在 $y = 2^x$ 上。反射會抵銷自己（$M^2 = I$，可以自行把乘積展開驗證），所以 $(x, y) = M(X, Y)$。這又是第 (i) 部分的論證：第二個圖像就是 $y = 2^x$ 關於直線 $y = 2x$ 的反射。

想一想 反射後曲線的漸近線去了哪裏？曲線又朝哪個方向伸向無窮遠？

把 $y = 2^x$ 的特徵逐一反射。

- 漸近線（*asymptote*）。當 $x \to -\infty$，$y = 2^x$ 趨近 x 軸。方向 $(1,0)$ 反射成 $M(1,0) = (-0.6, 0.8)$，所以 x 軸反射成直線 $4x + 3y = 0$，即 $y = -\frac{4}{3}x$。等價地說，$Y = 0.8x + 0.6y = 2^X > 0$，所以反射後的曲線嚴格位於 $4x + 3y > 0$ 那一側，並在 $X \to -\infty$ 時趨近 $4x + 3y = 0$。在遠處，$y = 2^x$ 上的點大約是 $(X, 0)$，其中 X 是很大的負數，這些點反射後大約是 $(-0.6X, 0.8X)$。所以反射後的曲線在第四象限趨近其漸近線，此時 $x \to +\infty$ 而 $y \to -\infty$。
- 鏡線上的點。反射保持 $y = 2x$ 上每一點不動。而 $2^x = 2x$ 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 成立（也只在這兩處成立，因為 $2^x - 2x$ 是凸函數（convex））。所以兩條曲線都經過 $(1,2)$ 和 $(2,4)$，並在那裏相交。用電腦沿 $y = 2^x$ 搜尋，找不到其他公共點。
- 其他點。$(0,1)$ 反射成 $(0.8, 0.6)$。
- 最左點。反射後的曲線是 $\left(-0.6t + 0.8 \cdot 2^t,\quad 0.8t + 0.6 \cdot 2^t\right)$。它的 x 坐標在 $0.8 \cdot 2^t \ln 2 = 0.6$ 時最小，該點大約是 $(0.80, 0.74)$。那裏的切線是鉛垂的，所以反射後的曲線並不是 x 的函數的圖像。
- 增長。當 $X \to +\infty$，點 $(X, 2^X)$ 反射後大約是 $2^X(0.8, 0.6)$。所以曲線向右上方伸展，方向大致是斜率 $\frac{3}{4}$。



第 (iii) 部分

$0 \le x \le 2\pi$ 範圍內的圖像 $y = \sin x$ 就是大家熟悉的一個完整波形。

對於 $y=\sin(x-2y)$，設 $u=x-2y$。點 (x,y) 在曲線上，當且僅當 $y=\sin u$，而此時 $x=u+2y$。所以該曲線恰好是

$$x=u+2\sin u,\qquad y=\sin u.$$

這就是把 $y=\sin x$ 上每一點向橫方向推移其高度的兩倍：即水平剪切 $(u,v)\mapsto(u+2v,v)$。

*哪些 u 給出 $0\le x\le 2\pi$？*設 $x(u)=u+2\sin u$。那麼 $x(-u)=-x(u)$ 而且 $x(u+2\pi)=x(u)+2\pi$。由於 $x'(u)=1+2\cos u$，函數 $x(u)$ 在 $[0,\frac{2\pi}{3}]$ 上由 0 遞增至 $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\approx 3.83$，然後在 $[\frac{2\pi}{3},\pi]$ 上遞減至 π。所以當 $0<u\le\pi$ 時它落在 $(0,2\pi)$ 內，而在 $[\pi,2\pi]$ 上，對稱性 $x(2\pi-u)=2\pi-x(u)$ 保證它落在 $(0,2\pi]$ 內。對於 $u>2\pi$，由歸納法（induction）得 $x(u)=x(u-2\pi)+2\pi>2\pi$；對於 $u<0$，由奇函數（odd function）的性質得 $x(u)<0$。所以當 u 由 0 走到 2π 時，所需的那段曲線恰好被描出一次，由 $(0,0)$ 走到 $(2\pi,0)$。

*切線。*沿着曲線，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=1+2\cos u,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\cos u,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos u}{1+2\cos u}.$$

這兩個導數不會同時為零，因為 $\cos u=0$ 時 $1+2\cos u=1$。

- 水平切線出現在 $\cos u=0$ 之處，即 $u=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$：

$$\left(\tfrac{\pi}{2}+2,\ 1\right)\quad\text{及}\quad\left(\tfrac{3\pi}{2}-2,\ -1\right).$$

- 鉛垂切線出現在 $\cos u=-\frac{1}{2}$ 之處，即 $u=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$：

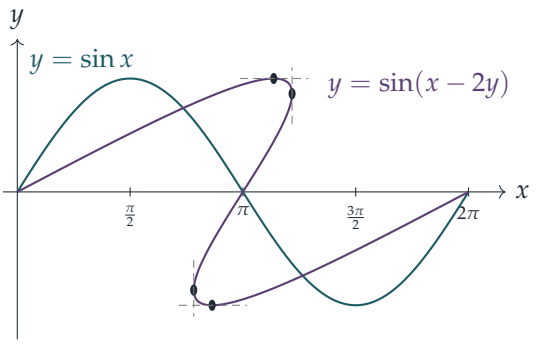
$$\left(\tfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3},\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad\text{及}\quad\left(\tfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3},\ -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

它們的數值大約是 $(3.57,1)$、$(2.71,-1)$、$(3.83,0.87)$ 和 $(2.46,-0.87)$。

> **想一想** 頂部的水平切線位於 $x\approx 3.57$，但曲線之後仍然到達 $x\approx 3.83$。曲線實際上是甚麼樣子的？

讓 u 由 0 走到 2π。曲線以斜率 $\frac{1}{3}$ 離開原點（代入 $u=0$），比 $y=\sin x$ 平緩。它上升至最高點 $(\frac{\pi}{2}+2,1)$，然後向右下方移動，到達位於 $(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的鉛垂切線。接着它向左彎回，以斜率 $\frac{-1}{-1}=1$ 經過 $(\pi,0)$。它到達位於 $(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的第二條鉛垂切線，再向右轉經過最低點 $(\frac{3\pi}{2}-2,-1)$，然後上升至 $(2\pi,0)$。這條曲線像一個正在捲起的浪頭般向前懸垂。在 $x\approx 2.46$ 與 $x\approx 3.83$ 之間，每個 x 對應三個 y 值。整幅圖關於 $(\pi,0)$ 有半周旋轉對稱（half-turn symmetry）。

順帶一提，兩個圖像在 $\sin x=\sin(x-2\sin x)$ 之處相交。要麼 $\sin x=0$，得 $x=0,\pi,2\pi$；要麼 $x-\sin x=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$，得 $x\approx 2.31$ 和 $x\approx 3.97$。



驗算

- 第 (i) 部分：取 G_1 的頂點 $(3,0)$。它被映射到 $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$，而 G_2 方程中的兩個括號分別給出 3 和 0，所以左邊等於 1。
- 第 (ii) 部分：$M\binom{1}{2} = \binom{-0.6+1.6}{0.8+1.2} = \binom{1}{2}$，正如不變點應有的結果。點 $(1,2)$ 也滿足第二條方程：$0.8+1.2 = 2 = 2^{-0.6+1.6}$。
- 第 (iii) 部分：在 $\left(\frac{\pi}{2}+2, 1\right)$，得 $x-2y = \frac{\pi}{2}$，而 $\sin\frac{\pi}{2} = 1 = y$。同樣，$\left(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 給出 $x-2y = \frac{2\pi}{3}$，而 $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$。隱函數微分給出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos(x-2y)}{1+2\cos(x-2y)}$。它的分子在第一點為 0，分母在第二點為 0。

常見錯誤

- 只證明了 G_1 被映射到 G_2 之內。要說 G_2 就是旋轉後的曲線，還需要證明 G_2 上每一點都來自 G_1，這就要用到逆映射。
- 把 $y = \sin(x-2y)$ 當作 x 的函數，結果把曲線畫成一個沒有懸垂部分的普通波形。鉛垂切線正是曲線向回摺的地方。
- 忘記反射後的指數曲線有一條斜漸近線（oblique asymptote）$4x+3y=0$，而且整條曲線完全位於它的一側。

STEP 之外

這道題背後的原理是：把可逆映射（invertible map）T 作用於曲線 $f(x,y)=0$，得到的是曲線 $f\left(T^{-1}(x,y)\right)=0$。在大學一年級的線性代數（linear algebra）課程中，這會發展成研究二次型（quadratic form）在基變換（change of basis）之下如何改變。旋轉坐標軸以消去圓錐曲線（conic）中的 xy 項，正是對稱矩陣（symmetric matrix）對角化（diagonalisation）在二維的情況。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導

論》）以非常易讀的方式講解旋轉、反射及其特徵向量（eigenvector）（第 (ii)(a) 部分中的不變直線就是一個特徵值（eigenvalue）為 1 的特徵向量）。

詳細解答

STEP III 2025，第 5 題

純數學 • 三維向量

STEP III 2025，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

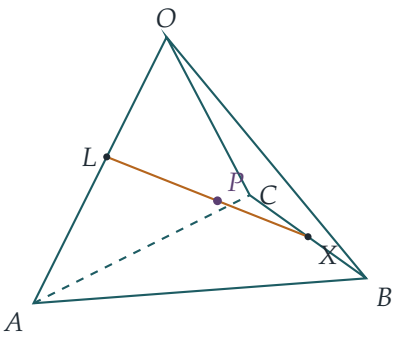
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

由於 O 位於不共線（non-collinear）三點 A、B、C 所在平面的上方，向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 是線性獨立（linearly independent）的，因此在任何以它們表示的向量方程中，我們都可以比較係數（compare coefficients）。題中每一點都可以先用未知參數寫出，再透過對應係數求得。點在平面上方的高度只是係數的倍數，因此處理「水平」這個條件就變得十分容易。

解答

由於 O 不在平面 ABC 上，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 之中沒有任何一個是其餘兩個的組合（例如若 $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$，則 O、A、B、C 便會共面（coplanar））。所以 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$ 必然推出 $x = x'$、$y = y'$、$z = z'$。另外亦須留意 $k > 0$。



第 (i) 部分

設 $\overrightarrow{OL} = \lambda\mathbf{a}$ 及 $\overrightarrow{OX} = (1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c}$。由於 P 在 LX 上，存在某個 s 使得

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\lambda\,\mathbf{a} + s(1-t)\,\mathbf{b} + st\,\mathbf{c}.$$

與 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ 比較：

$$(1-s)\lambda = \alpha, \qquad s(1-t) = \beta, \qquad st = \gamma.$$

將後兩式相加得 $s = \beta + \gamma$，於是 $t = \gamma/(\beta+\gamma)$，所以

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma}.$$

最後 $1 - s = 1 - \beta - \gamma = k + \alpha$，這是正數，所以

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\alpha}{1-s}\,\mathbf{a} = \frac{\alpha}{k+\alpha}\,\mathbf{a},$$

正如所求。（各係數都是被唯一確定的，所以 L 和 X 是唯一的；又由於 $0 < s < 1$ 及 $0 < t < 1$，P 嚴格位於 L 與 X 之間，而 X 嚴格位於 B 與 C 之間。）

第 (ii) 部分

把字母輪換（$\mathbf{a} \to \mathbf{b} \to \mathbf{c} \to \mathbf{a}$，$\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$），以同樣的論證可得

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\beta}{k+\beta}\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\gamma}{k+\gamma}\mathbf{c}, \quad \overrightarrow{OY} = \frac{\gamma\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a}}{\gamma+\alpha}, \quad \overrightarrow{OZ} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha+\beta}.$$

想一想 怎樣判斷一個經過三個給定點的平面是否水平？

當且僅當（if and only if）三點處於同一高度時，該平面才是水平的。設 O 位於平面 ABC 上方高度 $h > 0$ 處。那麼 A、B、C 各自都在 O 下方鉛垂距離 h 處，因此 OA 上的點 $\mu\mathbf{a}$ 位於 O 下方距離 μh 處，OB 和 OC 上的點亦同理。所以 L、M、N（它們位於三條不同的棱上且不在 O 處，故不共線）分別位於 O 下方深度

$$\frac{\alpha h}{k+\alpha}, \qquad \frac{\beta h}{k+\beta}, \qquad \frac{\gamma h}{k+\gamma}$$

處。現在

$$\frac{\alpha}{k+\alpha} = \frac{\beta}{k+\beta} \iff \alpha k + \alpha\beta = \beta k + \alpha\beta \iff k(\alpha-\beta) = 0 \iff \alpha = \beta,$$

這裏用到 $k > 0$。其餘各對同理，所以

$$\text{平面}LMN \text{ 是水平的} \iff \alpha = \beta = \gamma.$$

接着，OP 與平面 ABC 相交於何處？點 $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$ 位於該平面上，當且僅當 $x+y+z=1$（此時它等於 $\mathbf{a}+y(\mathbf{b}-\mathbf{a})+z(\mathbf{c}-\mathbf{a})$，而平面上每一點都具有這個形式）。點 $\mu\overrightarrow{OP}$ 的係數之和為 $\mu(\alpha+\beta+\gamma)$，所以直線 OP 與該平面相交於

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

比較係數可知，它等於 $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ 當且僅當

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1}{3},$$

即當且僅當 $\alpha=\beta=\gamma$。兩個條件都等價於 $\alpha=\beta=\gamma$，所以平面 LMN 是水平的，當且僅當 OP 與平面 ABC 相交於三角形 ABC 的形心（centroid）G。至此完成題目要求的「證明」。

在這情況下 $\overrightarrow{OX}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$，$Y$ 和 Z 亦同理：點 X、Y、Z 分別是 BC、CA 和 AB 的**中點**。

第 (iii) 部分

我們可以寫成

$$\overrightarrow{OP}=k\,\mathbf{0}+\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c},\qquad k+\alpha+\beta+\gamma=1,$$

而正正因為 $\alpha+\beta+\gamma<1$，四個權重 k,α,β,γ 全都是正數。所以 P 是 O、A、B、C 以嚴格正權重所作的加權平均（weighted average），這表示 P 嚴格位於四面體（tetrahedron）$OABC$ 的**內部**。

換個說法：單憑 α、β、γ 為正，就已把 P 置於以 O 為頂點、由棱 OA、OB、OC 張成的無限三面錐之內。P 在 O 下方的深度是 $(\alpha+\beta+\gamma)h$，所以條件 $\alpha+\beta+\gamma<1$ 表示 P 位於平面 ABC 上方，與 O 在同一側。（若和等於 1，P 便在面 ABC 上；若大於 1，則在其另一側。）

驗算

- 取 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{4}$，於是 $k=\frac{1}{4}$：那麼 $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\mathbf{a}$、$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\mathbf{b}$、$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\mathbf{c}$，而 LMN 顯然就是水平的中截面，與第 (ii) 部分的預測一致。
- 當 $k\to 0$（即 P 趨近面 ABC）時，$\overrightarrow{OL}\to\mathbf{a}$：$L$ 向下移至 A，這是合理的，因為此時 L、P、X 全都位於平面 ABC 上。
- 以電腦對 2000 個隨機四面體及隨機的 α,β,γ 進行驗算，確認 P 在 LX 上（殘差約為 10^{-15}），並且 LMN 是水平的恰好當 G 是形心之時。

常見錯誤

- 比較係數時沒有說明為何可以這樣做：這需要 **a**、**b**、**c** 線性獨立，而這正是用到「O 位於平面上方」的地方。
- 忘記在 $k(\alpha-\beta)=0$ 中消去 k 需要 $k>0$。
- 只證明了「當且僅當」的其中一個方向。

STEP 之外

數組 (k,α,β,γ) 就是 P 相對於四面體 $OABC$ 的重心坐標（barycentric coordinates）：一點位於內部，當且僅當所有坐標皆為正數；位於某個面上，則恰有一個坐標為零。它們是仿射幾何（affine geometry）的自然坐標，在線性代數（linear algebra）中（仿射組合與凸包（convex hulls））以及電腦圖像學中都會再次出現——在電腦圖像學裏，三角形正是以重心權重插值來著色的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是了解線性獨立和坐標如何以這種方式運用的好去處。

詳細解答

STEP III 2025，第 6 題

純數學 • 根的對稱函數

STEP III 2025，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

關於 $a+b+c$、$a^2+b^2+c^2$ 和 $a^3+b^3+c^3$ 的條件，實際上就是關於初等對稱函數（elementary symmetric functions）$a+b+c$、$ab+bc+ca$ 和 abc 的條件。一旦轉換過來，在 (i) 中這些數會成為一個非常簡單的多項式（polynomial）的根；在 (ii) 和 (iii) 中則由一個經典的因式分解（factorisation）包辦所有工作。最後一部分就是把同樣的代數倒過來運用。

解答

第 (i) 部分

將 $a+b+c=0$ 兩邊平方，得

$$0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=2(ab+bc+ca),$$

所以同樣有 $ab+bc+ca=0$。

並非全是實數。若 a、b 和 c 全是實數，則 a^2、b^2、c^2 是總和為 0 的非負實數，迫使 $a=b=c=0$。這與這些數非零矛盾，所以它們不可能全是實數。

模相等。設 $p=abc$，它非零。由於 $a+b+c=0$ 且 $ab+bc+ca=0$，

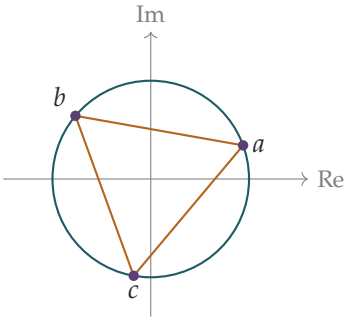
$$(z-a)(z-b)(z-c)=z^3-(a+b+c)z^2+(ab+bc+ca)z-abc=z^3-p.$$

所以 a、b、c 每一個都是 $z^3=p$ 的根，即

$$a^3=b^3=c^3=p.$$

取模（modulus），得 $|a|^3 = |b|^3 = |c|^3 = |p|$；由於模是非負實數，$|a| = |b| = |c| = |p|^{1/3}$。所以 a、b 和 c 的模全都相同，得證。

事實上，a、b、c 正是 p 的三個立方根（cube roots），它們位於一個以原點為中心的等邊三角形（equilateral triangle）的頂點上。



第 (ii) 部分

設 $a + b + c = 0$。則 $c = -(a + b)$，且

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b) = 3abc.$$

若同時有 $a^3 + b^3 + c^3 = 0$，則 $abc = 0$，所以其中至少一個數為零。因此不存在三個同時具備這兩個性質的非零複數。

第 (iii) 部分

這次有用的恆等式（identity）是

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a),$$

可以透過展開來驗證：兩邊的 a^2b、ab^2 等項各出現三次，而 abc 出現六次。

現在 $d = -(a + b + c)$，所以 $d^3 = -(a + b + c)^3$，且

$$0 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3 = -3(a + b)(b + c)(c + a).$$

想一想 為甚麼一個乘積等於零，能告訴我們關於模的任何資訊？

若干複數的乘積為零，當且僅當其中一個因子為零。所以 $a + b$、$b + c$、$c + a$ 之中有一個等於零；不妨設 $a + b = 0$（其他情況只需重新標記字母，做法相同）。於是 $b = -a$，所以 $|b| = |a|$。因此四個數中至少有兩個模相同。

（這裏並沒有用到 $d \neq 0$ 或這些數非零；結論其實就是這四個數可分成兩對互為相反數的數，例如 $a, -a, c, -c$。）

第 (iv) 部分

取 $c=1$、$d=-2$、$e=3$，有

$$c+d+e=2, \qquad c^3+d^3+e^3=1-8+27=20,$$

所以我們需要實數 a、b 使得

$$a+b=-2, \qquad a^3+b^3=-20.$$

利用 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$，第二個條件變成

$$-20=-8+6ab \quad \Longrightarrow \quad ab=-2.$$

所以 a 和 b 是 $t^2+2t-2=0$ 的根，即

$$a=-1+\sqrt{3}, \qquad b=-1-\sqrt{3},$$

由於判別式（discriminant）$4+8=12$ 為正，它們都是實數。它們的絕對值分別是 $\sqrt{3}-1\approx 0.73$ 和 $\sqrt{3}+1\approx 2.73$，兩者都不等於 1、2 或 3（兩者都是無理數（irrational））。所以

$$-1+\sqrt{3}, \quad -1-\sqrt{3}, \quad 1, \quad -2, \quad 3$$

是五個絕對值各不相同的實數，總和為 0，而它們的立方和也是 0。

驗算

- 在 (i) 中，1 的立方根 1、ω、ω^2 滿足 $1+\omega+\omega^2=0$ 及 $1+\omega^2+\omega^4=1+\omega^2+\omega=0$：模全是 1，且並非全是實數，與預期相符。
- 在 (iii) 中，試取 $a=2$、$b=-2$、$c=\mathrm{i}$、$d=-\mathrm{i}$：兩個和都等於零，而這些數確實兩兩配成相反數。
- 在 (iv) 中，以數值計算得 $0.7320-2.7320+1-2+3=0$ 及 $0.3923-20.3923+1-8+27=0$，其中用到 $(\sqrt{3}-1)^3=6\sqrt{3}-10$ 和 $(-1-\sqrt{3})^3=-6\sqrt{3}-10$。

常見錯誤

- 在 (i) 中，透過「取立方根」由 $a^3=b^3$ 推出 $|a|=|b|$：a 和 b 不一定相等，但它們的模相等，因為模是非負實數。
- 在 (iii) 中，忘記說明爲甚麼 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ 迫使其中一個因子為零（因為 $\mathbb{C}$ 中沒有零因子（zero divisors））。
- 在 (iv) 中，沒有檢查 a 和 b 的絕對值與 1、2、3 不同，以及兩者彼此不同。

STEP 之外

每個多變量對稱多項式（symmetric polynomial）都可以用初等對稱多項式表示，而牛頓（Newton）恆等式（Newton's identities）則明確給出它們與冪和（power sums）$a^k + b^k + c^k + \ldots$ 之間的聯繫；這正是這裏的條件能把這些數限制得如此緊的原因。一個近親是 Prouhet–Tarry–Escott 問題：找出兩組不同的整數，使它們的一次方、二次方、...、k 次方之和全部相等。這個問題至今仍部分未解決。關於多項式及其根的代數，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

詳細解答

STEP III 2025，第 7 題

純數學 • 反正切函數

STEP III 2025，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

一切都取決於一個事實：$f(x)\,f(-x)=1$，因為 $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)=1$。再加上 $f(x)>0$，便可把 $g(x)+g(-x)$ 化成熟悉的 $\tan^{-1}t+\tan^{-1}(1/t)$。至於 (c)，$\tan\frac{1}{2}\theta$ 是半角正切（half-angle tangent），配合 $\tan\theta=1/x$，它可化簡為 $f(x)$。一旦知道 g 與 k 在 $x>0$ 時相等，(e) 中的兩個積分便可藉對稱性聯繫起來。

解答

第 (i) 部分

當 $x\neq 0$ 時，有 $x^2=|x|^2$，所以

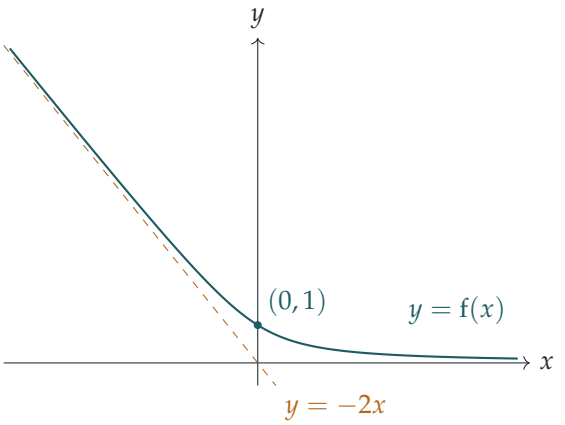
$$\sqrt{x^2+1}=|x|\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}=|x|\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\cdots\right)=|x|+\frac{1}{2|x|}-\frac{1}{8|x|^3}+\cdots,$$

這裏用了二項級數（binomial series）；由於 $|x|$ 很大時 $1/x^2<1$，展開是成立的。略去 $|x|^{-3}$ 階的項，便得 $\sqrt{x^2+1}\approx|x|+\dfrac{1}{2|x|}$，正如所求。

作圖。先整理各項事實。

- 對所有 x，$f(x)>0$，因為 $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$。此外 $f(0)=1$。
- $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0$，因為 $x<\sqrt{x^2+1}$，所以 f 是遞減（decreasing）的。再者 $f''(x)=(x^2+1)^{-3/2}>0$，所以曲線是凸（convex）的。
- 當 $x\to+\infty$：$f(x)\approx x+\frac{1}{2x}-x=\frac{1}{2x}\to 0^+$，所以 x 軸是一條漸近線（asymptote）。

▶ 當 $x \to -\infty$：$|x| = -x$，所以 $\mathrm{f}(x) \approx -2x + \frac{1}{2|x|}$。直線 $y = -2x$ 是一條斜漸近線（oblique asymptote），而曲線位於它的稍上方。



第 (ii)(a) 部分

利用平方差（difference of two squares）展開，得

$$\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(-x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = (x^2+1) - x^2 = 1,$$

所以 $\mathrm{f}(-x) = 1/\mathrm{f}(x)$。設 $t = \mathrm{f}(x)$，由第 (i) 部分知它是正數。於是

$$\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(-x) = \tan^{-1} t + \tan^{-1}\frac{1}{t}.$$

? **想一想** 為甚麼 $\tan^{-1} t + \tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi$ 需要 $t > 0$？

設 $\alpha = \tan^{-1} t$。由於 $t > 0$，$\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$，所以 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 也在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 內，而這區間位於 $\tan^{-1}$ 的值域之內。它的正切是 $\cot\alpha = 1/t$，所以 $\tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$。由此得 $\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(-x) = \frac{1}{2}\pi$。（若 $t < 0$，總和便會是 $-\frac{1}{2}\pi$，這正是 f 為正這一點重要的原因。）

第 (ii)(b) 部分

$\tan^{-1}$ 是奇函數（odd function），所以當 $x \neq 0$ 時，

$$\mathrm{k}(-x) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{x} = -\mathrm{k}(x),$$

即 $\mathrm{k}(x) + \mathrm{k}(-x) = 0$。

第 (ii)(c) 部分

設 $x > 0$ 及 $\theta = \tan^{-1}(1/x)$，則 $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ 且 $\mathrm{k}(x) = \frac{1}{2}\theta$。取一個對邊為 1、鄰邊為 x 的直角三角形，得 $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 及 $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$。利用半角恆等式（half-angle identity）$\tan\frac{1}{2}\theta = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$（由 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ 及 $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ 得出），

$$\tan \mathrm{k}(x) = \frac{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \sqrt{x^2+1} - x = \mathrm{f}(x) = \tan \mathrm{g}(x).$$

結果得證。

還可以說得更多。當 $x > 0$ 時，$\mathrm{k}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$。此外 $0 < \mathrm{f}(x) < \mathrm{f}(0) = 1$，所以 $\mathrm{g}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$ 亦成立。由於 tan 在該區間上是一一對應（one-to-one）的，

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{g}(x) \quad \text{當} x > 0.$$

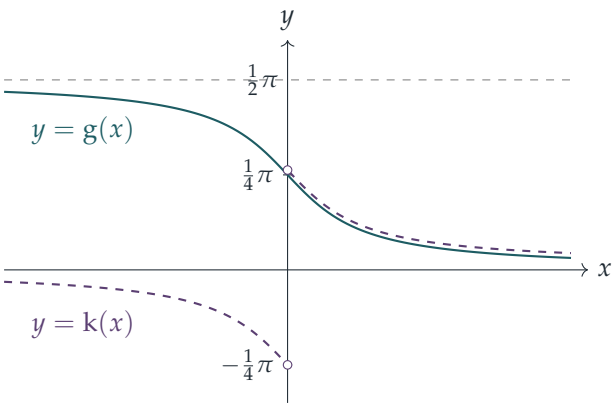
當 $x < 0$ 時，有 $-x > 0$，所以依次利用 (b)、上述結果及 (a)：

$$\mathrm{k}(x) = -\mathrm{k}(-x) = -\mathrm{g}(-x) = \mathrm{g}(x) - \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{當} x < 0.$$

第 (ii)(d) 部分

$\mathrm{g} = \tan^{-1} \circ \mathrm{f}$ 是遞減的，因為 $\tan^{-1}$（遞增）與 f（遞減）都是單調（monotonic）的。當 $x \to -\infty$，$\mathrm{f} \to \infty$ 而 $\mathrm{g} \to \frac{1}{2}\pi$。當 $x \to +\infty$，$\mathrm{f} \to 0^+$ 而 $\mathrm{g} \to 0$。此外 $\mathrm{g}(0) = \tan^{-1} 1 = \frac{1}{4}\pi$，而由 (a) 可知圖像關於 $(0, \frac{1}{4}\pi)$ 具有旋轉對稱性（rotational symmetry）。

由 (c) 可知，當 $x > 0$ 時，k 的圖像與 g 的相同，從 $\frac{1}{4}\pi$（不能取得）下降至趨向 0。當 $x < 0$ 時，它是 g 的圖像向下平移 $\frac{1}{2}\pi$，從 0（當 $x \to -\infty$）下降，當 $x \to 0^-$ 時趨向 $-\frac{1}{4}\pi$。所以 k 是奇函數，並在 $x = 0$ 處（該處無定義）跳躍 $\frac{1}{2}\pi$。



（當 $x > 0$ 時兩條曲線重合。該處把虛線曲線畫得比實線稍高，只是為了讓兩者都看得見。）

第 (ii)(e) 部分

當 $x > 0$ 時，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1/x^2}{1+1/x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$。使用分部積分（integration by parts），對 $\tan^{-1}(1/x)$ 求導，對 1 積分，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\Big[x\tan^{-1}\frac{1}{x}\Big]_0^1 + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

在下限處，當 $x \to 0^+$ 時 $x\tan^{-1}(1/x) \to 0$，因為 $\tan^{-1}(1/x)$ 一直小於 $\frac{1}{2}\pi$。（被積函數有界，所以這個積分完全是正常積分。）

由此。由 (c)，當 $-1 \le x < 0$ 時 $\mathrm{g}(x) = \mathrm{k}(x) + \frac{1}{2}\pi$。由 (b)，k 是奇函數，所以 $\int_{-1}^0 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x$。因此

$$\int_{-1}^0 \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi - \Big(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2\Big) = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

驗算

- 在 $[-1,0]$ 上，g 由 $\mathrm{g}(-1) = \tan^{-1}(\sqrt{2}+1) = \frac{3}{8}\pi \approx 1.178$ 遞減至 $\frac{1}{4}\pi \approx 0.785$，所以積分必定介乎這兩個值之間。我們的答案是 $\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2 \approx 1.0048$，而數值積分（numerical quadrature）在十位小數內給出相同結果。同樣地，$\int_0^1 \mathrm{k}\,\mathrm{d}x \approx 0.56599$。
- 求導得 $\mathrm{g}'(x) = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$，所以其實 $\mathrm{g}(x) = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\tan^{-1}x$。這條公式令 (a) 一目了然，而直接對它積分亦可重現 (e) 的答案。
- 在 $x = 1$：$\mathrm{f}(1) = \sqrt{2}-1 = \tan\frac{1}{8}\pi$，而 $\mathrm{k}(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{8}\pi$，與 (c) 的預測一致。

常見錯誤

- 對所有很大的 $|x|$ 都寫 $\sqrt{x^2+1} \approx x + \frac{1}{2x}$。對負數 x 而言這個式子符號錯誤，而且會掩蓋漸近線 $y = -2x$。
- 從 (c) 推斷 $\mathrm{k} = \mathrm{g}$ 處處成立。正切相等只能推出角度在相差 π 的倍數下相等，而當 $x < 0$ 時兩個函數相差 $\frac{1}{2}\pi$。
- 在分部積分中忘記論證 $x\tan^{-1}(1/x)$ 在 0 處的極限。

STEP 之外

函數 f 就是 $e^{-\sinh^{-1}x}$，因為 $\sinh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$。它的倒數性質 $f(-x) = 1/f(x)$ 不過是 $\sinh^{-1}$ 為奇函數這一點。(c) 中的陷阱——正切相等並不迫使角度相等——正是反函數分支（branch）問題的實變數版本。這個問題在複對數（complex logarithm）與輻角（argument）中會以更嚴重的形式再次出現。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是欣賞這一點的絕佳讀物，而 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）則仔細處理了極限與反常積分（improper integral）。

詳細解答

STEP III 2025，第 8 題

純數學 • 以複數求三角函數之和

STEP III 2025，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分的恆等式(identity)其實是一條遞推關係(recurrence)：它把 $z^{m+1}-z^{-(m+1)}$ 用低兩級的同類表達式寫出來，因此反覆應用它，就能令一個和式逐項相消（telescope）。取 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 後，每個 $z^k \pm z^{-k}$ 都變成 $2\cos k\theta$ 或 $2\mathrm{i}\sin k\theta$，代數運算於是化為三角恆等式（trigonometric identity）。至於數值部分，關鍵在於選取 θ，使 $\sin 2n\theta$ 等於 $\sin\theta$（或 $\cos\theta$），從而可以約去。

解答

第 (i) 部分

展開乘積，得

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^m+\frac{1}{z^m}\right)=z^{m+1}+z^{1-m}-z^{m-1}-z^{-(m+1)}.$$

加上 $z^{m-1}-z^{1-m}$，中間兩項便互相抵消，剩下 $z^{m+1}-z^{-(m+1)}$，這正是所求的恆等式。

歸納法（*induction*）。當 $n=1$ 時，命題為 $z^2-z^{-2}=(z-z^{-1})(z+z^{-1})$，即平方差（difference of two squares），故成立。假設命題對某個 $n\geq 1$ 成立。在恆等式中取 $m=2n+1$（於是 $m+1=2n+2$，$m-1=2n$），

$$\begin{aligned}
z^{2n+2}-\frac{1}{z^{2n+2}} &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1}+\frac{1}{z^{2n+1}}\right)+\left(z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}\right)\\
&= \left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1}+\frac{1}{z^{2n+1}}\right)+\left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(z^{2r-1}+\frac{1}{z^{2r-1}}\right)\\
&= \left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n+1}\left(z^{2r-1}+\frac{1}{z^{2r-1}}\right),
\end{aligned}$$

這裏用了歸納假設（inductive hypothesis），而多出來的一項正是 $r = n+1$ 的那一項。所以結果對 $n+1$ 成立，由歸納法知對所有 $n \geq 1$ 成立。

$z + \frac{1}{z}$ 的版本。同樣地，

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^m - \frac{1}{z^m}\right) = z^{m+1} - z^{1-m} + z^{m-1} - z^{-(m+1)},$$

所以這次要減去 $z^{m-1} - z^{1-m}$：

$$z^{m+1} - \frac{1}{z^{m+1}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^m - \frac{1}{z^m}\right) - \left(z^{m-1} - \frac{1}{z^{m-1}}\right).$$

這個負號令我們每往下推一級時符號交替改變，因此我們斷言

$$z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1} - \frac{1}{z^{2r-1}}\right).$$

當 $n = 1$ 時，這同樣是 $(z+z^{-1})(z-z^{-1})$。若命題對 n 成立，取 $m = 2n+1$ 的恆等式給出

$$z^{2n+2} - \frac{1}{z^{2n+2}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n+1} - \frac{1}{z^{2n+1}}\right) - \sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1} - \frac{1}{z^{2r-1}}\right)\right],$$

由於 $-(-1)^{n-r} = (-1)^{n+1-r}$，而第一項正是 $r = n+1$ 的那一項，其符號為 $(-1)^0 = 1$，所以方括號內恰好是 $\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{n+1-r}\left(z^{2r-1} - z^{-(2r-1)}\right)$。歸納法至此完成。逐項寫出來就是

$$z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n-1} - \frac{1}{z^{2n-1}}\right) - \left(z^{2n-3} - \frac{1}{z^{2n-3}}\right) + \cdots \pm \left(z - \frac{1}{z}\right)\right].$$

第 (ii) 部分

(a) 取 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，則 $z^k + z^{-k} = 2\cos k\theta$，$z^k - z^{-k} = 2\mathrm{i}\sin k\theta$。第 (i) 部分的第一個結果變成

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta = 2\mathrm{i}\sin\theta\sum_{r=1}^{n} 2\cos(2r-1)\theta,$$

兩邊除以 $2\mathrm{i}$，得 $\sin 2n\theta = 2\sin\theta\sum_{r=1}^{n}\cos(2r-1)\theta$，即為所求。

(b) 取 $n = 2$：$\sin 4\theta = 2\sin\theta(\cos\theta + \cos 3\theta)$。我們希望 $\sin 4\theta$ 等於 $\sin\theta$，而 $\theta = \frac{1}{5}\pi$ 正好做到，因為 $\sin\frac{4}{5}\pi = \sin(\pi - \frac{1}{5}\pi) = \sin\frac{1}{5}\pi$。由於 $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$，可以兩邊除以它：

$$1 = 2\left(\cos\tfrac{1}{5}\pi + \cos\tfrac{3}{5}\pi\right).$$

又 $\cos\frac{3}{5}\pi = -\cos(\pi - \frac{3}{5}\pi) = -\cos\frac{2}{5}\pi$，所以 $\cos\frac{1}{5}\pi - \cos\frac{2}{5}\pi = \frac{1}{2}$，即 $\cos\frac{2}{5}\pi = \cos\frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2}$。

(c) 取 $n=7$ 及 $\theta=\frac{1}{15}\pi$，同樣有 $\sin 14\theta=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\neq 0$，所以

$$\sum_{r=1}^{7}\cos\frac{(2r-1)\pi}{15}=\frac{1}{2}.$$

> **想一想** 這裏的七個角都是 $\frac{1}{15}\pi$ 的奇數倍，但目標式中的卻是偶數倍。怎樣由前者過渡到後者？

對大於 $\frac{1}{2}\pi$ 的角使用 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，並留意 $\cos\frac{5}{15}\pi=\cos\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}$ 及 $\cos\frac{3}{15}\pi=\cos\frac{1}{5}\pi$：

$$\cos\tfrac{9}{15}\pi=-\cos\tfrac{2}{5}\pi,\qquad \cos\tfrac{11}{15}\pi=-\cos\tfrac{4}{15}\pi,\qquad \cos\tfrac{13}{15}\pi=-\cos\tfrac{2}{15}\pi.$$

和式變成

$$\cos\tfrac{1}{15}\pi+\cos\tfrac{7}{15}\pi-\cos\tfrac{2}{15}\pi-\cos\tfrac{4}{15}\pi+\tfrac{1}{2}+\left(\cos\tfrac{1}{5}\pi-\cos\tfrac{2}{5}\pi\right)=\tfrac{1}{2}.$$

由 (b)，括號內的值是 $\frac{1}{2}$，所以

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi+\cos\tfrac{4}{15}\pi-\cos\tfrac{7}{15}\pi-\cos\tfrac{1}{15}\pi=\tfrac{1}{2}.$$

最後，$-\cos\frac{7}{15}\pi=\cos(\pi-\frac{7}{15}\pi)=\cos\frac{8}{15}\pi$，而 $-\cos\frac{1}{15}\pi=\cos(\pi+\frac{1}{15}\pi)=\cos\frac{16}{15}\pi$，得

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi+\cos\tfrac{4}{15}\pi+\cos\tfrac{8}{15}\pi+\cos\tfrac{16}{15}\pi=\tfrac{1}{2},$$

即為所求。

第 (iii) 部分

> **想一想** 目標式是 θ 的奇數倍角的正弦的交錯和。第 (i) 部分哪一個結果正好產生這種形式？

是 $z+\frac{1}{z}$ 的版本。取 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，它變成

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta=2\cos\theta\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\,2\mathrm{i}\sin(2r-1)\theta,$$

所以

$$\sin 2n\theta=2\cos\theta\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\sin(2r-1)\theta.$$

取 $n=3$：

$$\sin 6\theta=2\cos\theta\,(\sin 5\theta-\sin 3\theta+\sin\theta).$$

現在我們希望 $\sin 6\theta=\cos\theta$，而 $\theta=\frac{1}{14}\pi$ 符合要求：$\sin\frac{6}{14}\pi=\cos(\frac{1}{2}\pi-\frac{6}{14}\pi)=\cos\frac{1}{14}\pi$，且其值不為零。兩邊除以它，得

$$\sin\tfrac{1}{14}\pi-\sin\tfrac{3}{14}\pi+\sin\tfrac{5}{14}\pi=\tfrac{1}{2}.$$

驗算

- 用簡單的數值測試恆等式：取 $z=2$、$n=2$，得 $16-\frac{1}{16}=\frac{255}{16}$，而 $(2-\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2}+8+\frac{1}{8})=\frac{3}{2}\cdot\frac{85}{8}=\frac{255}{16}$，以及 $(2+\frac{1}{2})(8-\frac{1}{8}-2+\frac{1}{2})=\frac{5}{2}\cdot\frac{51}{8}=\frac{255}{16}$。
- 以數值計算，$\cos\frac{2}{5}\pi=0.309017\ldots$ 與 $\cos\frac{1}{5}\pi-\frac{1}{2}=0.809017\ldots-0.5$ 相符；這就是大家熟悉的 $\cos\frac{1}{5}\pi=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$、$\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$。
- 用計算機計算，(ii)(c) 和 (iii) 中的和式都等於 0.500000。

常見錯誤

- 在 $z+\frac{1}{z}$ 的遞推關係中弄錯符號：較低的一項是被減去的，所以和式符號交替，而最高的一項 $z^{2n-1}-z^{-(2n-1)}$ 必須帶 $+$ 號。
- 除以 $\sin\theta$ 或 $\cos\theta$ 時，沒有指出它在所選的角度下不為零。
- 在 (ii)(c) 中，忘記 $\cos\frac{5}{15}\pi=\frac{1}{2}$，或忘記需要用 (b) 來消去剩下的一對項。

STEP 之外

當 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 時，表達式 z^k+z^{-k} 就是 $2\cos k\theta$；而像第 (i) 部分那樣的遞推關係，正是切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials）所滿足的關係——這些多項式把 $\cos k\theta$ 和 $\sin k\theta/\sin\theta$ 表示成 $\cos\theta$ 的多項式。(ii)(c) 和 (iii) 中那些漂亮的和式源自單位根（roots of unity）：角 $\frac{2}{15}\pi,\frac{4}{15}\pi,\frac{8}{15}\pi,\frac{16}{15}\pi$ 是由反覆加倍產生的，這讓我們初步窺見高斯（Gauss）週期（Gauss periods）與伽羅瓦理論（Galois theory）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是欣賞這種幾何的絕佳讀物。

詳細解答

STEP III 2025，第 9 題

力學 • 質心

STEP III 2025，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 11.8 節傾斜的平衡中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/tilted-equilibria.html

關鍵思路

一個放在桌上的立體只在一點與桌面接觸，而且只受兩個力作用：作用於質心（centre of mass）G 的重量，以及作用於接觸點的反作用力（reaction）。這兩個力要互相平衡，必須作用在同一條鉛垂線上，所以曲面在接觸點的法線（normal）必須通過 G。第 (i) 部分找出 G 的位置，第 (ii) 部分告訴我們曲面的法線與軸相交於何處，第 (iii) 部分則把兩者結合起來：我們數一數曲面上有多少點的法線通過 G。

解答

全文中，把曲線寫成 $y = \dfrac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$，其中 $0 \le x \le r$。它由 y 軸上的 $(0, r)$ 向下延伸至 x 軸上的 $(r, 0)$，期間 $y \ge 0$。

第 (i) 部分

我們把立體切成繞 y 軸的薄圓柱殼（cylindrical shells）。半徑為 x、厚度為 δx、高度為 y 的圓柱殼，體積為 $2\pi xy\,\delta x$；由於密度均勻，它的質心位於高度 $\frac{1}{2}y$ 處。因此體積及關於 xz 平面的力矩（moment）分別為

$$V = 2\pi \int_0^r xy \,\mathrm{d}x, \qquad V\bar{y} = 2\pi \int_0^r x \cdot \tfrac{1}{2}y^2 \,\mathrm{d}x.$$

第一個積分為

$$\int_0^r x\,\frac{r^n - x^n}{r^{n-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r^{n-1}}\left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{n\,r^3}{2(n+2)},$$

所以 $V = \dfrac{\pi n r^3}{n+2}$。至於第二個積分，把 $(r^n - x^n)^2$ 展開：

$$\begin{aligned}\int_0^r x\,\frac{(r^n - x^n)^2}{r^{2n-2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{r^{2n+2}}{r^{2n-2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2}\right)\\ &= r^4 \cdot \frac{(n+2)^2 - 4(n+1)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

所以 $V\bar{y} = \pi \cdot \dfrac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)}$。兩者相除，

$$\bar{y} = \frac{\pi n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n+2}{\pi n r^3} = \frac{nr}{2(n+1)},$$

此即所求。由對稱性可知，質心位於 y 軸上。

第 (ii) 部分

求導得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{nx^{n-1}}{r^{n-1}}$，在 $x = rp$ 處其值為 $-np^{n-1}$。由於 $p > 0$，此值不為零，所以法線的斜率（gradient）為 $\dfrac{1}{np^{n-1}}$，方程為

$$y - r(1 - p^n) = \frac{x - rp}{np^{n-1}}.$$

代入 $x = 0$，

$$Y = r(1 - p^n) - \frac{rp}{np^{n-1}} = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right),$$

此即所求結果。

當 $n = 4$ 時，$Y(p) = r\left(1 - p^4 - \frac{1}{4}p^{-2}\right)$，且

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p} = r\left(-4p^3 + \frac{1}{2p^3}\right) = \frac{r(1 - 8p^6)}{2p^3}.$$

想一想 我們怎樣知道這個駐點（stationary point）給出的是最大值，而不只是局部（local）最大值？

對於 $p > 0$，$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}p$ 的正負號與 $1 - 8p^6$ 的相同：當 $p^6 < \frac{1}{8}$ 時為正，當 $p^6 > \frac{1}{8}$ 時為負。因此 Y 遞增至 $p^6 = \frac{1}{8}$，即 $p^2 = \frac{1}{2}$、$p = 1/\sqrt{2}$（它位於 $(0, 1]$ 內），之後遞減。所以這是整個區間上的最大值：

$$Y_{\max} = r\left(1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\cdot 2\right) = \tfrac{1}{4}r.$$

第 (iii) 部分

兩個部分。 上邊界 $r^3y = r^4 - x^4$ 就是第 (i) 部分中 $n = 4$ 的曲線，所以上半部（$y = 0$ 以上）就是第 (i) 部分中 $n = 4$ 的立體。下邊界 $ry = -(r^2 - x^2)$ 是 $n = 2$ 的曲線 $ry = r^2 - x^2$ 關於 x 軸的反射，所以下半部就是倒轉過來的 $n = 2$ 立體。兩者在平面 $y = 0$ 上半徑為 r 的圓形邊緣相接。利用第 (i) 部分，即 $V = \pi n r^3/(n+2)$：

	體積	質心高度
上半部（$n = 4$）	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{4r}{10} = \frac{2}{5}r$
下半部（$n = 2$，經反射）	$\frac{1}{2}\pi r^3$	$-\frac{2r}{6} = -\frac{1}{3}r$

取力矩（與之前一樣，假設密度均勻），

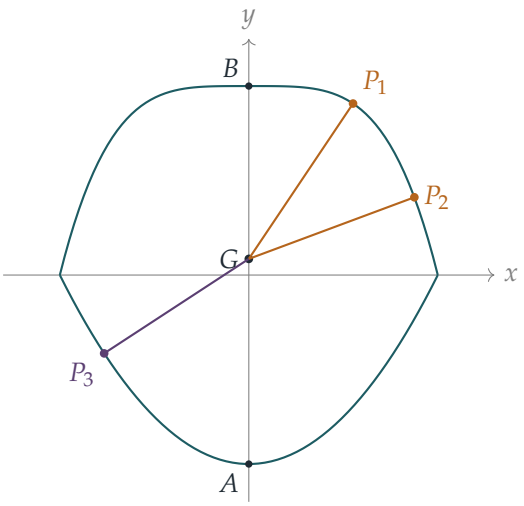
$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}r - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}r}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{10}r}{\frac{7}{6}} = \frac{3r}{35},$$

所以 $G = \left(0, \frac{3}{35}r\right)$，略高於邊緣。

平衡條件。

? **想一想** 為甚麼接觸點的法線必須通過 G？

當立體以單一點 P 靠在桌面上時，它只受兩個力：鉛垂地作用於 G 的重量，以及作用於 P 的桌面反作用力。兩個力要平衡，必須大小相等、方向相反並且作用在同一直線上，所以 G 必須位於 P 的正上方。桌面就是 P 處的切平面（tangent plane），所以通過 P 的鉛垂線就是立體在該點的法線：P 處的法線必須通過 G。反過來，若法線通過 G，立體便可以在該處靜止，因為立體是凸（convex）的（輪廓 $y = r - x^4/r^3$ 是凹（concave）的，而 $y = (x^2 - r^2)/r$ 是凸的），所以它完全位於 P 處切平面的同一側。旋轉曲面（surface of revolution）的法線位於一個通過軸的平面內，所以我們只需考慮 xy 平面上的截面。由於 G 在軸上，我們需要找出與 y 軸相交於 $Y = \frac{3}{35}r$ 的法線。



在上表面接觸。 由第 (ii) 部分取 $n=4$（而 $r(1-p^4)$ 是該點的高度），在 $\big(rp, r(1-p^4)\big)$ 處的法線與軸相交於 $r\big(1-p^4-\frac{1}{4}p^{-2}\big)$。令它等於 $\frac{3}{35}r$，再乘以 $140p^2$：

$$140p^2-140p^6-35=12p^2 \iff h(q):=140q^3-128q+35=0, \quad q=p^2.$$

由於 $h(0)=35>0$、$h(\frac{1}{2})=17.5-64+35=-11.5<0$ 及 $h(1)=47>0$，所以 h 有一個根 $q_1\in(0,\frac{1}{2})$ 及一個根 $q_2\in(\frac{1}{2},1)$，給出上表面上的兩點 P_1,P_2，其中 $0<p_1<1/\sqrt{2}<p_2<1$。（這正是第 (ii) 部分所預示的：$\frac{3}{35}r$ 低於最大值 $\frac{1}{4}r$，所以這個值在最大值兩側各達到一次。）

在下表面接觸。 對於 $n=2$ 的曲線，參數為 p 處的法線與軸相交於 $r(1-p^2-\frac{1}{2})=r(\frac{1}{2}-p^2)$；關於 x 軸反射後，下表面在 $\big(rp,-r(1-p^2)\big)$ 處的法線與軸相交於 $r(p^2-\frac{1}{2})$。令它等於 $\frac{3}{35}r$，得

$$p^2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{35}=\tfrac{41}{70}, \qquad p_3=\sqrt{41/70}\in(0,1),$$

這是第三點 P_3（由於我們所用的半截面上 $p>0$，所以取正根；圖中顯示的是它的鏡像，由對稱性可知兩者等價）。

三個角互不相同且不為零。 當立體在 P 處靜止時，向上的鉛垂方向由 P 指向 G，即沿 P 處的向內法線。

- 在下表面的 P_3 處，向內法線 $(-2p_3,1)$（曲線的斜率為 $2p_3$）指向上方，與指向正 y 軸方向的 $\overrightarrow{AB}$ 成銳角 $\arctan(2p_3)$。
- 在上表面的 P_1 或 P_2 處，向內法線 $(-4p^3,-1)$ 指向下方，所以與 $\overrightarrow{AB}$ 所成的角是鈍角 $180^\circ-\arctan(4p^3)$。

由於 $p_1 \neq p_2$ 且 $\arctan(4p^3)$ 嚴格遞增，兩個鈍角並不相同，而且兩者都與那個銳角不同。由於 $p_1, p_2, p_3 > 0$，三個角都不為零。因此立體可以在 $\overrightarrow{AB}$ 與向上鉛垂方向成三個不同的非零角時處於平衡（equilibrium），此即所求。

（事實上平衡位置不止這些：立體亦可以靠邊緣平衡，或以 B 點著地、$\overrightarrow{AB}$ 指向正下方而平衡。不過曲面上的這三個位置已足以回答題目。）

驗算

- 第 (i) 部分取 $n = 2$，對高度為 r 的拋物面（paraboloid）得出 $\frac{1}{3}r$，這是標準結果：實心拋物面的質心位於由頂點到底面的三分之二處。當 $n \to \infty$ 時，立體變成高度為 r 的圓柱體，而 $\bar{y} \to \frac{1}{2}r$，結果正確。
- 在第 (ii) 部分中，當 $p = 1$（邊緣）且 $n = 4$ 時得 $Y = -\frac{1}{4}r$；該處的斜率為 -4，所以法線的斜率為 $\frac{1}{4}$，在水平距離 r 內下降 $\frac{1}{4}r$。兩者吻合。
- 取 $r = 1$，各根為 $p_1 \approx 0.552$、$p_2 \approx 0.876$、$p_3 \approx 0.765$，而各角約為 146.1°、110.4° 及 56.8°。以電腦搜尋使 G 離桌面高度取駐值的傾角，在嚴格介乎 0° 與 180° 之間恰好找到這三個，另加邊緣的位置（約 85.1°）。

常見錯誤

- 把下半部的質心放在 $+\frac{1}{3}r$：它是倒轉過來的 $n = 2$ 立體，所以質心位於邊緣之下。
- 使用圓盤（disc）體積 $\pi x^2\,\delta y$，而 x 仍要以 y 的 $\frac{2}{n}$ 次方表示：這方法可行，但圓柱殼法得出的是多項式積分。
- 求得關於 $q = p^2$ 的三次方程，卻沒有證明它有兩個滿足 $0 < p < 1$ 的根；在 $q = 0, \frac{1}{2}, 1$ 檢查正負號即可解決。

STEP 之外

法線通過 G 這個條件，使物體滾動時 G 的高度取駐值，而這個高度就是勢能（potential energy）。穩定（stable）位置是勢能的極小值，不穩定位置則是極大值。光滑的凸體必定至少有兩個平衡位置，而 2006 年發現的「Gömböc」是一個只有一個穩定位置和一個不穩定位置的凸形體。關於勢能與穩定性的一般理論，可參閱 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

詳細解答

STEP III 2025，第 10 題

力學 • 移動木板上的摩擦力

STEP III 2025，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

先解關於 h 的微分方程（differential equation）：這是簡諧運動（simple harmonic motion），它表示木板的傾角以恆定速率 ω 增加。知道角度之後，質點的位置固定在木板全長的某個比例處，因此求兩次導數（derivative）便得到它的加速度。然後在垂直於木板和沿着木板兩個方向分解，應用牛頓第二定律（Newton's second law）就得出各個力，這比沿水平和鉛垂方向分解簡潔得多。

解答

我們把木板視為剛性桿，把 P 視為質點。設 θ 為木板與水平面所成的角。

第 (i) 部分

方程 $\ddot{\mathrm{h}} = -\omega^2 \mathrm{h}$ 的通解（general solution）為 $\mathrm{h} = a\cos\omega t + b\sin\omega t$。條件 $\mathrm{h}(0) = 0$ 給出 $a = 0$，而 $\dot{\mathrm{h}}(0) = b\omega = \omega L$ 給出 $b = L$，所以

$$\mathrm{h}(t) = L\sin\omega t.$$

由於 A 位於高度 h，而木板長度為 L，故 $\sin\theta = \mathrm{h}/L = \sin\omega t$，所以 $\theta = \omega t$（對 $0 \le \omega t \le \frac{\pi}{2}$ 成立，這已涵蓋整個運動過程：在此之後 A 便須升至高於 L 的高度）。因此 $A = (0, L\sin\omega t)$，$B = (L\cos\omega t, 0)$。

點 C 位於由 A 到 B 的比例 s 處，所以 $C = A + s(B - A)$：

$$x = sL\cos\omega t, \qquad y = (1-s)L\sin\omega t.$$

第一式就是所求的 x 坐標，第二式則是相應的 y 坐標表達式。

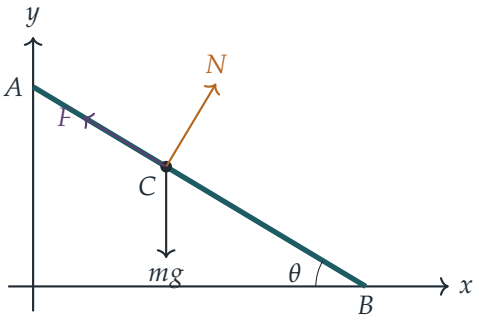
第 (ii) 部分

對 t 求導兩次，

$$\ddot{x} = -sL\omega^2 \cos\omega t, \qquad \ddot{y} = -(1-s)L\omega^2 \sin\omega t.$$

第 (iii) 部分

作用在 P 上的力有：向下的重量 mg、垂直於木板（向上）的法向反作用力（normal reaction）N，以及沿木板方向的摩擦力（friction）F；我們規定 F 沿斜面向上、指向 A 時為正。



垂直於木板(向上)的單位向量(unit vector)是 $(\sin\theta, \cos\theta)$，沿木板指向 A 的單位向量是 $(-\cos\theta, \sin\theta)$，其中 $\theta = \omega t$。把運動方程 $m(\ddot{x}, \ddot{y}) = N(\sin\theta, \cos\theta) + F(-\cos\theta, \sin\theta) + (0, -mg)$ 在這兩個方向上分解（即分別與每個單位向量取點積（dot product））：

垂直於木板方向。

$$\begin{aligned} N - mg\cos\theta &= m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) \\ &= -mL\omega^2\big(s + (1-s)\big)\sin\theta\cos\theta = -mL\omega^2 \sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

由 $L\omega^2 = kg$，得

$$N = mg\cos\theta - mgk\sin\theta\cos\theta = mg(1 - k\sin\omega t)\cos\omega t,$$

與所求相符。

沿木板指向 A 方向。

$$\begin{aligned} F - mg\sin\theta &= m(-\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) \\ &= mL\omega^2\big(s\cos^2\theta - (1-s)\sin^2\theta\big) = mgk\big(s - \sin^2\theta\big), \end{aligned}$$

這裏用了 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。因此

$$F = mgsk + mg\sin\theta(1 - k\sin\theta) = mgsk + \underbrace{mg(1 - k\sin\theta)\cos\theta}_{N}\tan\theta,$$

即 $F = mgsk + N\tan\omega t$，與所求相符。留意只要 $N > 0$，F 便是正數，所以當 P 緊貼木板時，摩擦力總是沿木板向上作用。

第 (iv) 部分

記 $\mu = \tan\alpha$。當 $N > 0$ 時，質點留在 C 而不滑動，當且僅當 $|F| \le \mu N$；由於此時 $F > 0$，這等價於 $F/N \le \tan\alpha$。把第 (iii) 部分的結果除以 N，

$$\frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta)\cos\theta} + \tan\theta.$$

開始時，$\theta = 0$，所以 $N = mg > 0$ 且 $F/N = sk$。因此只要 $sk < \tan\alpha$，質點在開始時便不會滑動。

> **想一想** 為甚麼比值 F/N 必定會在 N 變為零之前達到 $\tan\alpha$？

現在假設 $sk < \tan\alpha$。因子 $\cos\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時為零；若 $k > 1$，因子 $1 - k\sin\theta$ 會更早在 $\sin\theta = 1/k$ 時變為零。設 θ_0 為首個使 $N = 0$ 的角度（即 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\arcsin(1/k)$）。在 $0 \le \theta < \theta_0$ 上，$N > 0$，且 F/N 連續（continuous）。當 $\theta \to \theta_0^-$ 時，分母 $(1 - k\sin\theta)\cos\theta$ 經正值趨於 0，而分子 sk 是固定的正數，所以第一項趨於 $+\infty$（而 $\tan\theta$ 要麼有界，要麼同樣趨於 $+\infty$）。因此 $F/N \to +\infty$。

所以 F/N 由 $sk < \tan\alpha$ 開始，並在 N 降至零之前無界地增大。根據介值定理（intermediate value theorem），存在首個角度 $\theta_1 < \theta_0$ 使 $F/N = \tan\alpha$，質點就在此時開始滑動。這發生在 N 仍為正的角度，這就是第一個結論。

在這個角度，由於 $sk > 0$ 且 $(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1 > 0$，

$$\tan\alpha = \frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1} + \tan\theta_1 > \tan\theta_1.$$

α 和 θ_1 都在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 內，而 tan 在此區間上遞增，所以 $\theta_1 < \alpha$：開始滑動時，木板與水平面所成的角小於 α。這就是第二個結論。

第二個結論其實沒有看上去那麼出人意表。在固定木板上靜止的質點，恰好在木板傾角達到摩擦角（angle of friction）α 時滑動。這裏木板在加速，要帶動質點一同運動需要額外的力（即 $mgsk$ 項），因此摩擦力會更早支撐不住。

驗算

- 當 $t = 0$ 時，木板水平，質點的加速度為 $(-sL\omega^2, 0)$，方向水平。此時 $N = mg$，而 $F = msL\omega^2 = mgsk$ 應恰好提供這個加速度，結果確實如此。
- 若 $\omega \to 0$（從而 $k \to 0$），木板被非常緩慢地抬起；此時 $N \to mg\cos\theta$，$F \to$

$mg\sin\theta$，正是固定斜面上熟悉的平衡值，而滑動發生在 $\theta = \alpha$，即我們不等式的邊界。

- 數值上，取 $s = \frac{1}{2}$、$k = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = \frac{\pi}{4}$（所以 $sk = \frac{1}{4} < 1$），解 $F/N = 1$ 可知滑動發生在 $\theta \approx 0.545$ rad，約 31°，此時 $N \approx 0.63mg > 0$ 且 $\theta < 45°$。用電腦對數以千計隨機選取、滿足 $sk < \tan\alpha$ 的 s、k 和 α 進行檢驗，每次都發現滑動發生在小於 α 的角度，且 $N > 0$。

常見錯誤

- 把 θ 取為在 A 處而非 B 處的角：這樣正弦和餘弦會互換，便得不出題目給出的表達式。
- 沿水平和鉛垂方向分解，然後試圖解一對滿是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的聯立方程。沿木板及垂直於木板分解，能立即把 N 和 F 分開。
- 在第 (iv) 部分，只考慮 θ 趨近 $\frac{\pi}{2}$ 的情況，而忘記當 $k > 1$ 時，法向反作用力會更早在 $\sin\theta = 1/k$ 時變為零。

STEP 之外

這道題關乎運動參考系中的力：從木板的角度看，質點會感受到一個額外的「虛構」力（fictitious force），大小等於 $-m$ 乘以點 C 的加速度，而 $mgsk$ 項正是開始時的這個慣性力。在大學裏，這個概念會發展成加速參考系和轉動參考系的完整理論，包括離心力（centrifugal force）和科里奧利力（Coriolis force）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）討論了非慣性參考系，並附有大量例題。

詳細解答

STEP III 2025，第 11 題

概率與統計 • 最大值的分佈

STEP III 2025，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 12.25 節眾多之中的最大值中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/extremes.html

關鍵思路

當且僅當每一個 X_i 都不超過 y 時，X_i 之中最大者才不超過 y；而獨立性（independence）把這件事化為一個乘積。此後，整道題就是從 G 讀出分位數（quantile），再看看當 n 很大時它們會怎樣變化。真正起作用的只有一個近似：$\alpha^{1/n} = \mathrm{e}^{(\ln\alpha)/n} \approx 1 + \frac{\ln\alpha}{n}$，因為當 n 很大時，$(\ln\alpha)/n$ 很小。

解答

第 (i) 部分

對於 $x \geq 0$，

$$F(x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

由於 $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$，事件 $\{Y \leq y\}$ 與「對每一個 i 都有 $X_i \leq y$」這個事件相同。各 X_i 互相獨立，所以對於 $y \geq 0$，

$$G(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X_1 \leq y) \cdots \mathrm{P}(X_n \leq y) = F(y)^n = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right)^n,$$

即為所求。

第 (ii) 部分

Y 是連續隨機變量（continuous random variable），所以 $\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(Y \le y) = G(y)$。因此 $L(\alpha)$ 須滿足的條件是 $G(L(\alpha)) = \alpha$：

$$\begin{aligned}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda L}\right)^n = \alpha &\iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda L} = \alpha^{1/n} \qquad \text{（取正的 } n \text{ 次方根）} \\ &\iff \mathrm{e}^{-\lambda L} = 1 - \alpha^{1/n} \\ &\iff L(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(1 - \alpha^{1/n}\right).\end{aligned}$$

這個對數（logarithm）有定義，因為由 $0 < \alpha < 1$ 可得 $0 < \alpha^{1/n} < 1$。

至於 $U(\alpha)$，條件 $\mathrm{P}(Y > U) = \alpha$ 即 $G(U) = 1 - \alpha$，所以把 α 換成 $1 - \alpha$ 再重複同樣的步驟，便得

$$U(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(1 - (1-\alpha)^{1/n}\right).$$

由於 $\alpha \le \frac{1}{2} \le 1 - \alpha$，而 G 是遞增函數，所以 $L(\alpha) \le U(\alpha)$，且只有當 $\alpha = \frac{1}{2}$ 時才取等號。

第 (iii) 部分

寫 $\alpha^{1/n} = \mathrm{e}^{(\ln\alpha)/n}$。當 α 固定而 n 很大時，$t = (\ln\alpha)/n$ 很小，所以由 $\mathrm{e}^t \approx 1 + t$ 得

$$1 - \alpha^{1/n} \approx -\frac{\ln\alpha}{n} = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

留意這是正數，因為 $\alpha < 1$。代入第 (ii) 部分的結果，

$$\lambda L(\alpha) = -\ln\left(1 - \alpha^{1/n}\right) \approx -\ln\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\alpha}\right) = \ln(n) - \ln\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right).$$

> **想一想** 對一個近似值取對數，是否安全？$1 - \alpha^{1/n}$ 本身非常小，所以 $1 - \alpha^{1/n}$ 的誤差相對於它本身可能很大。

關鍵在於**相對誤差**（relative error）。設 $t = (\ln\alpha)/n$，則 $1 - \mathrm{e}^t = -t\,(1 + \frac{t}{2} + \cdots)$，所以準確值與近似值之比是 $1 + O(1/n)$。取對數後，$\lambda L(\alpha)$ 的誤差是 $\ln(1 + O(1/n))$，它趨於 0。所以這個近似不僅在 n 很大時很好；兩邊之差確實趨於零。

第 (iv) 部分

Y 的中位數（median）m 滿足 $G(m) = \frac{1}{2}$，所以 $m = L(\frac{1}{2})$（它同時也是 $U(\frac{1}{2})$）。由第 (iii) 部分，

$$\lambda m \approx \ln n - \ln(\ln 2).$$

由於 $\ln(\ln 2)$ 是一個固定的數（約為 -0.37），而 $\ln n \to \infty$，所以當 n 增大時，中位數趨於無限大。

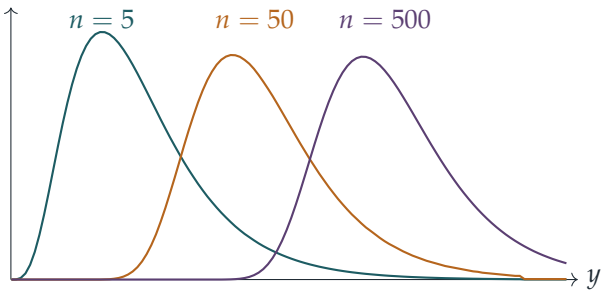
至於 $U(\alpha)$，在第 (iii) 部分中把 α 換成 $1-\alpha$：

$$\lambda U(\alpha) \approx \ln n - \ln\left(\ln \frac{1}{1-\alpha}\right).$$

兩式相減，$\ln n$ 項互相抵消：

$$U(\alpha) - L(\alpha) \approx \frac{1}{\lambda}\left[\ln\left(\ln \frac{1}{\alpha}\right) - \ln\left(\ln \frac{1}{1-\alpha}\right)\right].$$

由於兩個近似的誤差都趨於零（正如上面方框所述），區間寬度趨於這個值，它取決於 α 和 λ，但與 n 無關。所以當 n 增大時，Y 的分佈像 $\frac{1}{\lambda}\ln n$ 那樣往無限大漂移，但並不會擴散開來。



上圖顯示 $\lambda = 1$ 時 Y 的概率密度（density）：n 每增大十倍，曲線便向右移約 $\ln 10 \approx 2.3$，而曲線的形狀則趨於穩定。

第 (v) 部分

取 $\alpha = 0.05$。那麼

$$\mathrm{P}\big(L(\alpha) \le Y \le U(\alpha)\big) = 1 - \mathrm{P}(Y < L) - \mathrm{P}(Y > U) = 1 - 2(0.05) = 0.9,$$

所以無論 n 是多少，Y 落在區間 $[L(0.05), U(0.05)]$ 內的概率恰好是 0.9。當 n 很大時，由第 (iv) 部分，這個區間的寬度約為

$$\frac{1}{\lambda}\left[\ln(\ln 20) - \ln\left(\ln \frac{1}{0.95}\right)\right].$$

現在運用題目給出的兩個事實：

- $\mathrm{e}^3 \approx 20$，所以 $\ln 20 \approx 3$，而 $\ln(\ln 20) \approx \ln 3 \approx 1.1$；
- 利用 $\ln(1+t) \approx t$（取 $t = -0.05$），得 $\ln \frac{1}{0.95} = -\ln(1-0.05) \approx 0.05 = \frac{1}{20}$；所以 $\ln\left(\ln \frac{1}{0.95}\right) \approx \ln \frac{1}{20} = -\ln 20 \approx -3$。

因此寬度約為

$$\frac{1}{\lambda}(\ln 3 + 3) \approx \frac{4.1}{\lambda} \approx 4\lambda^{-1},$$

即為所求。

驗算

- 在第 (ii) 部分中，把 $L(\alpha)$ 代回 G，得 $\left(1-(1-\alpha^{1/n})\right)^n = \alpha$，完全吻合。
- 當 $\alpha = 0.05$ 而 $n = 10^4$ 時，$\lambda L(\alpha)$ 的準確值是 8.11330，而近似式 $\ln n - \ln\ln 20$ 給出 8.11315；當 $n = 10$ 時，兩者分別是 1.35 和 1.21，可見「足夠大」這個條件確實重要。
- 第 (v) 部分中寬度的準確極限值是 $4.067/\lambda$，與 $4/\lambda$ 相當接近。以電腦模擬五個指數分佈隨機變量的最大值，結果亦與 $G(y)$ 吻合至三位小數。

常見錯誤

- 寫成 $G(y) = 1-(\mathrm{e}^{-\lambda y})^n$：這是最小值的累積分佈函數（cumulative distribution function），而不是最大值的。
- 把 $\mathrm{P}(Y > U) = \alpha$ 寫成 $G(U) = \alpha$，而不是 $G(U) = 1-\alpha$。
- 在第 (v) 部分中選取 $\alpha = 0.1$：區間兩端的尾部各應留下 0.05，而不是 0.1。

STEP 之外

這是初窺極值理論（extreme value theory）。第 (iii) 部分其實是在說明 $\lambda Y - \ln n$ 有一個極限分佈（limiting distribution），且 $\mathrm{P}(\lambda Y - \ln n \le x) \to \exp(-\mathrm{e}^{-x})$：這就是甘貝爾分佈（Gumbel distribution），可用來為破紀錄的洪水、一年中最強的陣風以及最大額的保險索償建立模型。一條了不起的定理指出，經適當縮放的最大值只可能收斂到三個分佈族之一。Blitzstein 和 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）討論了順序統計量（order statistics），是入門的好起點。

詳細解答

STEP III 2025，第 12 題

概率與統計 • 遞歸隨機變量

STEP III 2025，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分其實只是把一個二重和(double sum)用兩種方式寫出來：兩邊都是把 $\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s)$ 在同一組數對 (r,s) 上加起來，一邊逐行計算，另一邊逐列計算。在第 (ii) 部分，以前一個值 X_{n-1} 為條件（conditioning），可把每個概率 $\mathrm{P}(X_n = r)$ 寫成恰好是 (i) 左邊那種形式的和。交換求和次序後，$\mathrm{E}(X_n)$ 就變成一個能以 $\mathrm{E}(X_{n-1})$ 表示的式子。

解答

第 (i) 部分

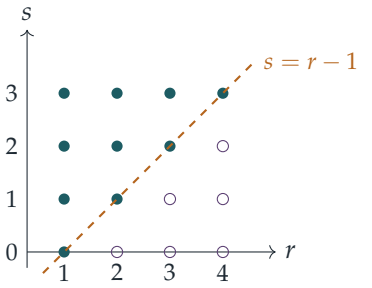
把括號展開，左邊是

$$\sum_{r=1}^{m+1}\ \sum_{s=r-1}^{m} \mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s),$$

即 $\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s)$ 在所有滿足

$$1 \le r \le m+1 \quad \text{及} \quad r-1 \le s \le m.$$

的整數對 (r,s) 上的和。我們先固定 s 來描述同一組數對。這些條件迫使 $0 \le s \le m$（因為 $s \ge r-1 \ge 0$），而對於這樣的某個 s，容許的 r 是滿足 $1 \le r$ 及 $r \le s+1$ 的那些；注意 $s+1 \le m+1$，所以界限 $r \le m+1$ 自動成立。反過來，任何滿足 $0 \le s \le m$ 及 $1 \le r \le s+1$ 的數對都符合原來的條件。下圖顯示 $m = 3$ 時的三角形數對區域。



按列求和（固定 r）得到左邊；按行求和（固定 s）則得到

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{r=1}^{s+1} \mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s) = \sum_{s=0}^{m}\Big(\mathrm{g}(s)\sum_{r=1}^{s+1}\mathrm{f}(r)\Big),$$

這正是右邊，得證。由於這些都是有限和，重新排列求和次序總是容許的。

第 (ii)(a) 部分

X_1 取 0 或 1 的機會均等，所以 $\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}$。

至於 X_2，以 X_1 為條件。若 $X_1 = 0$，則 X_2 在 $\{0,1\}$ 上均勻分佈（uniform）；若 $X_1 = 1$，則 X_2 在 $\{0,1,2\}$ 上均勻分佈。由全概率定律（law of total probability），

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_2 = 0) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12},\\
\mathrm{P}(X_2 = 1) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12},\\
\mathrm{P}(X_2 = 2) &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6},
\end{aligned}$$

如題所求（三者之和為 1，這是個有用的驗算）。因此

$$\mathrm{E}(X_2) = 0\cdot\tfrac{5}{12} + 1\cdot\tfrac{5}{12} + 2\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{4}.$$

第 (ii)(b) 部分

由歸納法（induction），X_{n-1} 的取值在 $\{0,1,\ldots,n-1\}$ 之中（每一步把可能的最大值提高一）。已知 $X_{n-1} = s$ 時，X_n 在 $s+2$ 個值 $0,1,\ldots,s+1$ 上均勻分佈，所以

$$\mathrm{P}(X_n = r \mid X_{n-1} = s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s+2}, & 0 \le r \le s+1,\\[2mm] 0, & r > s+1. \end{cases}$$

值 $r = 0$ 總是可能出現的，所以全概率定律給出

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\mathrm{P}(X_{n-1} = s)}{s+2}.$$

對於 $1 \le r \le n$，只有滿足 $s+1 \ge r$，即 $s \ge r-1$ 的那些 s 才有貢獻：

$$\mathrm{P}(X_n = r) = \sum_{s=r-1}^{n-1} \frac{\mathrm{P}(X_{n-1}=s)}{s+2}, \qquad r = 1, 2, \ldots, n.$$

（當 $r=1$ 時，這與 $r=0$ 的和相同，所以對每個 $n \ge 1$ 都有 $\mathrm{P}(X_n=0) = \mathrm{P}(X_n=1)$，與 (a) 中兩個 $\frac{5}{12}$ 吻合。）

第 (ii)(c) 部分

記 $p_s = \mathrm{P}(X_{n-1}=s)$。$r=0$ 的項對期望值（expectation）沒有貢獻，所以由 (b)，

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{r=1}^{n} r\,\mathrm{P}(X_n=r) = \sum_{r=1}^{n}\Big(r \sum_{s=r-1}^{n-1} \frac{p_s}{s+2}\Big).$$

? **想一想** 第 (i) 部分在這裏如何應用？

這就是 (i) 的左邊，其中 $m = n-1$（因 $n \ge 1$，這是容許的）、$\mathrm{f}(r) = r$ 及 $\mathrm{g}(s) = p_s/(s+2)$。交換求和次序，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_n) &= \sum_{s=0}^{n-1}\Big(\frac{p_s}{s+2}\sum_{r=1}^{s+1} r\Big) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{p_s}{s+2}\cdot\frac{(s+1)(s+2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\,p_s = \frac{1}{2}\Big(\sum_{s=0}^{n-1} p_s + \sum_{s=0}^{n-1} s\,p_s\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(1 + \mathrm{E}(X_{n-1})\big),
\end{aligned}$$

這裏用了 $\sum p_s = 1$。這就是所求的結果。

直觀而言：已知 $X_{n-1}=s$ 時，在 $\{0,\ldots,s+1\}$ 上均勻分佈的變量的平均值是 $\frac{1}{2}(s+1)$，所以這其實是喬裝了的塔性質（tower law）。

要解這個遞推關係（recurrence relation），記 $e_n = \mathrm{E}(X_n)$。兩邊同時減去 1，

$$e_n - 1 = \tfrac{1}{2}\,(e_{n-1} - 1),$$

所以 $e_n - 1$ 每一步減半。由於 $e_0 = 0$，得 $e_n - 1 = -\big(\frac{1}{2}\big)^n$，即

$$\mathrm{E}(X_n) = 1 - \frac{1}{2^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

驗算

此公式給出 $\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}$ 及 $\mathrm{E}(X_2) = \frac{3}{4}$，與 (a) 一致。逐步計算 X_n 的精確分佈直至 $n = 15$，證實了 (b) 中的表達式及 $\mathrm{E}(X_n) = 1 - 2^{-n}$；例如 $\mathrm{E}(X_5) = \frac{31}{32} \approx 0.969$，而以電腦模擬 200 000 次得到 0.967。當 $n \to \infty$ 時，平均值趨向 1，這是合理的：每一步都把平均值向 1 拉近一半距離。

常見錯誤

- 把 $\mathrm{P}(X_n = r)$ 的和從 $s = r$ 而非 $s = r - 1$ 開始：由於 X_n 最大可達 $X_{n-1} + 1$，值 r 可以從 $s = r - 1$ 到達。
- 在 (c) 中交換次序時弄錯上下限：交換後，r 由 1 取到 $s + 1$，得 $\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$，而因子 $s + 2$ 會整齊地約去。
- 以 e_1 作為起始值解遞推關係，卻寫成 $1 - 2^{-(n-1)}$；應以 $e_1 = \frac{1}{2}$ 核對。

STEP 之外

這裏的過程是一條馬爾可夫鏈（Markov chain）：X_n 的分佈只取決於 X_{n-1}，而 (b) 就是把概率向量（probability vector）乘以轉移矩陣（transition matrix）的一步。(c) 中的捷徑是全期望定律（law of total expectation），$\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1})\big)$，它能把許多這類問題化為線性遞推關係。這兩個概念在 Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）中都有進一步發展。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2025 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。