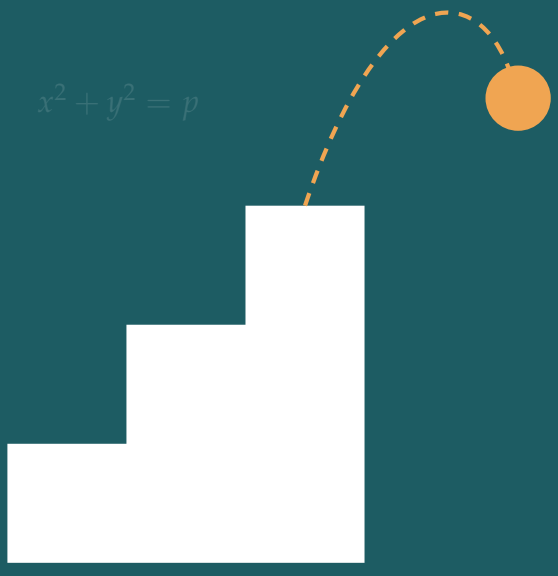
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP II 及 III

2024 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP II 及 III

2024 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2024 年詳細解答

2024 年 STEP 試卷（STEP II 及 III）全部 24 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP II

第 1 題 連續整數之和 純數學 . . . 3

第 2 題 級數與積分 純數學 . . . 7

第 3 題 半角正切代換 純數學 . . . 11

第 4 題 向量與角平分線 純數學 . . . 15

第 5 題 值域與丟番圖方程 純數學 . . . 19

第 6 題 二項式級數的係數 純數學 . . . 23

第 7 題 曲線描繪 純數學 . . . 27

第 8 題 算術幾何平均 純數學 . . . 32

第 9 題 拋體運動 力學 . . . 36

第 10 題 加速楔上的摩擦力 力學 . . . 40

第 11 題 組檢測的期望值 概率與統計 . . . 44

第 12 題 離散順序統計量 概率與統計 . . . 48

STEP III

第 1 題 裂項相消級數 純數學 . . . 52

第 2 題 不等式與絕對值 純數學 . . . 56

第 3 題 單調函數與導數 純數學 . . . 61

第 4 題 拋物線的切線 純數學 . . . 65

第 5 題 矩陣微分方程 純數學 . . . 69

第 6 題 線性微分方程 純數學 . . . 73

第 7 題 e^2 的無理性 純數學 . . . 77

第 8 題 相交圓錐曲線 純數學 . . . 81

第 9 題 斜碰撞 力學 . . . 85

第 10 題 傾倒與滑動 力學 . . . 90

第 11 題項分佈的期望值 概率與統計 95
第 12 幾何概率 概率與統計 98

詳細解答

STEP II 2024，第 1 題

純數學 • 連續整數之和

> **STEP II 2024，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

等式兩邊都是算術級數（arithmetic series），所以各自等於（項數）×（平均項）。令兩者相等，便得到 n、k 與 c 之間的一條二次關係式，而題目餘下部分就是針對這條關係式的數論（number theory）問題。固定 k 後，很容易解出 c，再由奇偶性（parity）或餘數判斷 c 何時是正整數。若改為固定 $c=1$，便得到一條佩爾（Pell）型方程，而 (iv)(b) 中的映射正是由舊解產生新解的標準方法。

解答

第 (i) 部分

由 c 開始往上的 $n+k$ 個整數是 $c, c+1, \ldots, c+n+k-1$。它們的和是

$$S_1 = (n+k)c + \frac{(n+k)(n+k-1)}{2}.$$

接下來的 n 個整數是 $c+n+k, \ldots, c+2n+k-1$，其和為

$$S_2 = n(c+n+k) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

把兩個和都乘以二並展開，

$$2S_1 = 2nc + 2kc + n^2 + 2nk + k^2 - n - k,$$
$$2S_2 = 2nc + 2n^2 + 2nk + n^2 - n.$$

相減得 $2S_1 - 2S_2 = 2kc + k^2 - k - 2n^2$。因此

$$S_1 = S_2 \iff 2kc + k^2 - k = 2n^2 \iff 2n^2 + k = 2ck + k^2.$$

每一步都是可逆的（我們只是展開、乘以二和移項），所以兩個和相等當且僅當 $2n^2+k=2ck+k^2$，得證。

第 (ii) 部分

(a) 當 $k=1$ 時，條件為 $2n^2+1=2c+1$，所以 $c=n^2$。對每個 n 這都是正整數，因此每一個正整數 n 都可以，且 $c=n^2$。（例如 $n=2$：$4+5+6=7+8$。）

(b) 當 $k=2$ 時，條件為 $2n^2+2=4c+4$，即

$$n^2=2c+1, \qquad c=\frac{n^2-1}{2}.$$

要 c 是整數，n^2 必須是奇數，所以 n 必須是奇數。要 c 是正數，需要 $n^2>1$，這就排除了 $n=1$。反過來，每個奇數 $n\geq 3$ 都給出正整數 c。所以可能的值是

$$n\in\{3,5,7,\dots\}, \qquad c=\tfrac{1}{2}(n^2-1).$$

$n=3$、$c=4$ 的情況就是等式 $4+5+6+7+8=9+10+11$。

第 (iii) 部分

當 $k=4$ 時，條件為 $2n^2+4=8c+16$，即

$$n^2=4c+6=4(c+1)+2.$$

所以 n^2 除以 4 的餘數將會是 2。但平方數除以 4 的餘數只能是 0 或 1：若 $n=2m$，則 $n^2=4m^2$；若 $n=2m+1$，則 $n^2=4(m^2+m)+1$。所以沒有解。

第 (iv) 部分

當 $c=1$ 時，條件變成 $2n^2+k=2k+k^2$，即

$$2n^2=k(k+1). \qquad (*)$$

換句話說 $n^2=\frac{1}{2}k(k+1)$：我們要找同時是完全平方數（perfect square）的三角形數（triangular number）。

(a) 嘗試較小的 k：$k=1$ 給出 $2n^2=2$，所以 $n=1$；接着 $k=2,\dots,7$ 給出 $k(k+1)/2=3,6,10,15,21,28$，都不是平方數；而 $k=8$ 給出 $2n^2=72$，所以 $n=6$。因此兩個可能情況是

$$k=1,\ n=1 \qquad \text{和} \qquad k=8,\ n=6.$$

（驗證第二個：$1+2+\cdots+14=105$ 及 $15+16+\cdots+20=105$。）

(b) 設 $2N^2 = K^2 + K$。令 $N' = 3N + 2K + 1$ 及 $K' = 4N + 3K + 1$。則

$$\begin{aligned} 2N'^2 &= 2(9N^2 + 4K^2 + 1 + 12NK + 6N + 4K) \\ &= 18N^2 + 8K^2 + 24NK + 12N + 8K + 2, \\ K'^2 + K' &= (16N^2 + 9K^2 + 1 + 24NK + 8N + 6K) + (4N + 3K + 1) \\ &= 16N^2 + 9K^2 + 24NK + 12N + 9K + 2. \end{aligned}$$

相減，

$$2N'^2 - (K'^2 + K') = 2N^2 - K^2 - K = 0,$$

這裏用了假設。所以 $2N'^2 = K'(K' + 1)$。由於 N 和 K 是正整數，N' 和 K' 也是正整數；由 $(*)$ 及第 (i) 部分，N' 是 n 的一個可能值，對應的 $k = K'$。

想一想 這些古怪的公式從何而來？

把 $(*)$ 乘以 4 再加 1：它變成 $(2k+1)^2 - 8n^2 = 1$。令 $x = 2k + 1$ 及 $y = n$，這就是佩爾方程 $x^2 - 8y^2 = 1$，其所有解可以由 $x + y\sqrt{8}$ 乘以最小解 $3 + \sqrt{8}$ 逐一產生。寫出 $(x + y\sqrt{8})(3 + \sqrt{8}) = (3x + 8y) + (x + 3y)\sqrt{8}$，再轉回 k 和 n，便恰好得到 $N' = 3N + 2K + 1$ 及 $2K' + 1 = 3(2K + 1) + 8N$，即 $K' = 4N + 3K + 1$。

(c) 把映射應用於 $(N, K) = (1, 1)$，只會得到 $N' = 6$、$K' = 8$，即 (a) 中的第二個解。把它應用於 $(N, K) = (6, 8)$：

$$N' = 18 + 16 + 1 = 35, \qquad K' = 24 + 24 + 1 = 49,$$

再把它應用於 $(35, 49)$：

$$N' = 105 + 98 + 1 = 204, \qquad K' = 140 + 147 + 1 = 288.$$

所以另外兩個解是

$$k = 49,\ n = 35 \qquad \text{和} \qquad k = 288,\ n = 204.$$

確實 $2 \cdot 35^2 = 2450 = 49 \cdot 50$ 及 $2 \cdot 204^2 = 83232 = 288 \cdot 289$。

驗算

- 開首的例子是 $n = 3$、$k = 2$、$c = 4$：$2 \cdot 9 + 2 = 20 = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 4$，所以它滿足 (i) 的關係式，並符合 (ii)(b)，其中 $c = \frac{1}{2}(9 - 1)$。
- 用電腦搜尋所有 $n, k < 40$ 及 $c < 200$，證實兩個和相等恰好當 $2n^2 + k = 2ck + k^2$；另以 $c = 1$ 及 $n, k < 400$ 搜尋，只找到 $(k, n) = (1, 1), (8, 6), (49, 35), (288, 204)$，與 (iv) 吻合。

- 在 (iv)(b) 中，注意由 (N, K) 到 (N', K') 的一步對任何 N、K 都保持 $2N^2 - K^2 - K$ 這個量不變，這是用小數字快速檢查代數運算的方法，例如 $N = K = 0$：此時 $N' = K' = 1$，兩個值都是 0。

常見錯誤

- 在 (ii)(b) 中把 $n = 1$ 也包括在內：它給出 $c = 0$，並不是正整數。
- 在 (i) 中數錯第二組由哪裏開始：它由 $c + n + k$ 開始，而不是 $c + n + k + 1$。
- 在 (iv)(c) 中再次給出 $k = 8$、$n = 6$：這是映射的第一個輸出，但在 (a) 已經找到。

STEP 之外

方程 $x^2 - 8y^2 = 1$ 是一條佩爾方程；對任何非平方數 d，$x^2 - dy^2 = 1$ 的所有解都來自單一基本解（fundamental solution）的冪，透過 $x + y\sqrt{d}$ 這類數的乘法得出。這是初次窺見 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 這類環（ring）中的單位（unit），而這是代數數論（algebraic number theory）的核心課題。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）透過連分數（continued fraction）處理佩爾方程。

詳細解答

STEP II 2024，第 2 題

純數學 • 級數與積分

STEP II 2024，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分把每個積分 $\int_0^1 x^m/(8+x^3)\,\mathrm{d}x$ 都化成一個級數（series），所以凡是由相同元素組成的級數，都是這些積分的組合。要求出第 (ii) 或 (iii) 部分的級數之和，可以把括號拆成形如 $1/(3k+m+1)$ 的項，再把對應的被積函數（integrand）合併成一個分式，然後積分。因式分解（factorisation）$8+x^3=(x+2)(x^2-2x+4)$ 正是令所得積分變得容易處理的關鍵。

解答

全題中記

$$I_m=\int_0^1 \frac{x^m}{8+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

第 (i) 部分

先提出因子 8，再對 $|u|<1$ 利用 $(1+u)^{-1}=\sum_{k\ge 0}(-1)^k u^k$，並取 $u=x^3/8$，得

$$(8+x^3)^{-1}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{x^3}{8}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k}}{8^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\,x^{3k}.$$

此式在 $|x^3/8|<1$，即 $|x|<2$ 時成立。

現在乘以 x^m，然後在 $[0,1]$ 上逐項（term by term）積分；這個區間位於成立範圍之內（而且題目已說明不必理會收斂（convergence）問題）：

$$I_m=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\int_0^1 x^{3k+m}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\cdot\frac{1}{3k+m+1},$$

這是因為當 $n = 3k + m \geq 0$ 時，$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = 1/(n+1)$。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

三個分母 $3k+3$、$3k+2$ 和 $3k+1$ 分別是 $m = 2, 1, 0$ 時的 $3k+m+1$。因此由第 (i) 部分，該級數等於

$$I_2 - 2I_1 + 4I_0 = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 4}{8 + x^3} \,\mathrm{d}x.$$

? **想一想** 為甚麼 $x^2 - 2x + 4$ 會跟某些東西約掉？

因為 $8 + x^3$ 是兩個立方數之和（sum of two cubes）：在 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 中取 $a = x$、$b = 2$，得

$$8 + x^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

因此被積函數化簡為 $\dfrac{1}{x+2}$，所以該級數等於 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+2} \,\mathrm{d}x$，即為所求。最後，

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2} \,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+2)\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \tfrac{3}{2}.$$

第 (iii) 部分

首先把括號按 k 拆成部分分式（partial fractions）。設 $2k+1 = \alpha(3k+2) + \beta(3k+1)$。代入 $k = -\frac{1}{3}$ 得 $\frac{1}{3} = \alpha$；代入 $k = -\frac{2}{3}$ 得 $-\frac{1}{3} = -\beta$，所以 $\beta = \frac{1}{3}$。因此

$$\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{24}{3k+1} + \frac{24}{3k+2},$$

而由第 (i) 部分（取 $m = 0$ 及 $m = 1$），該級數等於

$$24I_0 + 24I_1 = \int_0^1 \frac{24(1+x)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \,\mathrm{d}x.$$

現在把這個被積函數拆成部分分式：

$$\frac{1+x}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4},$$

於是

$$1 + x = A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2).$$

代入 $x = -2$ 得 $-1 = 12A$，所以 $A = -\frac{1}{12}$。比較 x^2 的係數得 $0 = A + B$，所以 $B = \frac{1}{12}$。比較常數項得 $1 = 4A + 2C$，所以 $C = \frac{2}{3}$。（驗算 x 的係數：$-2A + 2B + C = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = 1$。）乘以 24，得

$$\begin{aligned}\frac{24(1+x)}{8+x^3} &= -\frac{2}{x+2} + \frac{2x+16}{x^2 - 2x + 4} \\ &= -\frac{2}{x+2} + \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 4} + \frac{18}{(x-1)^2 + 3},\end{aligned}$$

其中我們把二次式的導數 $2x-2$ 分拆出來，並對餘下部分配方（completing the square）。

我們把每一部分在 $[0,1]$ 上積分。

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{-2}{x+2}\,\mathrm{d}x &= -2\ln\tfrac{3}{2} = -2\ln 3 + 2\ln 2,\\
\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x &= \Big[\ln(x^2-2x+4)\Big]_0^1 = \ln\tfrac{3}{4} = \ln 3 - 2\ln 2,\\
\int_0^1 \frac{18}{(x-1)^2+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{18}{\sqrt{3}}\Big[\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1\\
&= 6\sqrt{3}\Big(0-\arctan\big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\big)\Big) = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \pi\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

最後一行用了 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+c^2} = \frac{1}{c}\arctan\frac{u}{c}$，其中 $u = x-1$、$c=\sqrt{3}$。把三部分相加，$\ln 2$ 的項互相抵消，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\left(\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)}\right) = \pi\sqrt{3}-\ln 3,$$

所以 $a=3$ 及 $b=3$。

驗算

- 這些級數收斂得非常快（每一項最多只有前一項的八分之一），所以取幾項已足以驗算。在第 (ii) 部分，級數首三項給出 $0.41667 - 0.01198 + 0.00084 \approx 0.40553$，而 $\ln\frac{3}{2}\approx 0.40547$。
- 在第 (iii) 部分，$\pi\sqrt{3}-\ln 3 \approx 5.4414 - 1.0986 = 4.3428$；用電腦把級數首 200 項相加，結果在小數點後十二位都吻合。即使只取 $k=0$ 那一項，也得 $\frac{1}{8}\cdot 36 = 4.5$，數量級正確。

常見錯誤

- 展開式寫成 8^{-k} 而不是 $8^{-(k+1)}$：一開始提出的因子 $\frac{1}{8}$ 不可遺漏。
- 把 $\frac{1}{3k+3}$ 對應到 I_3 而不是 I_2：分母是 $3k+m+1$，所以 m 比常數項小一。
- 忘記 $\arctan\big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\big)$ 是負數，以致 $\pi\sqrt{3}$ 那一項的正負號出錯。

STEP 之外

像第 (i) 部分那樣交換求和與積分的次序，在這裏是合理的，因為該冪級數（power series）在 $[0,1]$ 上一致收斂（converges uniformly）；何時可以這樣交換，是大學一年級

分析（analysis）課程的核心主題之一。同樣的方法可以像第 (iii) 部分那樣，準確求出 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$ 之和。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對一致收斂和逐項積分有細緻的講解。

詳細解答

STEP II 2024，第 3 題

純數學 • 半角正切代換

STEP II 2024，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分建立了一個對照關係：圓上角度為 ϕ 的點，對應從 N 經過該點的直線與 y 軸相交處的高度 $\tan\frac{1}{2}\phi$。把這個對應反過來用，使每個高度 q 都恰好對應圓上的一個點。這樣，題目中每個關於 q 的函數都會變成一條關於 $\frac{1}{2}\theta$ 的三角恆等式，我們便可以直接看出角度 θ 的變化，從而得知點的變化。

解答

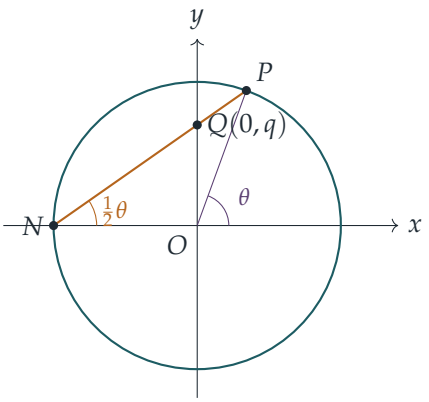
第 (i) 部分

由於 $P \neq N$，我們有 $\cos\theta \neq -1$，所以直線 NP 不是鉛垂線。它的斜率（gradient）是

$$\frac{\sin\theta - 0}{\cos\theta - (-1)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

這裏用了倍角公式（double-angle formulas）$\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ 和 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$（而且 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$，因為 $|\frac{1}{2}\theta| < \frac{1}{2}\pi$）。該直線通過 $(-1,0)$，所以它是 $y = (x+1)\tan\frac{1}{2}\theta$；代入 $x=0$ 便得 $q = \tan\frac{1}{2}\theta$，即所求。

從幾何角度看，這就是圓周角（angle at the circumference）：由於 P 在圓心所對的角為 θ，弦 NP 在 N 處與 x 軸所成的角為 $\frac{1}{2}\theta$。



反過來：由高度得出點

我們會不斷用到逆命題（converse）。給定任意實數 q，通過 N 和 $(0,q)$ 的直線是 $y = q(x+1)$。代入 $x^2+y^2=1$：

$$x^2 - 1 + q^2(x+1)^2 = 0 \iff (x+1)\left[(1+q^2)x - (1-q^2)\right] = 0.$$

根 $x=-1$ 對應 N，所以另一個交點是

$$\left(\frac{1-q^2}{1+q^2},\ \frac{2q}{1+q^2}\right).$$

若 $q = \tan\frac{1}{2}\phi$，則由 t 公式（t-formulas）可知此點為 $(\cos\phi, \sin\phi)$。由於 $\phi \mapsto \tan\frac{1}{2}\phi$ 是從 $(-\pi,\pi)$ 到 $\mathbb{R}$ 的雙射（bijection），我們得到以下結果。

對照表。若對任何角 ϕ（不一定在 $(-\pi,\pi)$ 內）有 $\tan\frac{1}{2}\phi = q$，則從 N 經過 $(0,q)$ 的直線與圓的另一個交點為 $(\cos\phi, \sin\phi)$。

這對每個 ϕ 都成立，因為把 ϕ 換成 $\phi \pm 2\pi$ 既不改變 $\tan\frac{1}{2}\phi$（它作為 $\frac{1}{2}\phi$ 的函數，週期為 π），也不改變該點。

第 (ii) 部分

(a) 由於 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$，由和角公式（addition formula）得

$$\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\pi\right) = \frac{\tan\frac{1}{2}\theta + 1}{1 - \tan\frac{1}{2}\theta} = \frac{1+q}{1-q} = \mathrm{f}_1(q),$$

這就是 $\tan\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\pi\right)$，即所求。條件 $q \neq 1$ 意味着 $\theta \neq \frac{1}{2}\pi$，所以分母不為零。

(b) 由 (a)，Q_1 的高度是 $\tan\frac{1}{2}\phi$，其中 $\phi = \theta + \frac{1}{2}\pi$。由對照表，$P_1 = \left(\cos(\theta + \frac{1}{2}\pi), \sin(\theta + \frac{1}{2}\pi)\right)$。所以

P_1 是P 的像，變換為繞O 逆時針旋轉（rotation）$\frac{1}{2}\pi$.

（被排除的值 $q = 1$ 對應 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，這正是唯一一個在此旋轉下像為 N 本身的點。）

第 (iii) 部分

(a) P_2 是角度為 $\theta + \frac{1}{3}\pi$ 的點，所以應用第 (i) 部分（如有需要，先把角度化到 $(-\pi, \pi)$ 之內，這不會改變半角的 tan 值），並利用 $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}$：

$$\mathrm{f}_2(q) = \tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{6}\pi\right) = \frac{q + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{q}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}q + 1}{\sqrt{3} - q}.$$

條件 $q \neq \sqrt{3}$ 即 $\theta \neq \frac{2}{3}\pi$，這恰好是 P_2 會等於 N、以致直線 NP_2 不存在的情況。

(b) 這次把 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ 用在差角公式上：

$$\mathrm{f}_3(q) = \frac{1-q}{1+q} = \frac{\tan\frac{1}{4}\pi - \tan\frac{1}{2}\theta}{1 + \tan\frac{1}{4}\pi\tan\frac{1}{2}\theta} = \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\theta\right) = \tan\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \theta\right).$$

由對照表，P_3 是角度為 $\frac{1}{2}\pi - \theta$ 的點，即 $(\sin\theta, \cos\theta)$。P 的坐標互換了，所以

$$P_3 \text{ 是}P \text{ 的反射（reflection），鏡線為} y = x.$$

(c)

> **想一想** f_2^{-1} 對角度做了甚麼？

由 (a)，對每個角 ϕ，f_2 都把 $\tan\frac{1}{2}\phi$ 映射到 $\tan\frac{1}{2}(\phi + \frac{1}{3}\pi)$（計算過程從未用到 $\phi = \theta$）。因此 $\mathrm{f}_2\big(\tan\frac{1}{2}(\psi - \frac{1}{3}\pi)\big) = \tan\frac{1}{2}\psi$；又由於 f_2 是一對一（one-to-one）的（解 $s = \mathrm{f}_2(q)$ 得唯一的 $q = \frac{\sqrt{3}s-1}{s+\sqrt{3}}$，其中 $s \neq -\sqrt{3}$），

$$\mathrm{f}_2^{-1}\big(\tan\tfrac{1}{2}\psi\big) = \tan\tfrac{1}{2}\left(\psi - \tfrac{1}{3}\pi\right).$$

所以 f_2^{-1} 把角度轉回 $\frac{1}{3}\pi$。

現在逐步追蹤角度經過這三個步驟的變化。由於 $0 < q < 1$，我們有 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$。

- f_2：角度 $\theta + \frac{1}{3}\pi \in (\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$。此時 $\mathrm{f}_2(q) > 0$，所以可以應用 f_3。
- f_3：角度 $\frac{1}{2}\pi - (\theta + \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{6}\pi - \theta \in (-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi)$。這不是 $-\frac{2}{3}\pi$，所以高度不是 $-\sqrt{3}$，可以應用 f_2^{-1}。
- f_2^{-1}：角度 $\frac{1}{6}\pi - \theta - \frac{1}{3}\pi = -\theta - \frac{1}{6}\pi$。

所以 $\mathrm{f}_4(q) = \tan\frac{1}{2}\big(-\theta - \frac{1}{6}\pi\big)$，而由對照表，$P_4$ 是角度為 $-\frac{1}{6}\pi - \theta$ 的點。

關於通過 O、角度為 α 的直線作反射，會把角度為 θ 的點映射到角度為 $2\alpha-\theta$ 的點（鏡線平分這兩個方向）。這裏 $2\alpha=-\frac{1}{6}\pi$，所以

$$P_4 \text{ 是}P \text{ 的反射，鏡線通過}O\text{，其傾角為 } -\tfrac{1}{12}\pi\text{(從正}x\text{ 軸量起)，}$$

即直線 $y=-\tan\frac{1}{12}\pi\,x=-(2-\sqrt{3})\,x$。

這是合理的：先旋轉 $\frac{1}{3}\pi$，再關於 $y=x$ 反射，然後轉回去，等同於關於「把鏡線 $y=x$ 轉回 $\frac{1}{3}\pi$」後所得的直線作反射，而 $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\pi=-\frac{1}{12}\pi$。明確地寫出來，設 $t=\tan\frac{1}{12}\pi=2-\sqrt{3}$，

$$\mathrm{f}_4(q)=-\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta+\tfrac{1}{12}\pi\right)=-\frac{q+2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})q}.$$

驗算

- 在 (iii)(b) 中取 $\theta=\frac{1}{2}\pi$：$P=(0,1)$，$q=1$，$\mathrm{f}_3(1)=0$，所以 $Q_3=O$ 而 $P_3=(1,0)$，這確實是 $(0,1)$ 關於 $y=x$ 的反射。
- 對 (c) 取 $q=\frac{1}{2}$：$\mathrm{f}_2(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}\approx 1.5146$，接着 $\mathrm{f}_3\approx -0.2046$，然後 $\mathrm{f}_2^{-1}\approx -0.8868$，與封閉形式 $-\frac{\frac{1}{2}+2-\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})}\approx -0.8868$ 吻合。
- 用電腦對 100 000 個隨機點 P 進行檢驗，在捨入誤差範圍內確認了以上每一個關係（旋轉 $\frac{1}{2}\pi$、f_2 的公式、關於 $y=x$ 的反射，以及關於傾角為 $-\frac{1}{12}\pi$ 的直線的反射）。

常見錯誤

- 斷言 P_1 位於角度 $\theta+\frac{1}{2}\pi$，卻沒有留意這個角度可能落在 $(-\pi,\pi)$ 之外；這之所以無礙，只是因為當 ϕ 改變 2π 時，$\tan\frac{1}{2}\phi$ 和該點都會重複。
- 在 (c) 中，把 f_2^{-1} 的旋轉方向弄反了（再加一次 $\frac{1}{3}\pi$），得出角度 $\frac{1}{2}\pi-\theta$，因而錯誤地令 P_4 與 P_3 相同。

STEP 之外

把角度為 θ 的點映射到 $q=\tan\frac{1}{2}\theta$ 的映射，就是把圓投影到一條直線上的球極投影（stereographic projection），而函數 f_1、f_2、f_3 都是莫比烏斯變換（Möbius transformations）$q\mapsto\frac{aq+b}{cq+d}$。圓的每一個旋轉和反射都會變成直線上的這類變換，而對稱變換的複合則對應 2×2 矩陣（matrices）$\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ 的乘法。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）把這幅圖景發展得非常精彩，並將其推廣到黎曼球面（Riemann sphere）。

詳細解答

STEP II 2024，第 4 題

純數學 • 向量與角平分線

STEP II 2024，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

把所有向量都縮放成單位向量（unit vector）。若 $\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\hat{\mathbf{y}}$ 分別是沿 OX 和 OY 方向的單位向量，那麼 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ 就是一個菱形（rhombus）的對角線，而菱形的對角線平分（bisect）其所在的角。題目給出的 $\mathbf{b}$ 只不過是 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ 的正數倍，所以每個平分向量（bisecting vector）都是兩個單位向量之和的正數倍。這樣一來，第 (ii) 部分的點積（dot product）就會化簡成同一個對稱的式子。

解答

全文以 θ 表示角 XOY。由於 O、X、Y 不共線（collinear），$0<\theta<\pi$，所以

$$-1<\cos\theta<1.$$

下面兩個嚴格不等式都會用到。

第 (i)(a) 部分

設 $\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ 及 $\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{y}/|\mathbf{y}|$，於是 $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\cos\theta$。那麼

$$\mathbf{b}=|\mathbf{x}|\mathbf{y}+|\mathbf{y}|\mathbf{x}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}).$$

這是 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{y}$ 的線性組合，所以它位於平面 XOY 上。它不是零向量，因為若 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{0}$，則 $\hat{\mathbf{y}}=-\hat{\mathbf{x}}$，那就會令 O、X、Y 共線。

現在比較兩個角。我們有

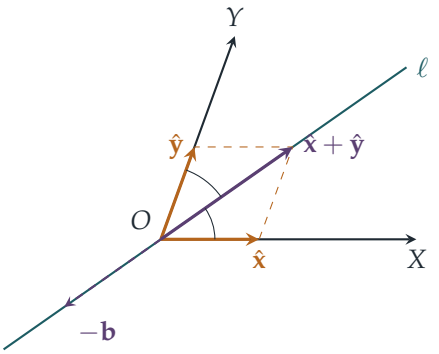
$$\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(1+\cos\theta)=\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}},$$

所以 $\mathbf{b}$ 與 $\overrightarrow{OX}$ 的夾角 α 以及 $\mathbf{b}$ 與 $\overrightarrow{OY}$ 的夾角 β 滿足

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|(1+\cos\theta)}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}}}{|\mathbf{b}|} = \cos\beta.$$

兩個角都在 $[0,\pi]$ 之內，而餘弦函數在這區間上是一一對應（one-to-one）的，所以 $\alpha = \beta$。此外 $1+\cos\theta > 0$，所以 $\cos\alpha > 0$，兩個角都小於 90°。因此 $\mathbf{b}$ 是角 XOY 的一個平分向量。

其他平分向量。



由於 $\hat{\mathbf{x}}$ 與 $\hat{\mathbf{y}}$ 長度相等，它們所張成的平行四邊形（parallelogram）是一個菱形，其對角線 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ 把角 XOY 分成相等的兩半。在平面 XOY 上，與 OX 和 OY 成等角的方向，只有沿這條對角線 ℓ 的兩個方向。若把一個向量從 ℓ 轉開，它就會靠近其中一邊而遠離另一邊，兩個角便不再相等。沿著 ℓ，$\mathbf{b}$ 的方向與每一邊所成的角為 $\frac{1}{2}\theta < 90°$；相反方向與每一邊所成的角為 $180° - \frac{1}{2}\theta > 90°$，因此要排除。所以任何平分向量都沿 ℓ 並與 $\mathbf{b}$ 同向，即它是 $\mathbf{b}$ 的正數倍。

同一論證的代數版本：平面上任何向量都可寫成 $\mathbf{v} = p\hat{\mathbf{x}} + q\hat{\mathbf{y}}$。兩角相等即 $\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}}$，而

$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}} = (p + q\cos\theta) - (p\cos\theta + q) = (p-q)(1-\cos\theta).$$

由於 $\cos\theta \neq 1$，這迫使 $p = q$，所以 $\mathbf{v} = p(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$。只有當 $p > 0$ 時，兩個角才是銳角。

第 (i)(b) 部分

點 B 位於直線 XY 上，當且僅當對某實數 t 有 $\overrightarrow{OB} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$。我們需要

$$\lambda|\mathbf{y}|\,\mathbf{x} + \lambda|\mathbf{x}|\,\mathbf{y} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}.$$

由於 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{y}$ 不平行，我們可以比較係數：$\lambda|\mathbf{y}| = 1-t$ 及 $\lambda|\mathbf{x}| = t$。兩式相加得

$$\lambda = \frac{1}{|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|}, \qquad t = \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|}.$$

於是 $\overrightarrow{XB} = t(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ 及 $\overrightarrow{BY} = (1-t)(\mathbf{y}-\mathbf{x})$，其中 $0 < t < 1$，所以 B 位於 X 與 Y 之間，且

$$XB : BY = t : (1-t) = |\mathbf{x}| : |\mathbf{y}| = OX : OY.$$

這就是角平分線定理（angle bisector theorem）：從 O 出發的角平分線按相鄰兩邊之比分割 XY。

第 (i)(c) 部分

這裏 $\overrightarrow{OB}$ 是 $\mathbf{b}$ 的非零倍數，所以 $OB \perp XY$ 即 $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = 0$。利用 $\mathbf{b} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$ 及 $\mathbf{y}-\mathbf{x} = |\mathbf{y}|\hat{\mathbf{y}} - |\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$，

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}) &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\big(|\mathbf{y}|\cos\theta + |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| - |\mathbf{x}|\cos\theta\big)\\ &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|)(1+\cos\theta).\end{aligned}$$

由於 $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| > 0$ 且 $1+\cos\theta > 0$，這式只有在 $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|$ 時才等於零。即 $OX = OY$，三角形 XOY 是等腰（isosceles）三角形。

第 (ii) 部分

設 $\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$、$\mathbf{r}$ 分別為沿 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$ 的單位向量。四點中任何三點都不共線，特別是 O, P, Q 不共線，所以第 (i)(a) 部分適用於每一個角。因此所選的平分向量必定是

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{p}+\mathbf{q}), \qquad \mathbf{v} = \beta(\mathbf{q}+\mathbf{r}), \qquad \mathbf{w} = \gamma(\mathbf{r}+\mathbf{p}),$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma > 0$，而且三者都不是零向量。

> **想一想** 三個平分向量都是任意的正數倍。我們怎樣才能同時對三個角下結論？

比例因子都是正數，所以不會改變點積的正負號。而我們只需要正負號：兩個非零向量的夾角是銳角、直角還是鈍角，取決於它們的點積是正、零還是負。記 $S = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$。利用 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = 1$，

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \alpha\beta\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = \alpha\beta\,(1+S).$$

完全同理，利用 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = 1$ 及 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = 1$，

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \beta\gamma\,(1+S), \qquad \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = \gamma\alpha\,(1+S).$$

由於 $\alpha\beta$、$\beta\gamma$、$\gamma\alpha$ 全是正數，三個點積的正負號都與 $1+S$ 相同。所以當 $1+S > 0$ 時三個角都是銳角，當 $1+S = 0$ 時都是直角，當 $1+S < 0$ 時都是鈍角。 ■

驗算

- 取 $\mathbf{x} = (3,0,0)$ 及 $\mathbf{y} = (0,4,0)$。那麼 $\mathbf{b} = (12,12,0)$，它平分該直角。取 $\lambda = \frac{1}{7}$ 得 $B = (\frac{12}{7}, \frac{12}{7}, 0)$，它位於 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ 上，且 $XB : BY = 3 : 4$。
- 第 (ii) 部分的三種情況確實都會出現。若 P、Q、R 在同一平面上兩兩相隔 120°，則 $S = -\frac{3}{2}$，而各平分向量之間的夾角為 120°（鈍角）。若 $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ 指向一個以 O 為中心的正四面體（regular tetrahedron）的三個頂點，則每個點積都是 $-\frac{1}{3}$，所以 $S = -1$，三個角都是直角。三個幾乎平行的向量則給出銳角。
- 兩部分的結果亦已用電腦在數以千計的隨機配置上驗證過。

常見錯誤

- 忘記必須用到 $\cos\theta \neq \pm 1$。(i)(c) 中的因子 $1 + \cos\theta$ 以及唯一性論證中的因子 $1 - \cos\theta$ 之所以不為零，全因各點不共線。
- 在第 (ii) 部分，把平分向量當作某些特定向量，例如 $|\mathbf{x}|\mathbf{y} + |\mathbf{y}|\mathbf{x}$。題目容許它們自由選取，所以你必須引用第 (i)(a) 部分，才能說它們是這些向量的正數倍。

STEP 之外

把向量寫成 $|\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$ 並以單位向量運算，是一個在整個線性代數（linear algebra）中都大有裨益的習慣。(ii) 中的恆等式是 $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ 的格拉姆矩陣（*Gram matrix*）幾何的一小部分，該矩陣的元素就是這些向量兩兩之間的點積。由 $|\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}|^2 = 3 + 2S \geq 0$ 可知 $S \geq -\frac{3}{2}$，所以鈍角的情況是有界限的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是以這種精神講解點積、投影和格拉姆矩陣。

詳細解答

STEP II 2024，第 5 題

純數學 • 值域與丟番圖方程

> **STEP II 2024，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

把多項式的自變量平移一個整數，它在 $\mathbb{Z}$ 上的值域（range）並不會改變，所以我們透過配方（completing the square）（或「配立方」）把每個函數化成最簡單的平移形式。這樣，問兩個值域是否相交，就變成問一條含兩個整數未知數的方程是否有解；而竅門在於把方程整理成兩個整數之積 = 一個固定的小數的形式。一個小數的因數分解只有寥寥幾種可能，我們可以逐一檢查。

解答

第 (i) 部分

配方得

$$\mathrm{f}_1(n) = (n+3)^2 + 2 = \mathrm{F}_1(n+3).$$

當 n 取遍 $\mathbb{Z}$ 時，$m = n+3$ 亦然（每個整數 m 都會出現，取 $n = m-3$ 即可）。因此 f_1 的值域是 $\{m^2+2 : m \in \mathbb{Z}\}$，正好就是 F_1 的值域。這就是所要證明的。

第 (ii) 部分

同理 $\mathrm{g}_1(n) = (n-1)^2 + 4$，故按同樣的論證，$\mathrm{g}_1$ 的值域是 $\{k^2+4 : k \in \mathbb{Z}\}$。由第 (i) 部分，若有公共值，便需要整數 m、k 使得

$$m^2 + 2 = k^2 + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 2.$$

由於 $m-k$ 與 $m+k$ 相差 $2k$，是偶數，所以兩者奇偶性（parity）相同。若兩者皆為奇數，其積為奇數，不可能等於 2。若兩者皆為偶數，其積是 4 的倍數，同樣不可能等於

2。因此這樣的 m、k 並不存在，兩個值域的交集（intersection）為空。

第 (iii) 部分

配方得

$$\mathrm{f}_2(n) = (n-1)^2 - 7, \qquad \mathrm{g}_2(n) = (n-2)^2 - 2,$$

所以兩個值域分別是 $\{m^2-7\}$ 和 $\{k^2-2\}$，其中 m、k 取遍 $\mathbb{Z}$。公共值需要

$$m^2 - 7 = k^2 - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 5.$$

由於 5 是質數（prime），數對 $(m-k,\, m+k)$ 只能是 $(1,5)$、$(5,1)$、$(-1,-5)$、$(-5,-1)$ 其中之一。兩個因數相加得 $2m = \pm 6$，相減得 $2k = \pm 4$，所以在每種情況下都有 $m^2 = 9$ 及 $k^2 = 4$。公共值為

$$m^2 - 7 = 9 - 7 = 2 = 4 - 2 = k^2 - 2.$$

所以同時屬於兩個值域的整數只有 $\boxed{2}$。驗證一下：$\mathrm{f}_2(4) = \mathrm{f}_2(-2) = 2$，而 $\mathrm{g}_2(4) = \mathrm{g}_2(0) = 2$。

第 (iv) 部分

對 p 配方，

$$p^2 + pq + q^2 = \left(p + \tfrac{1}{2}q\right)^2 + \tfrac{3}{4}q^2 \geq 0,$$

因為兩項都是平方乘以正常數。（等號只在 $q = 0$ 且 $p = 0$ 時成立。）

至於三次函數，我們把 f_3 與 $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ 作比較：

$$\mathrm{f}_3(n) = (n-1)^3 + 4n + 1 = (n-1)^3 + 4(n-1) + 5.$$

所以設 $m = n - 1$（它同樣取遍整個 $\mathbb{Z}$），則 f_3 的值域是 $\{m^3 + 4m + 5\}$，而 g_3 的值域是 $\{k^3 + 4k - 6\}$。公共值需要整數 m、k 使得

$$\begin{aligned} & m^3 + 4m + 5 = k^3 + 4k - 6 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k^3 - m^3) + 4(k-m) = 11 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k-m)\left(k^2 + km + m^2 + 4\right) = 11. \end{aligned}$$

想一想 本部分開首的不等式對這條方程有甚麼幫助？

在該不等式中取 $p = k$、$q = m$，便得 $k^2 + km + m^2 + 4 \geq 4$。特別地，第二個因式是正整數，所以 $k - m$ 亦必須是正數。由於 11 是質數，只有兩個可能：

- $k-m=11$ 且 $k^2+km+m^2+4=1$。這不可能，因為第二個因式至少是 4。
- $k-m=1$ 且 $k^2+km+m^2+4=11$。

在第二種情況下，代入 $k=m+1$：

$$\begin{aligned}(m+1)^2+m(m+1)+m^2&=7\\ 3m^2+3m+1&=7\\ m^2+m-2=(m+2)(m-1)&=0,\end{aligned}$$

所以 $m=1$（此時 $k=2$）或 $m=-2$（此時 $k=-1$）。對應的值為

$$m=1:\ 1+4+5=10,\qquad m=-2:\ -8-8+5=-11.$$

所以同時屬於兩個值域的整數是 $\boxed{10\text{ 和 }-11}$。

回到原來的變量：$f_3(2)=8-12+14=10$ 而 $g_3(2)=8+8-6=10$；另外 $f_3(-1)=-1-3-7=-11$ 而 $g_3(-1)=-1-4-6=-11$。有趣的是，兩個公共值都來自相同的輸入 n。

驗算

- 如上文般代回驗證：f_2 和 g_2 在 $n=4$ 時都取值 2，而 f_3、g_3 在 $n=2$（值為 10）及 $n=-1$（值為 -11）時相等。
- 列出一些較小的值，可快速檢查第 (ii) 部分是否合理：f_1 給出 $2,3,6,11,18,27,\ldots$，而 g_1 給出 $4,5,8,13,20,29,\ldots$。兩個列表都沒有對方的數。
- 以電腦搜尋所有 $|n|\le 3000$，證實 (i) 的兩個值域相同、(ii) 的兩個值域不相交（disjoint），而唯一的公共值是 (iii) 中的 2，以及 (iv) 中的 10、-11。

常見錯誤

- 以同一個 n 解 $f(n)=g(n)$ 來找公共值。兩個輸入可以不同，所以我們需要兩個獨立的未知數。在 (iii) 中，$f_2(n)=g_2(n)$ 碰巧給出正確答案，但方法是錯的。
- 在 (ii) 中，只論證 $(m-k)(m+k)=2$ 迫使 $\{m-k,m+k\}=\{1,2\}$，卻忘記了負數因數對。奇偶性論證可一次過處理所有情況。
- 在 (iv) 中，忘記排除 11×1 這個因數分解（factorisation）。正是那條不等式把它排除掉。

STEP 之外

像 $m^2 - k^2 = 5$ 和 $k^3 + 4k = m^3 + 4m + 11$ 這類只計算整數解的方程，稱為*丟番圖方程*（Diophantine equations）。把一邊因式分解，再利用另一邊的因數，是解這類方程最有力的初等工具之一。(ii) 中的奇偶性技巧可以推廣：一個整數可表示為兩個平方數之差，當且僅當它是奇數或 4 的倍數。若想深入了解，Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是一本極佳的大學一年級數論（number theory）入門書。

詳細解答

STEP II 2024，第 6 題

純數學 • 二項式級數的係數

STEP II 2024，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

每一部分都靠相鄰項之比（ratio of successive terms）推動。二項式係數（binomial coefficient）$\binom{2n}{n}$ 和二項級數（binomial series）的係數都是乘積，每走一步便多乘一個因子，所以把第 n 項與第 $(n-1)$ 項比較，就得到一條簡短的遞推關係（recurrence）。兩個數列若服從同一條遞推關係，而且首項相同，它們便相等。最後的恆等式則來自把 $(1-x)^{-3/2}$ 寫成 $(1-x)^{-1/2}\times(1-x)^{-1}$ 並比較係數（comparing coefficients），因為乘以 $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots$ 會把一列係數變成它的累計和。

解答

第 (i) 部分

設 $P(n)$ 為命題 $T_n=\dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$。

基本情況（*base case*）。$P(0)$ 成立，因為 $\frac{1}{2^0}\binom{0}{0}=1=T_0$。

歸納步驟（*inductive step*）。假設對某個 $n\geq 1$，$P(n-1)$ 成立。由於 $\binom{2n}{n}=\dfrac{(2n)!}{n!\,n!}$ 及 $\binom{2n-2}{n-1}=\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}$，兩者相除得

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)(2n-1)}{n\cdot n}\binom{2n-2}{n-1}=\frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

於是，利用遞推關係及 $P(n-1)$，

$$\begin{aligned} T_n = \frac{2n-1}{2n}\,T_{n-1} &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\cdot\frac{n}{2(2n-1)}\binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{4\cdot 2^{2n-2}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

這正是 $P(n)$。由歸納法（induction），$P(n)$ 對所有 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 皆成立。

第 (ii) 部分

由一般指數的二項式定理（binomial theorem for a general index），$(1-x)^{-1/2}$ 中 x^r 的係數為

$$a_r = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}\,(-1)^r = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}}{r!},$$

因為分子中 r 個因子各自為負，而 $(-x)^r$ 帶來的 $(-1)^r$ 正好抵消這些符號。由 a_{r-1} 到 a_r，分子多了一個因子 $\frac{2r-1}{2}$，分母多了一個因子 r，所以當 $r \geq 1$ 時

$$\frac{a_r}{a_{r-1}} = \frac{(2r-1)/2}{r} = \frac{2r-1}{2r}, \qquad \text{即} \qquad a_r = \frac{2r-1}{2r}\,a_{r-1}.$$

> **想一想** 為甚麼這條遞推關係能立即推出 $a_r = T_r$？

兩個數列的首項都是 1（因為常數項 $a_0 = 1$，而 $T_0 = 1$），而且由第 $r-1$ 項到第 r 項遵從同一規則。一行歸納便能完成：若 $a_{r-1} = T_{r-1}$，則 $a_r = \frac{2r-1}{2r}a_{r-1} = \frac{2r-1}{2r}T_{r-1} = T_r$。所以對所有 $r \geq 0$ 都有 $a_r = T_r$，再由 (i)，

$$a_r = \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}.$$

第 (iii) 部分

同樣地，$(1-x)^{-3/2}$ 中 x^r 的係數為

$$b_r = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2r+1}{2}}{r!}.$$

a_r 與 b_r 的分子都是 r 個連續「半奇數」的乘積。b_r 的乘積少了 a_r 的第一個因子 $\frac{1}{2}$，而在末端多了一個因子 $\frac{2r+1}{2}$。$r!$ 互相約去，所以

$$\frac{b_r}{a_r} = \frac{(2r+1)/2}{1/2} = 2r+1.$$

（當 $r = 0$ 時，兩個乘積都是空乘積，$b_0 = a_0 = 1$，與此相符。）因此

$$b_r = (2r+1)\,a_r = \frac{2r+1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

第 (iv) 部分

由於 $(1-x)^{-3/2} = (1-x)^{-1/2}(1-x)^{-1}$，且 $(1-x)^{-1} = \sum_{s\geq 0} x^s$，

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} x^s\right).$$

在右方，x^n 項來自從第一個括號選取 $a_r x^r$、從第二個括號選取 x^{n-r}，其中 $r = 0, 1, \ldots, n$。每一種選法的係數都是 $a_r \cdot 1$，所以 x^n 的係數為 $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$。比較兩邊 x^n 的係數，

$$b_n = \sum_{r=0}^{n} a_r.$$

代入 (ii) 及 (iii) 的公式，得

$$\frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r},$$

即所求。（上述推導對 $n = 0$ 亦成立，此時兩邊都等於 1。）

驗算

- 小數值情況：$a_0, a_1, a_2, a_3 = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}$，與 $\binom{2r}{r}/4^r = 1, \frac{2}{4}, \frac{6}{16}, \frac{20}{64}$ 吻合。
- 當 $n = 3$，(iv) 的左邊為 $\frac{7\cdot 20}{64} = \frac{35}{16}$，右邊為 $1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} = \frac{35}{16}$。
- 直接展開，$(1-x)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \cdots$，而 $b_2 = 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$。
- 以精確分數進行的電腦驗算確認 (i)–(iv) 對每個 $n \leq 29$ 皆成立。在 $x = 0.3$ 處把兩個級數各自的首 30 項相加，得 1.19523 及 1.70747，分別與 $(0.7)^{-1/2}$ 及 $(0.7)^{-3/2}$ 相符。

常見錯誤

- 二項式係數的符號錯誤：$\binom{-1/2}{r}$ 的符號正負交替，但 $(-x)^r$ 帶來的因子 $(-1)^r$ 抵消了這一點，所以每個 a_r 和 b_r 都是正數。
- 忘記基本情況，或單憑遞推關係便斷言 $a_r = T_r$：首項 $a_0 = T_0 = 1$ 也必須相符。

STEP 之外

把冪級數（power series）乘以 $(1-x)^{-1}$ 以得出部分和（partial sums），是生成函數（generating functions）的基本工具；生成函數把關於數列的問題轉化為冪級數的代數運

算。數 $\binom{2n}{n}/4^n$ 亦出現在概率（probability）之中：它是一枚公平硬幣擲 $2n$ 次恰好出現 n 次正面的概率，而斯特林公式（Stirling's formula）顯示當 n 很大時，它的表現約為 $1/\sqrt{\pi n}$。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）收錄更多同類題目，而 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）則有系統地發展生成函數。

詳細解答

STEP II 2024，第 7 題

純數學 • 曲線描繪

STEP II 2024，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

每個括號都是一個圓的方程，所以 C_1 不過是兩個圓。至於 C_2，把括號展開後，所有項都會歸結為 x^2+y^2 和 x^2，因此用一條水平直線去截它，就會得到一個關於 x^2 的二次方程（quadratic）。於是計算交點數目就變成計算這個二次方程有多少個正根，而這只需結合判別式（discriminant）、兩根之和與兩根之積便可確定。

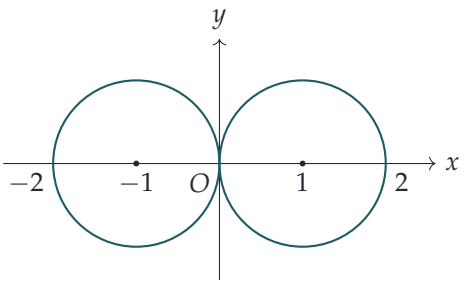
解答

全題中記

$$A = y^2+(x-1)^2-1 = x^2+y^2-2x, \qquad B = y^2+(x+1)^2-1 = x^2+y^2+2x.$$

第 (i) 部分

一個乘積等於零，當且僅當其中一個因子等於零，所以 C_1 是圓 $A=0$ 與圓 $B=0$ 的並集（union）。這兩個圓的半徑都是 1，圓心分別在 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$。兩圓都經過原點，並在原點相切（它們在該處的公切線（tangent）是 y 軸）。曲線的最高點是 $(\pm 1,1)$，與 x 軸相交於 $x=-2,0,2$。



第 (ii)(a) 部分

由於 A 和 B 分別具有 $s-2x$ 和 $s+2x$ 的形式，其中 $s=x^2+y^2$，故

$$AB=(x^2+y^2)^2-4x^2.$$

在直線 $y=k$ 上，方程 $AB=\frac{1}{16}$ 變為

$$\begin{aligned}(x^2+k^2)^2-4x^2&=\tfrac{1}{16}\\ x^4+2k^2x^2+k^4-4x^2-\tfrac{1}{16}&=0\\ x^4+2(k^2-2)x^2+\left(k^4-\tfrac{1}{16}\right)&=0,\end{aligned}$$

此即所求。

現在設 $u=x^2$，得

$$u^2+2(k^2-2)u+\left(k^4-\tfrac{1}{16}\right)=0. \qquad (*)$$

每個根 $u>0$ 給出兩個交點 $x=\pm\sqrt{u}$；根 $u=0$ 給出一個交點（$x=0$）；根 $u<0$ 則不給出任何交點。所以我們需要知道 $(*)$ 各根的正負號。以下三個量可以告訴我們：

- 四分之一判別式（quarter-discriminant）$(k^2-2)^2-\left(k^4-\frac{1}{16}\right)=\frac{65}{16}-4k^2$，當 k 小於、等於或大於 $\frac{\sqrt{65}}{8}$ 時，它分別為正、零或負；
- 兩根之和 $2(2-k^2)$；
- 兩根之積 $k^4-\frac{1}{16}$，當 $k>0$ 時，它與 $k-\frac{1}{2}$ 同號。

注意 $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{65}}{8}\approx 1.008$，而且只要兩根是實數，就有 $k^2\le\frac{65}{64}<2$，所以兩根之和為正。

想一想 如果兩根之積為負，我們還需要檢查判別式嗎？

不需要：兩根之積為負，必然迫使兩根為實數（此時判別式 b^2-4ac 為正）且一正一負。現在逐一考慮各種情況。

- $0<k<\frac{1}{2}$：兩根之積為負，所以恰有一個正根。**2 個交點**。

- $k = \frac{1}{2}$：$(*)$ 變為 $u^2 - \frac{7}{2}u = 0$，所以 $u = 0$ 或 $u = \frac{7}{2}$，得 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{7/2}$。**3 個交點**。
- $\frac{1}{2} < k < \frac{\sqrt{65}}{8}$：判別式為正，所以有兩個相異實根。它們的積與和都是正數，所以兩根皆為正。**4 個交點**。
- $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$：有一個重根（repeated root）$u = 2 - k^2 = \frac{63}{64} > 0$，得 $x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$。**2 個交點**。
- $k > \frac{\sqrt{65}}{8}$：沒有實根。**沒有交點**。

第 (ii)(b) 部分

由 (a) 可知，當 $0 < k \leq \frac{\sqrt{65}}{8}$ 時，直線 $y = k$ 與 C_2 相交，而 k 更大時則不相交。C_2 的方程只透過 y^2 涉及 y，所以負的 k 不會給出更高的點。因此 C_2 上最大的 y 坐標是 $\frac{\sqrt{65}}{8}$，在 $x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$ 處取得。

在 C_1 上，最高點是兩個圓的頂點 $(\pm 1, 1)$。由於 $\frac{\sqrt{63}}{8} < \frac{\sqrt{64}}{8} = 1$，$C_2$ 的最高點比 C_1 的最高點**更接近 y 軸**（不過稍為高一點，因為 $\frac{\sqrt{65}}{8} > 1$）。

第 (ii)(c) 部分

假設 $A < 0$ 且 $B < 0$。由 $A < 0$ 得 $2x > x^2 + y^2 \geq 0$，所以 $x > 0$。由 $B < 0$ 得 $-2x > x^2 + y^2 \geq 0$，所以 $x < 0$。兩者互相矛盾，所以 A 和 B 不可能同時為負。（從幾何上看，兩個開圓盤（open discs）互不重疊。）

在 C_2 上有 $AB = \frac{1}{16} > 0$，所以 A 和 B 都不為零，且同號。它們不可能同時為負，所以兩者皆為正。$A > 0$ 表示 $(x-1)^2 + y^2 > 1$，即該點嚴格位於以 $(1, 0)$ 為圓心的圓之外。同理，$B > 0$ 表示該點嚴格位於以 $(-1, 0)$ 為圓心的圓之外。因此 C_2 上每一點都位於兩個圓之外：C_2 完全位於 C_1 之外。

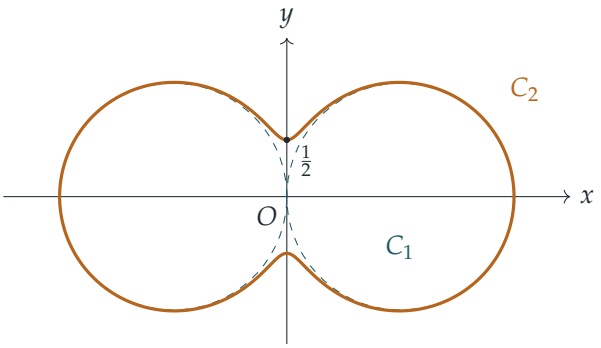
第 (ii)(d) 部分

有助描繪 C_2 的特徵：

- 由於方程中只出現 x^2 和 y^2，曲線關於兩條坐標軸都對稱（symmetric）。
- 在 $y = 0$ 上，$(*)$ 給出 $u = 2 + \frac{\sqrt{65}}{4}$，所以 C_2 與 x 軸相交於 $x = \pm\sqrt{2 + \frac{\sqrt{65}}{4}} \approx \pm 2.004$，剛好在 ± 2 之外。
- 在 $x = 0$ 上，$k^4 = \frac{1}{16}$，所以 C_2 與 y 軸相交於 $(0, \pm\frac{1}{2})$。
- 它的最高點和最低點是 $\left(\pm\frac{\sqrt{63}}{8}, \pm\frac{\sqrt{65}}{8}\right) \approx (\pm 0.99, \pm 1.01)$。

(a) 中的交點數目揭示了曲線的形狀。當 $|y| < \frac{1}{2}$ 時只有兩個交點（外側兩邊）。當 $\frac{1}{2} <$

$|y| < \frac{\sqrt{65}}{8}$ 時有四個交點，所以曲線在兩個隆起之間向下凹至 $(0, \pm\frac{1}{2})$。因此 C_2 是一條包圍兩個圓的單一閉合「花生形」曲線，在 y 軸處向內收窄。



（把 C_2 寫成極坐標形式（polar form），得 $r^2 = 2\cos^2\theta + \sqrt{4\cos^4\theta + \frac{1}{16}}$，上圖的曲線正是這樣畫出來的。）

驗算

- 當 $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$ 時，判別式 $\frac{65}{16} - 4k^2$ 等於零，與曲線的頂部吻合。重根 $u = \frac{63}{64}$ 給出 $x^2 + y^2 = \frac{128}{64} = 2$ 及 $4x^2 = \frac{63}{16}$，而 $2^2 - \frac{63}{16} = \frac{1}{16}$ 確實成立。
- 點 $(0, \frac{1}{2})$：$A = B = \frac{1}{4}$，所以 $AB = \frac{1}{16}$。
- 用電腦計算 $y = k$ 與 C_2 的交點數目，對於 $k = 0.1$、0.49、0.51、1.0、1.007 和 1.01，分別得到 2、2、4、4、4 和 0 個交點；而數值搜尋得出最大高度為 $1.00778 \approx \frac{\sqrt{65}}{8}$，位於 $x \approx 0.9922 \approx \frac{\sqrt{63}}{8}$。

常見錯誤

- 把 $u = 0$ 當作給出兩個交點：$x = \pm\sqrt{0}$ 只是一個點，這就是為甚麼 $k = \frac{1}{2}$ 給出 3 個交點而不是 4 個。
- 計算交點數目時遺漏了相切（tangency）的情況 $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$。
- 在 (c) 中只得出「A 和 B 同號」，而沒有排除兩者同時為負的情況——而這正是前半部分的重點所在。

STEP 之外

C_2 屬於曲線族 $(x^2+y^2)^2-4x^2=c$，即函數 AB 的等值曲線（level curves）。隨着 c 增大，曲線的形狀會改變：先是兩個位於圓內的獨立卵形（當 $c<0$），然後在 $c=0$ 時成為 8 字形（figure-of-eight）曲線 C_1，之後成為單一的花生形，而當 $c\geq 4$ 時其凹陷便會消失。拓撲（topology）的改變恰好發生在 AB 於原點的臨界點（critical point）所對應的水平上。追蹤等值曲線在經過臨界點時如何變化，正是莫爾斯理論（Morse theory）的出發點；而與此密切相關的卡西尼卵形線（Cassini ovals）——其 8 字形成員就是伯努利雙紐線（lemniscate of Bernoulli）——也有完全相同的表現。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了更多類似 STEP 風格、描繪這類隱函數曲線（implicit curves）的題目。

詳細解答

STEP II 2024，第 8 題

純數學 • 算術幾何平均

STEP II 2024，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 2.6 節算術幾何平均中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/agm.html

關鍵思路

兩個數列互相夾近：算術平均數逐步下降，幾何平均數逐步上升，而兩者之差每次至少減半，所以兩個數列都趨於同一個極限 M，即 x_0 與 y_0 的算術—幾何平均數（arithmetic–geometric mean）。在第 (ii) 部分，代換（substitution）把數對 (p, q) 的積分變成這兩個數的平均數所成數對的積分，所以在整個迭代過程中積分的值始終不變。令 $n \to \infty$，積分便化為一個我們能夠計算的積分。

解答

第 (i) 部分

首先用歸納法（induction）證明對每個 n 都有 $0 < y_n < x_n$。當 $n = 0$ 時成立。假設 $0 < y_n < x_n$，則 $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$，所以

$$0 < \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = x_n + y_n - 2\sqrt{x_n y_n},$$

整理得 $\frac{1}{2}(x_n + y_n) > \sqrt{x_n y_n}$，即 $y_{n+1} < x_{n+1}$。此外 $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > 0$。歸納法至此完成，所以對所有 $n \geq 0$ 都有 $y_{n+1} < x_{n+1}$。

利用 $y_n < x_n$：

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) < \tfrac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n,$$
$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n,$$

其中第二行用到 $x_n > y_n > 0$ 以及平方根是遞增函數這一事實。

所以 (y_n) 是遞增數列，而且有上界（bounded above）：$y_n < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_0$，所以對所有 n 都有 $y_n < x_0$。根據該定理，存在某個 $M \le x_0$ 使得 $y_n \to M$。（由於數列從 y_0 開始遞增，亦有 $M \ge y_0 > 0$。）

至於兩者之差，左邊的不等式 $x_{n+1} - y_{n+1} > 0$ 正是我們最先證明的結果。至於右邊的不等式，由於 $y_{n+1} > y_n$，

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n - y_n).$$

反覆應用此式，得

$$0 < x_n - y_n < \frac{x_0 - y_0}{2^n} \to 0,$$

所以由夾逼原理（squeezing）得 $x_n - y_n \to 0$。最後，$x_n = y_n + (x_n - y_n)$ 是一個趨於 M 的數列與一個趨於 0 的數列之和，所以 $x_n \to M$ 亦成立。

第 (ii) 部分

記 $a = \tfrac{1}{2}(p+q)$、$g = \sqrt{pq}$，並把關於 t 的積分記作 J。

代換。 對 $x > 0$，令 $t = \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{pq}{x}\right)$，則

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{pq}{x^2}\right) = \frac{x^2 + pq}{2x^2} > 0,$$

所以 t 嚴格遞增，當 $x \to 0^+$ 時趨於 $-\infty$，當 $x \to \infty$ 時趨於 $+\infty$：此代換把 $(0,\infty)$ 一一對應（one-to-one）地映射到整條實數線上。現在改寫根號內的兩個因子。

$$pq + t^2 = \tfrac{1}{4}\left(x^2 + 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{pq}{x}\right)^2 = \left(\frac{x^2+pq}{2x}\right)^2,$$
$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}(p+q)^2 + t^2 &= \tfrac{1}{4}\left(p^2 + 2pq + q^2 + x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right)\\ &= \frac{x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2}{4x^2} = \frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}.\end{aligned}$$

由於 $x > 0$ 且 $x^2 + pq > 0$，兩者乘積的平方根為

$$\frac{x^2+pq}{2x} \cdot \frac{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}{2x}.$$

因此

$$J = \int_0^\infty \frac{x^2+pq}{2x^2}\cdot\frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}} = 2\,\mathrm{I}(p,q).$$

直接解讀同一個積分。 由於 $\frac{1}{4}(p+q)^2 = a^2$ 及 $pq = g^2$，J 的被積函數（integrand）是 $1/\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}$，它是 t 的偶函數（even function）。所以

$$J = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}} = 2\,\mathrm{I}(a,g),$$

這樣做是合理的，因為 a、g 均為正數且 $g < a$（由於 $p \neq q$，這由第 (i) 部分的不等式得出）。比較 J 的兩個表達式，得

$$\mathrm{I}(p,q) = \mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q),\mathrm{g}(p,q)\big),$$

此即所求。

計算 $\mathrm{I}(x_0,y_0)$。 取 $(p,q) = (x_n,y_n)$ 應用上式（由於 $0 < y_n < x_n$，這是容許的），得 $\mathrm{I}(x_n,y_n) = \mathrm{I}(x_{n+1},y_{n+1})$，所以

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \mathrm{I}(x_n,y_n) \quad \text{對每個} n.$$

> **想一想** 我們想令 $n \to \infty$，並說積分趨於 $\mathrm{I}(M,M)$。在無窮區間上的積分，怎樣才能合理地把極限移到積分號之內？

我們用夾逼的方法，避開任何微妙的極限論證。對 $0 < y_n < x_n$ 及每個 x，

$$(y_n^2+x^2)^2 \le (x_n^2+x^2)(y_n^2+x^2) \le (x_n^2+x^2)^2,$$

所以取平方根再取倒數（這會令不等號反向），然後積分，得

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x_n^2+x^2} \le \mathrm{I}(x_n,y_n) \le \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{y_n^2+x^2}.$$

對 $c > 0$，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{c^2+x^2} = \Big[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}$，所以

$$\frac{\pi}{2x_n} \le \mathrm{I}(x_0,y_0) \le \frac{\pi}{2y_n} \quad \text{對每個} n.$$

中間一項不隨 n 改變，而由於 $x_n \to M$、$y_n \to M$ 且 $M > 0$，上下兩界都趨於 $\pi/(2M)$。因此

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \frac{\pi}{2M}.$$

驗算

- 取 $x_0 = 2$、$y_0 = 1$。迭代得 $(1.5,\ 1.41421)$，然後是 $(1.45711,\ 1.45648)$，再下一步兩者在五位有效數字內一致，即 $M \approx 1.45679$。所以 $\pi/(2M) \approx 1.07826$，而用數值方法計算 $\mathrm{I}(2,1)$ 亦得 1.07826。
- 若 $p = q$，則恆等式顯然成立，因為此時 $\mathrm{a}(p,p) = \mathrm{g}(p,p) = p$。答案 $\pi/(2M)$ 與此吻合，因為 $\mathrm{I}(M,M) = \pi/(2M)$。
- 收斂速度極快：最初幾步之後，兩者之差大約每次平方一次，遠比我們證明的減半要好。

常見錯誤

- 在歸納法中使用 $y_{n+1} < x_{n+1}$，卻沒有先確立 $y_n < x_n$（以及 $y_n > 0$，使平方根有意義）。
- 忘記關於 t 的積分是在整條實數線上進行，因此等於 $\mathrm{I}(a,g)$ 的兩倍；兩個因子 2 必須互相抵消。
- 毫無理據地寫出 $\mathrm{I}(x_n,y_n) \to \mathrm{I}(M,M)$。上面的夾逼論證提供了一個可靠的理由。

STEP 之外

共同極限 M 就是高斯（Gauss）的算術—幾何平均數，而積分 I 是一個完全橢圓積分（complete elliptic integral）：高斯在 1799 年發現了這個恆等式，它提供了一種快得驚人的方法來計算橢圓積分，甚至可以計算 π 本身（高斯—勒讓德算法（Gauss–Legendre algorithm））。開頭引用的單調收斂定理（monotone convergence theorem），以及交換極限與積分次序時所需的謹慎，都是大學第一門分析（analysis）課程的核心主題；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是正式認識這些內容的絕佳起點。

詳細解答

STEP II 2024，第 9 題

力學 • 拋體運動

STEP II 2024，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

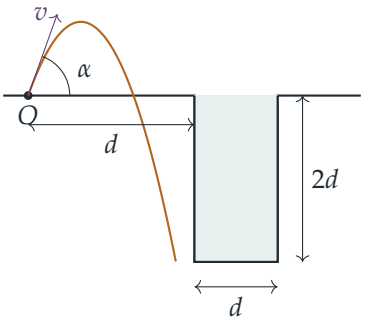
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

一切都由軌跡方程（trajectory equation）$y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2v^2}\sec^2\alpha$ 推出，把它寫成以 $t = \tan\alpha$ 為變量的二次式（quadratic）。要乾淨利落地落在溝底，意味着兩件事：質點到達近邊時仍在地面之上；而在它本應到達對面一側之前，已經低於溝底的水平。每個條件都是關於 t 的二次不等式（quadratic inequality），而配方（completing the square）可把它們化成所需的形式。第 (ii) 部分則只需證明 t 的兩個容許範圍有重疊。

解答

把質點視為只受重力作用的點狀拋射體（projectile），不計空氣阻力（air resistance）。取拋射點為原點，x 沿水平方向指向溝渠，y 豎直向上。於是近壁是直線 $x = d$，遠壁是 $x = 2d$，而溝底是 $y = -2d$，其中 $d < x < 2d$。



在時刻 T，水平速度為 $v\cos\alpha$，豎直速度為 $v\sin\alpha - gT$，消去 T 得

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} = xt - \frac{x^2(1+t^2)}{2\lambda d},$$

其中 $t = \tan\alpha$，並用了 $v^2 = \lambda dg$ 及 $\sec^2\alpha = 1 + t^2$。

第 (i)(a) 部分

要避免在溝渠前撞到地面或撞到近壁，質點在 $x = d$ 時必須仍嚴格高於地面。（若它在該處位於 $y = 0$ 或以下，它便已撞到地面，或將撞上近壁。）所以

$$y(d) = dt - \frac{d(1+t^2)}{2\lambda} > 0 \iff 2\lambda t - 1 - t^2 > 0 \iff t^2 - 2\lambda t + \lambda^2 < \lambda^2 - 1,$$

這裏乘以了 $2\lambda/d > 0$。即

$$(\tan\alpha - \lambda)^2 < \lambda^2 - 1,$$

此即所求。左邊是平方，所以 $\lambda^2 - 1 > 0$；由於 $\lambda = v^2/(dg) > 0$，得 $\lambda > 1$。

第 (i)(b) 部分

現在考慮遠壁。路徑是一條開口向下的拋物線（parabola），在 $x = d$ 時高於溝底水平 $-2d$。它在 $x = 2d$ 之前到達 $y = -2d$（即溝底），當且僅當它在 $x = 2d$ 時已低於該水平，即 $y(2d) < -2d$。反之若 $y(2d) \geq -2d$，它到達 $x = 2d$ 時仍未觸及溝底，因此會碰到遠壁（或者整條溝渠都飛越過去）。

> ? **想一想** 為甚麼只看 $x = 2d$ 這一點就足夠？

因為 $y(x) + 2d$ 是關於 x 的二次式，首項係數（leading coefficient）為負，且在 $x = d$ 時為正。它在 $x = d$ 之後恰有一個根（root），而這個根位於 $2d$ 之前，當且僅當該二次式在 $x = 2d$ 時已經為負。

所以我們需要

$$y(2d) = 2dt - \frac{4d^2(1+t^2)}{2\lambda d} < -2d \iff \lambda t - (1+t^2) < -\lambda \iff t^2 - \lambda t + 1 - \lambda > 0,$$

這裏乘以了 $\lambda/(2d) > 0$。乘以 4 再配方，

$$4t^2 - 4\lambda t + \lambda^2 > \lambda^2 - 4 + 4\lambda, \qquad \text{即} \qquad (2\tan\alpha - \lambda)^2 > \lambda^2 + 4(\lambda - 1),$$

此即所求。

推出 $\alpha > 45°$。由 (a)，$\lambda > 1$，所以 $\lambda^2 + 4(\lambda - 1) > \lambda^2 > 0$。記 $s = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda - 4}$，則 $s > \lambda$。(b) 中的不等式表示

$$2t > \lambda + s \qquad \text{或} \qquad 2t < \lambda - s.$$

由於 $s > \lambda$，第二種情況給出 $t < 0$。但 (a) 迫使 $t > 0$：由 $(t-\lambda)^2 < \lambda^2 - 1 < \lambda^2$ 得 $|t-\lambda| < \lambda$，所以 $t > 0$。（從物理上看，質點必須上升才能越過近邊。）因此第一種情況成立，並且

$$2t > \lambda + s > \lambda + \lambda = 2\lambda > 2,$$

所以 $\tan\alpha > \lambda > 1$。由於 $0 < \alpha < 90°$，得 $\alpha > 45°$。

第 (ii) 部分

反過來，兩個條件合起來已經足夠。若 $y(d) > 0$，由於 $y(0) = 0$ 且 y 是凹函數（concave），在整個區間 $0 < x \le d$ 上都有 $y > 0$，所以質點越過地面和近壁。若同時 $y(2d) < -2d$，它會在嚴格介乎 d 與 $2d$ 之間的某個 x 到達溝底，而在此之前一直留在溝渠之內。所以我們只需證明：對每個 $\lambda > 1$，存在某個 $t > 0$ 同時滿足兩個不等式。

由 (a)，容許值為 $\lambda - \sqrt{\lambda^2-1} < t < \lambda + \sqrt{\lambda^2-1}$。由 (b) 連同 $t > 0$，容許值為 $t > \frac{1}{2}(\lambda + s)$。兩者對某個 t 同時成立，只要

$$\tfrac{1}{2}(\lambda+s) < \lambda + \sqrt{\lambda^2-1} \iff s < \lambda + 2\sqrt{\lambda^2-1}.$$

（(a) 的下界不會造成麻煩，因為 $\frac{1}{2}(\lambda+s) > \lambda > \lambda - \sqrt{\lambda^2-1}$。）兩邊皆為正，所以可以平方：

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + 4\lambda - 4 < \lambda^2 + 4\lambda\sqrt{\lambda^2-1} + 4(\lambda^2-1) \\ \iff \quad & 4\lambda < 4\lambda\sqrt{\lambda^2-1} + 4\lambda^2 \\ \iff \quad & 1 < \sqrt{\lambda^2-1} + \lambda, \end{aligned}$$

這裏除以了 $4\lambda > 0$。由於 $\lambda > 1$，最後一行成立。所以區間

$$\tfrac{1}{2}\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda - 4}\right) < \tan\alpha < \lambda + \sqrt{\lambda^2-1}$$

是非空的（non-empty）。選取 α 使 $\tan\alpha$ 落在其中（這是可行的，因為 tan 在 $(0°, 90°)$ 上取遍所有正值），質點便會落在溝底而不碰到任何一側。

驗算

- 取 $\lambda = 2$。區間為 $1 + \sqrt{2} < \tan\alpha < 2 + \sqrt{3}$，恰好是 $67.5° < \alpha < 75°$。把 $\alpha = 70°$ 代入 $y = xt - x^2(1+t^2)/(4d)$，得 $y(d) \approx 0.61d > 0$ 及 $y(2d) \approx -3.05d < -2d$，與預期相符。
- 當 $\lambda \to 1^+$ 時，區間兩端都趨於 1，所以可行範圍收縮至 $\alpha = 45°$：當 $v^2 = dg$ 時，質點只能勉強到達近邊，這需要最大射程（maximum range）的角度。
- 用電腦隨機檢驗數以千計的 (λ, α) 組合，按時間逐步推進運動，結果在每一種情況下都與兩個不等式吻合。

常見錯誤

- 把條件當成 $y(d) > -2d$（高於溝底）而非 $y(d) > 0$：近壁一直延伸到地面高度。
- 在 (b) 中忘記排除 $2\tan\alpha < \lambda - s$ 這一支，而這需要用到 $\tan\alpha > 0$。
- 在 (ii) 中未先指出兩邊皆為正便把不等式平方。

STEP 之外

這裏一個物理條件（「落在溝渠內」）變成了發射參數空間中由不等式所圍出的一個區域，而問題在於該區域是否非空。這正是最佳化（optimisation）與控制（control）的起點：描述可行（feasible）輸入的集合，並找出其邊界。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以大學一年級程度討論拋射運動及其延伸（空氣阻力、旋轉參考系）。

詳細解答

STEP II 2024，第 10 題

力學 • 加速楔上的摩擦力

STEP II 2024，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

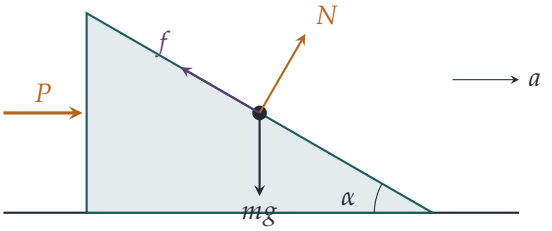
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

整道題建基於兩個觀察。第一，水平面光滑（smooth），所以作用於整個系統（稜柱連同質點）的唯一水平外力是 P，由此可立即得出共同加速度。第二，由於質點相對稜柱不動，它的水平加速度與稜柱完全相同，因此只需對質點沿斜面及垂直斜面分解力，便可直接求得摩擦力和法向反作用力（normal reaction）。第 (iii) 部分的不等式其實就是「摩擦力 $\leq \mu\times$ 法向反作用力」，再用複角公式（compound-angle formulae）整理一下而已。

解答

我們把質點視為質點（particle），把稜柱（prism）視為在光滑水平面上滑動的剛體（rigid body），並設質點與斜面之間的接觸是粗糙（rough）的，摩擦係數（coefficient of friction）為 μ。把豎直面放在左邊，使斜面向右下傾斜；這樣 P 便把稜柱推向右方。



作用於質點的力有：重量 mg、垂直於斜面的法向反作用力 N，以及摩擦力。我們把摩擦力視為一個帶正負號的量 f，以沿斜面向上為正（若 f 結果為負，則摩擦力實際上沿斜面向下）。摩擦力的大小為 $F = |f|$。

第 (i) 部分

假設系統處於平衡（equilibrium），即所有物體都靜止。對質點沿垂直斜面及沿斜面方向分解力，得

$$N = mg\cos\alpha, \qquad f = mg\sin\alpha.$$

質點不滑動的條件是 $|f| \le \mu N$，即 $mg\sin\alpha \le \mu\, mg\cos\alpha$，亦即 $\mu \ge \tan\alpha$（由於 α 是銳角，可以除以 $mg\cos\alpha > 0$）。因此若 $\mu < \tan\alpha$，便不可能平衡：質點必定滑動。

第 (ii) 部分

加速度。把稜柱和質點合起來考慮。水平面光滑，只施加豎直方向的力；質點與稜柱之間的力屬於內力。因此唯一的水平外力是 P，而兩者的加速度同為 a（水平向右），故

$$P = (M+m)a, \qquad a = \frac{P}{M+m}.$$

對質點分解力。質點的加速度是水平的 a。它沿斜面向上的分量是 $-a\cos\alpha$（斜面向左上升，而質點向右加速），沿向外法線方向的分量是 $a\sin\alpha$。

> ? **想一想** 為甚麼要沿斜面及垂直斜面分解，而不是沿水平及豎直方向分解？

沿斜面方向，只有 f 和重量有分量；垂直斜面方向，只有 N 和重量有分量。所以每條方程只含一個未知量，免去解聯立方程。代價是加速度也要分解，但這並不困難。

沿斜面向上：

$$f - mg\sin\alpha = -ma\cos\alpha \quad\Longrightarrow\quad f = m(g\sin\alpha - a\cos\alpha).$$

代入 $a = P/(M+m)$，得

$$f = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha],$$

因此摩擦力的大小為

$$F = \frac{m}{M+m}\,|(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha|,$$

與題目所求相符。這裏的絕對值確實不可少：P 較小時摩擦力沿斜面向上；但 P 較大時，斜面推向質點的力足夠大，摩擦力必須沿斜面向下，才能阻止質點沿斜面上移。

垂直斜面方向（向外法線）：

$$N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\cos\alpha + P\sin\alpha].$$

由於 $P > 0$ 且 α 是銳角，此式為正，所以不需要絕對值，而質點亦保持與斜面接觸。

第 (iii) 部分

質點相對稜柱保持靜止，當且僅當摩擦力足以提供所需：$F \le \mu N$。設 $G = (M+m)g$，並約去正因子 $m/(M+m)$：

$$|G\sin\alpha - P\cos\alpha| \le \tan\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

乘以 $\cos\lambda > 0$，這等價於以下一對不等式（inequalities）：

$$-\sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha) \;\le\; \cos\lambda\,(G\sin\alpha - P\cos\alpha) \;\le\; \sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

> ? **想一想** 這些不等式如何變成 $\alpha \pm \lambda$ 的正切？

把含 G 的項移到一邊，含 P 的項移到另一邊；這樣每個括號都是一個複角展開式。

右邊的不等式（沿斜面向上的摩擦力不可超過其極限）：

$$G(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda) \le P(\cos\alpha\cos\lambda + \sin\alpha\sin\lambda),$$
$$G\sin(\alpha-\lambda) \le P\cos(\alpha-\lambda).$$

由於 $0 < \alpha - \lambda < \frac{1}{4}\pi$，有 $\cos(\alpha-\lambda) > 0$，所以此式即 $P \ge G\tan(\alpha-\lambda)$。

左邊的不等式（沿斜面向下的摩擦力不可超過其極限）：

$$P(\cos\alpha\cos\lambda - \sin\alpha\sin\lambda) \le G(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda),$$
$$P\cos(\alpha+\lambda) \le G\sin(\alpha+\lambda).$$

這裏要用到條件 $\lambda < \alpha < \frac{1}{4}\pi$：它給出 $0 < \alpha+\lambda < \frac{1}{2}\pi$，所以 $\cos(\alpha+\lambda) > 0$，可以相除得 $P \le G\tan(\alpha+\lambda)$。

兩式必須同時成立，故

$$(M+m)g\tan(\alpha-\lambda) \le P \le (M+m)g\tan(\alpha+\lambda),$$

與題目所求相符。

驗算

- 當 $P = 0$ 時，下界給出 $0 \ge G\tan(\alpha-\lambda)$，由於 $\lambda < \alpha$，此式不成立：這與第 (i) 部分一致，因為 $\mu = \tan\lambda < \tan\alpha$。
- 當 $P = G\tan\alpha$ 時得 $f = 0$：此時的推力恰好令光滑質點能靜止不動，這正是熟悉的「加速楔子」結果 $a = g\tan\alpha$。這個值理應落在區間之內，事實亦然。

- 數值上，取 $M = 3$、$m = 1$、$g = 9.8$、$\alpha = 30°$、$\lambda = 10°$，容許範圍是 $14.27 \le P \le 32.89$（牛頓）。當 $P = 20$ 時，公式給出 $F \approx 0.570$ 及 $N \approx 10.99$，所以 $F/N \approx 0.052 < \tan 10° \approx 0.176$。用電腦對數以千計的隨機情況直接解質點的方程，結果與兩條公式及該區間都吻合。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分取 $N = mg\cos\alpha$：斜面正在加速，所以法向反作用力並非靜止時的數值。
- 漏掉絕對值，結果只求得 P 的下界；上界來自摩擦力沿斜面向下的情況。
- 除以 $\cos(\alpha + \lambda)$ 時沒有指出它是正數；這正是用到 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ 的地方。

STEP 之外

更簡潔的看法是在稜柱的參考系中處理問題，該參考系以 a 加速：在其中，質點會受到一個向後的額外「虛擬力」(fictitious force) ma，問題就變成在粗糙斜面上的普通靜力學，只是等效重力傾側了 $\arctan(a/g)$ 這個角度。此時條件就是：這個傾側角與 α 的差必須在摩擦角（angle of friction）λ 之內，這正好就是所求得的區間。非慣性參考系（non-inertial frames）與虛擬力在 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）中有詳細闡述。

詳細解答

STEP II 2024，第 11 題

概率與統計 • 分組檢測的期望值

STEP II 2024，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

只有當混合樣本的檢測通常呈陰性時，合併檢測（pooling）才划算；而每人的期望（expected）檢測次數原來是 $1+\frac{1}{k}-(1-p)^k$。要問這個數何時不超過 1，就變成比較 $(1-p)$ 與 $k^{-1/k}$ 的大小，這正是第 (i) 部分要討論 $x^{1/x}$ 的原因：當 p 較大時，最佳的組別人數就是使 $k^{1/k}$ 最大的那個整數。

解答

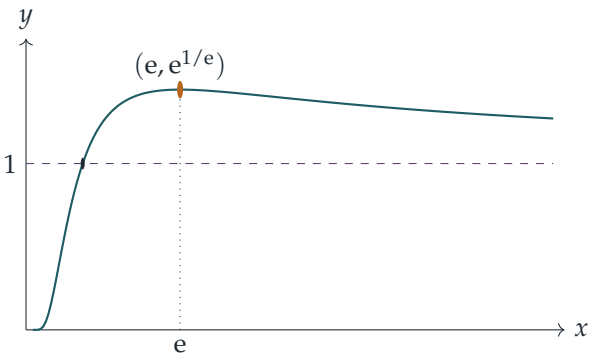
第 (i) 部分

對 $x>0$，記 $y=x^{1/x}=\mathrm{e}^{(\ln x)/x}$，於是 $\ln y=\dfrac{\ln x}{x}$。求導（differentiating）得

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

由於 $y>0$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 與 $1-\ln x$ 同號：當 $0<x<\mathrm{e}$ 時為正，在 $x=\mathrm{e}$ 時為零，當 $x>\mathrm{e}$ 時為負。因此曲線只有一個轉折點（turning point），即位於 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}})\approx(2.72,\,1.44)$ 的極大值（maximum）點。

至於圖像兩端：當 $x\to 0^+$ 時，$(\ln x)/x\to-\infty$，所以 $y\to 0$；當 $x\to\infty$ 時，$(\ln x)/x\to 0$，所以 $y\to 1$，且從上方趨近（因為對 $x>1$ 有 $\ln y>0$）。曲線經過點 $(1,1)$。



對正整數 n 而言，此函數在 $(0, \mathrm{e}]$ 上遞增，在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上遞減，所以 $1^{1/1} < 2^{1/2}$ 且 $3^{1/3} > 4^{1/4} > 5^{1/5} > \cdots$。因此最大值是 $2^{1/2}$ 或 $3^{1/3}$。把兩者都升到六次方，得 $2^3 = 8$ 和 $3^2 = 9$，所以 $3^{1/3} > 2^{1/2}$，且

$$\max_n n^{1/n} = 3^{1/3}.$$

第 (ii) 部分

記 $q = 1 - p$。考慮一組 k 人。由獨立性（independence），組內無人帶有該酶的概率是 q^k，而只有在這種情況下混合樣本才呈陰性。所以該組所用的檢測次數為

$$\begin{cases} 1 \text{ 次檢測} & \text{概率為} q^k, \\ 1 + k \text{ 次檢測} & \text{概率為} 1 - q^k, \end{cases}$$

其期望檢測次數是 $1 + k(1 - q^k)$。共有 $r = N/k$ 組，而期望值具可加性，所以期望總次數為

$$E = \frac{N}{k}\left(1 + k(1 - q^k)\right) = N\left(1 + \frac{1}{k} - (1-p)^k\right).$$

第 (iii) 部分

由第 (ii) 部分，$E \le N$ 當且僅當

$$\frac{1}{k} \le (1-p)^k \iff 1 - p \ge k^{-1/k} = \frac{1}{k^{1/k}},$$

這裏取了正的 k 次方根（兩邊均為正數，而 $t \mapsto t^{1/k}$ 是遞增的）。

想一想 哪個 k 容許最大的 p？

對給定的 k，條件是 $p \le 1 - k^{-1/k}$，而當 $k^{1/k}$ 最大時，這個上界也最大。由第 (i) 部分，對每個整數 $k > 1$ 都有 $k^{1/k} \le 3^{1/3}$，所以無論選哪個 k，都必須有 $p \le 1 - 3^{-1/3}$。反過來，N 是 3 的倍數，所以 $k = 3$ 是容許的組別人數，而取 $k = 3$ 時條件正好是

$p \le 1 - 3^{-1/3}$（等號成立時 $E = N$）。因此最大值為

$$p = 1 - 3^{-1/3} \approx 0.307.$$

要證明這個值大於 $\frac{1}{4}$：

$$1 - 3^{-1/3} > \tfrac{1}{4} \iff 3^{-1/3} < \tfrac{3}{4} \iff \tfrac{1}{3} < \tfrac{27}{64} \iff 64 < 81,$$

其中中間一步兩邊取立方（對正數而言，取立方保持大小次序）。最後一個式子成立，所以 $1 - 3^{-1/3} > \frac{1}{4}$。

第 (iv) 部分

由二項式展開（binomial expansion），

$$(1-p)^k = 1 - kp + \binom{k}{2}p^2 - \cdots.$$

若 pk 很小，則 $\binom{k}{2}p^2 < \frac{1}{2}(pk)^2$ 更小得多，之後各項亦然，所以 $(1-p)^k \approx 1 - pk$。代入第 (ii) 部分的結果，

$$E \approx N\left(1 + \frac{1}{k} - (1 - pk)\right) = N\left(\frac{1}{k} + pk\right).$$

（事實上，伯努利不等式（Bernoulli's inequality）$(1-p)^k \ge 1 - pk$ 表明這個近似永遠不會低估 E；而把展開式多保留一項，則可證明誤差最多為 $\frac{1}{2}(pk)^2 N$。）

取 $p = 0.01$ 和 $k = 10$，得 $pk = 0.1$，確實很小，而

$$E \approx N\left(\frac{1}{10} + 0.1\right) = 0.2N,$$

所以這個方案只需約 20% 的檢測次數，相比之下逐一檢測每個人需要 N 次。

驗算

- 取 $p = 0.01$ 和 $k = 10$ 作精確計算：$E/N = 1.1 - 0.99^{10} \approx 1.1 - 0.9044 = 0.1956$，約為 19.6%，與近似值之差在誤差上界 $\frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.005$ 之內。
- 當 $p = 1 - 3^{-1/3}$ 且 $k = 3$ 時：$(1-p)^3 = \frac{1}{3}$，所以 $E = N(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = N$，剛好落在邊界上。
- 檢查第 (ii) 部分是否合理：當 $p \to 0$ 時，$E \to N/k$（每組一次檢測）；當 $p \to 1$ 時，$E \to N(1 + \frac{1}{k})$（每組都要重新逐一檢測）。此公式亦已用電腦逐一列舉小組別的所有結果加以驗證。

常見錯誤

- 第 (i) 部分答 $e^{1/e}$：n 必須是整數，所以應比較 $2^{1/2}$ 與 $3^{1/3}$。
- 第 (iii) 部分只驗證了 $k = 3$，卻沒有解釋為何其他組別人數不可能容許更大的 p。
- 在呈陽性的組別中漏計混合檢測本身，得出 k 次而非 $k+1$ 次檢測。

STEP 之外

這就是 Dorfman 的羣組檢測（group testing）方案，它在第二次世界大戰期間為篩查士兵的血液樣本而設計，後來在 COVID-19 檢測中再度被採用。把 $\frac{1}{k} + pk$ 最小化，得 $k \approx 1/\sqrt{p}$（所以這裏 $k = 10$ 是最佳選擇），而所需檢測次數約為 $2\sqrt{p}\,N$；資訊理論（information theory）中研究的更巧妙的自適應（adaptive）方案，效果還要更好。關於背後的概率理論，可參閱 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）。

詳細解答

STEP II 2024，第 12 題

概率與統計 • 離散順序統計量

STEP II 2024，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

在第一個遊戲中，勝出者是持有唯一最小數字的玩家，而這樣的玩家最多只有一個。因此「有勝出者」可以按照誰勝出、以哪個數字勝出，分拆成互斥（disjoint）的情況，而每一種情況都只是若干獨立（independent）概率的簡單乘積。題目給出 $\sum i^2$ 和 $\sum i^3$ 的公式，正是提示所得的和是多項式求和。第二個遊戲的做法相同，只是現在要考慮一對有序的玩家（一個最低、一個最高），並要對兩個數字求和。

解答

在整個解答中，k 個數字互相獨立，且每個都在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上均勻分佈（uniform），因此任何一位玩家得到任何一個特定數字的概率都是 $\frac{1}{n}$，而得到某個含 s 個值的集合中的數字的概率是 $\frac{s}{n}$。

第 (i) 部分

固定 a，其中 $1 \leq a \leq n-1$。Ada 必須得到 a（概率為 $\frac{1}{n}$），而其餘 $k-1$ 位玩家每人都必須得到 $a+1, \ldots, n$ 這 $n-a$ 個數字之一（每人的概率為 $\frac{n-a}{n}$）。由獨立性，

$$\mathrm{P}(\text{Ada 得到}a\text{, 其他人全部較大}) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-a}{n}\right)^{k-1} = \frac{(n-a)^{k-1}}{n^k}.$$

（當 $a = n$ 時此概率為零，這就是 a 只取到 $n-1$ 的原因。）

設 W 為有勝出者的事件。勝出者所持的數字嚴格小於其他所有人的數字，所以不可能有兩個勝出者：否則兩者都必須比對方小。因此 W 是以下事件的互斥並集：對 k 位玩家及 $a = 1, \ldots, n-1$，事件「這位玩家得到 a，而其他人都得到較大的數字」。由對稱性

(symmetry)，每位玩家的貢獻都與 Ada 相同，所以

$$\mathrm{P}(W) = k\sum_{a=1}^{n-1}\frac{(n-a)^{k-1}}{n^k} = \frac{k}{n^k}\sum_{j=1}^{n-1} j^{k-1},$$

其中我們代入了 $j = n-a$，它同樣由 1 取到 $n-1$。

當 $k=4$ 時，利用題目給出的 $\sum i^3$ 公式，並以 $n-1$ 代替 n，

$$\mathrm{P}(W) = \frac{4}{n^4}\cdot\frac{1}{4}(n-1)^2n^2 = \frac{(n-1)^2}{n^2},$$

即為所求。

第 (ii) 部分

固定 d 和 a，其中 $1 \le d \le n-2$ 且 $1 \le a \le n-d-1$；這些條件保證 $a+d+1 \le n$，並且 a 與 $a+d+1$ 之間至少嚴格夾着一個數字。Ada 必須得到 a，Bob 必須得到 $a+d+1$（各自的概率為 $\frac{1}{n}$），而其餘 $k-2$ 位玩家每人都必須得到 $a+1,\ldots,a+d$ 這 d 個數字之一。由獨立性，

$$\mathrm{P}(\text{Ada 得到}a,\ \text{Bob 得到}a+d+1,\ \text{其他人嚴格介乎兩者之間}) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{d}{n}\right)^{k-2} = \frac{d^{k-2}}{n^k}.$$

? **想一想** 為甚麼在對玩家以及對 a 和 d 求和時，每一種出現兩個勝出者的方式都恰好出現一次？

有兩個勝出者，即是一位玩家持有唯一最小的數字，而另一位玩家持有唯一最大的數字。與第 (i) 部分一樣，低位勝出者是唯一的，高位勝出者亦然，因此結果決定了一對*有序*的不同玩家（低位勝出者，高位勝出者），連同較小的數字 a 以及到較大數字的差距 $d \ge 1$：差距必須至少為 1，因為其餘 $k-2 \ge 2$ 位玩家的數字都嚴格介乎兩者之間。這些選擇不同，所得的事件就互斥。有序玩家對共有 $k(k-1)$ 對，每一對的貢獻都與（Ada，Bob）相同，所以

$$\mathrm{P}(\text{兩個勝出者}) = k(k-1)\sum_{d=1}^{n-2}\sum_{a=1}^{n-d-1}\frac{d^{k-2}}{n^k} = \frac{k(k-1)}{n^k}\sum_{d=1}^{n-2}(n-1-d)\,d^{k-2},$$

因為內層的和有 $n-d-1$ 個相等的項。

現在取 $k=4$，並記 $m=n-1$，於是 d 由 1 取到 $m-1$。利用題目給出的兩條公式，並以 $m-1$ 代替 n，

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{m-1}(m-d)\,d^2 &= m\cdot\tfrac{1}{6}(m-1)m(2m-1) - \tfrac{1}{4}(m-1)^2m^2\\ &= \tfrac{1}{12}m^2(m-1)\big[2(2m-1)-3(m-1)\big]\\ &= \tfrac{1}{12}m^2(m-1)(m+1).\end{aligned}$$

因此，由於 $m-1=n-2$ 及 $m+1=n$，

$$\mathrm{P}(\text{兩個勝出者})=\frac{12}{n^4}\cdot\frac{1}{12}(n-1)^2(n-2)n=\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3},$$

這正是所求的結果。

當 $k=4$ 時比較一個與兩個勝出者

設 L 為有玩家持有唯一最小數字的事件，H 為有玩家持有唯一最大數字的事件。第 (i) 部分給出 $\mathrm{P}(L)=\frac{(n-1)^2}{n^2}$。把每個數字 x 換成 $n+1-x$，會把均勻分佈的數字變成均勻分佈的數字，並把「最小」與「最大」互換，所以同樣有 $\mathrm{P}(H)=\mathrm{P}(L)$。

恰好兩個勝出者就是事件 $L\cap H$，因此記 $T=\mathrm{P}(L\cap H)=\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3}$。恰好一個勝出者，即是 L 或 H 發生但不同時發生，所以

$$\mathrm{P}(\text{恰好一個})=\mathrm{P}(L)+\mathrm{P}(H)-2\,\mathrm{P}(L\cap H)=\frac{2(n-1)^2}{n^2}-2T.$$

兩個勝出者比一個勝出者更有可能，當且僅當

$$\begin{aligned}T>\frac{2(n-1)^2}{n^2}-2T &\iff 3\cdot\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3}>\frac{2(n-1)^2}{n^2}\\ &\iff 3(n-2)>2n \iff n>6,\end{aligned}$$

其中我們除以正數 $\frac{(n-1)^2}{n^3}$（因為 $n\geq 3$，所以它是正數）。當 $n=6$ 時兩個概率相等，因此最小值是

$$n=7.$$

驗算

- 當 $n=3$ 及 $k=4$ 時共有 81 個結果。以 1 勝出需要其餘三個數字都在 $\{2,3\}$ 中：共 $4\cdot 2^3=32$ 個結果。以 2 勝出需要其餘三個都是 3：共 4 個結果。所以 $\mathrm{P}(W)=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}=\frac{(3-1)^2}{3^2}$。
- 當 $n=6$ 時，「恰好一個」和「恰好兩個」的概率都是 $\frac{25}{54}\approx 0.463$；當 $n=7$ 時，兩者分別是 $\frac{144}{343}\approx 0.420$ 和 $\frac{180}{343}\approx 0.525$。這些數值，以及兩部分中在 $n\leq 8$ 和 $k=2,3,4$ 時的公式，都已經用電腦逐一枚舉（enumeration）所有結果加以核實。
- 當 $n\to\infty$ 時，數字相同的情況變得罕見，所以有四位玩家時，幾乎總會同時有唯一最低和唯一最高的數字：的確 $\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3}\to 1$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分漏掉因子 k，或在第 (ii) 部分漏掉因子 $k(k-1)$。在第 (ii) 部分中，兩位勝出者是有序的，因為一位是低位、一位是高位。
- 把「恰好一個勝出者」算成 $\mathrm{P}(L)+\mathrm{P}(H)-\mathrm{P}(L\cap H)$，但這其實是「至少一個」；重疊部分必須減去兩次。
- 答 $n=6$：此時兩個概率相等，並非嚴格的大小關係。

STEP 之外

把一個事件按「誰」和「在哪裏」分拆成互斥的部分，是求順序統計量（order statistics）——即樣本中最小值和最大值——的分佈的離散版本。對於連續樣本，同樣的論證會給出最小值與最大值的聯合密度（joint density），而令本題變得有趣的數字相同情況亦會消失。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）是認識這些概念的好起點。

詳細解答

STEP III 2024，第 1 題

純數學 • 裂項相消級數

STEP III 2024，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

這裡每一個和都用同一方法處理：先把每項拆成部分分式（partial fractions），找出其中屬於 $1/r^2$ 倍數的部分（它們加起來是 S_N 的倍數），再把其餘部分整理成 $f(r)-f(r+1)$ 形式的差，這些差會裂項相消（telescope）。全程只處理到 N 為止的有限和，到最後每一部分都有已知極限時，才讓 $N\to\infty$。

解答

第 (i) 部分

以 $r^2(r+1)$ 為公分母，

$$\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}=\frac{r^2-r(r+1)+(r+1)}{r^2(r+1)}=\frac{r^2-r^2-r+r+1}{r^2(r+1)}=\frac{1}{r^2(r+1)},$$

得證。

現在由 $r=1$ 加到 N。各 $1/r^2$ 項之和為 S_N，其餘兩項則裂項相消：

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}\right)=\left(\tfrac{1}{2}-1\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{N+1}-\tfrac{1}{N}\right)=\frac{1}{N+1}-1.$$

因此

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{r^2(r+1)}=S_N-1+\frac{1}{N+1}.$$

當 $N\to\infty$ 時，$S_N\to\tfrac{1}{6}\pi^2$ 而 $\tfrac{1}{N+1}\to 0$，所以右方趨於 $\tfrac{1}{6}\pi^2-1$。按定義，無窮和就是

部分和（partial sums）的極限，所以

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)} = \tfrac{1}{6}\pi^2 - 1.$$

第 (ii) 部分

設

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r+1} + \frac{D}{r+2}.$$

兩邊乘以 $r^2(r+1)(r+2)$，並使用遮蓋法（cover-up rule）：代入 $r=0$ 得 $B = \frac{1}{2}$；$r=-1$ 得 $C = \frac{1}{(-1)^2 \cdot 1} = 1$；$r=-2$ 得 $D = \frac{1}{4\cdot(-1)} = -\frac{1}{4}$。當 r 很大時，左方的數量級為 $1/r^4$，所以右方各 $1/r$ 項必須互相抵消：$A + C + D = 0$，得 $A = -\frac{3}{4}$。所以

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{1}{2r^2} - \frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)}.$$

? **想一想** $-\frac{3}{4r}$、$\frac{1}{r+1}$、$-\frac{1}{4(r+2)}$ 這三項看來不像單一個可裂項相消的差。怎樣才能令它們裂項相消？

把中間的係數拆成 $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$，使每一部分都可與相鄰的項配對：

$$-\frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)} = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right).$$

現在每個括號都會裂項相消：

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} &= \tfrac{1}{2}S_N - \tfrac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}S_N - \frac{5}{8} + \frac{3}{4(N+1)} - \frac{1}{4(N+2)}.\end{aligned}$$

令 $N \to \infty$，最後兩項趨於 0，而 $S_N \to \frac{1}{6}\pi^2$，所以

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{5}{8}.$$

第 (iii) 部分

目標式的右方有 $\frac{2}{r^2(r+1)}$，所以比較這兩項。利用第 (i) 部分，

$$\frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{2}{r+1} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r^2}.$$

另一方面，

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r(r+1)} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r+1},$$

其中兩步都用了 $\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} = \frac{1}{r(r+1)}$。相減得

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} - \frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{r^2},$$

即

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+1)^2}\right).$$

想一想 為甚麼不直接把無窮級數逐項相加？

只有在知道每一部分都收斂（converge）之後，重新排列無窮和才是安全的，所以我們先加到 N。括號部分裂項相消：

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{N} \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2}\right).$$

由第 (i) 部分，當 $N \to \infty$ 時右方第一個和收斂（至 $2(\frac{1}{6}\pi^2 - 1)$），而 $\frac{1}{(N+1)^2} \to 0$。所以左方亦收斂，並且

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r^2(r+1)} - 1,$$

得證。兩邊都等於 $\frac{1}{3}\pi^2 - 3$。

驗算

- 在第 (ii) 部分取 $N = 1$：和只有一項 $\frac{1}{6}$，而公式給出 $\frac{1}{2} - \frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{12} = \frac{12-15+9-2}{24} = \frac{1}{6}$。
- 數值上，$\frac{1}{6}\pi^2 - 1 \approx 0.644934$，$\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{5}{8} \approx 0.197467$，$\frac{1}{3}\pi^2 - 3 \approx 0.289868$。用電腦把每個級數的首一百萬項相加，三個數值都至少準確到小數點後九位。
- 三個部分中的有限恆等式，已用有理數運算對 N 直至 59 的每一個值逐一精確核實。

常見錯誤

- 弄錯裂項相消和的首尾項，尤其是 $\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}$ 的和，它由 $\frac{1}{2}$ 開始，而不是 1。
- 拆成像 $\sum \frac{1}{r}$ 這樣各自發散（diverge）的無窮級數，而不是把調和型（harmonic-type）的部分放在有限和中一併處理。

STEP 之外

$\sum 1/r^2 = \pi^2/6$ 這個值是歐拉（Euler）對巴塞爾問題（Basel problem）的解答，在大學裡通常用傅里葉級數（Fourier series）或 $\sin x$ 的乘積公式來證明。這裡對有限和的小心處理，正是分析學（analysis）課程要嚴格化的內容：級數就是其部分和的極限，收斂級數的和可以合併，發散級數則不可以。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）正是這樣處理級數的，很適合作為下一本讀物。

詳細解答

STEP III 2024，第 2 題

純數學 • 不等式與絕對值

STEP III 2024，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

本題中每個平方根（square root）內的式子都是恆為正的二次式（quadratic），而且每條不等式（inequality）的兩邊都是非負的，所以我們可以兩邊平方而不改變解集（solution set）。平方之後，每個問題都變成關於某個二次式正負號的命題（或者當 x^2 項互相抵消時，變成關於一個線性函數（linear function）的命題）。從幾何角度看，$y = \sqrt{4x^2 - 8x + 64}$ 是一條雙曲線（hyperbola）的上半部分，而題目中的直線則是它的弦（chord）和漸近線（asymptote）。

解答

第 (i) 部分

配方（completing the square）得 $4x^2 - 8x + 64 = 4(x-1)^2 + 60 > 0$，所以平方根對所有 x 都有定義。每條不等式的兩邊都是非負的，而對於 $A, B \geq 0$，我們有 $A \leq B \iff A^2 \leq B^2$。

(a) 兩邊平方，

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq x^2 + 16x + 64 &\iff 3x^2 - 24x \leq 0 \\ &\iff 3x(x-8) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 8. \end{aligned}$$

(b) 兩邊平方，

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq 9x^2 - 48x + 64 &\iff 0 \leq 5x^2 - 40x \\ &\iff 5x(x-8) \geq 0 \iff x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 8. \end{aligned}$$

在兩部分中，等號都在 $x = 0$（各邊均等於 8）和 $x = 8$（各邊均等於 16）時成立。

第 (ii) 部分

(a) 利用平方差（difference of two squares），

$$\left(\sqrt{4x^2 - 8x + 64} + 2(x-1)\right)\mathrm{f}(x) = (4x^2 - 8x + 64) - 4(x-1)^2 = 60.$$

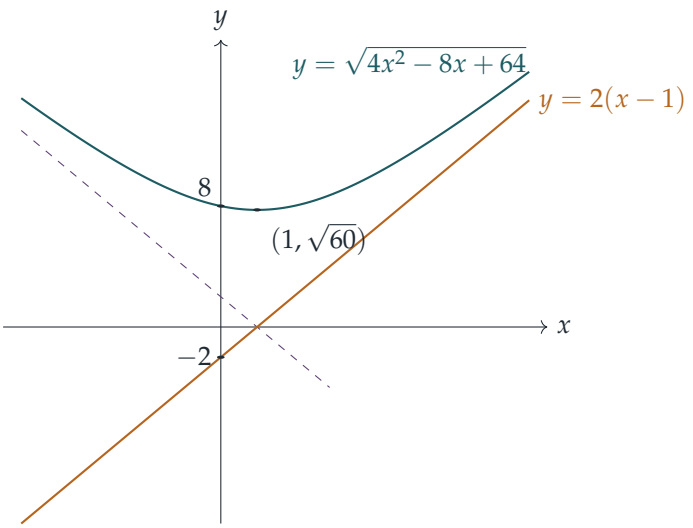
當 $x > 1$ 時，括號內的式子為正，所以可以相除：

$$\mathrm{f}(x) = \frac{60}{\sqrt{4x^2 - 8x + 64} + 2(x-1)}.$$

當 $x \to \infty$ 時，分母至少為 $2(x-1)$，而它趨向無窮大，所以 $\mathrm{f}(x) \to 0$，正如所求。

(b) 設 $y = \sqrt{4(x-1)^2 + 60}$。那麼 $y > 0$ 且 $y^2 - 4(x-1)^2 = 60$，所以這條曲線是一條以 $(1, 0)$ 為中心的雙曲線的上支。它關於 $x = 1$ 對稱，在 $x = 1$ 處取最小值 $\sqrt{60} = 2\sqrt{15} \approx 7.75$，並與 y 軸相交於 $(0, 8)$。

由於 $y > \sqrt{4(x-1)^2} = 2|x-1|$，曲線嚴格位於兩條直線 $y = \pm 2(x-1)$ 的上方。(a) 部分說明當 $x \to \infty$ 時，曲線趨近 $y = 2(x-1)$。由關於 $x = 1$ 的對稱性，當 $x \to -\infty$ 時，曲線趨近 $y = -2(x-1)$。直線 $y = 2(x-1)$ 的斜率（gradient）為 2，並經過 $(1, 0)$ 和 $(0, -2)$。



虛線是另一條漸近線 $y = -2(x-1)$。

第 (iii) 部分

同樣地，$4x^2-5x+4=4\left(x-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{39}{16}>0$，所以平方根總是有定義。把（非負的）兩邊平方，該不等式等價於

$$(m^2-4)x^2+(2mc+5)x+(c^2-4)\geq 0. \qquad (*)$$

想一想 $(*)$ 左邊是甚麼類型的式子，才可能恰好在 $x\geq 3$ 時非負？

若 $m^2-4>0$，當 $x\to-\infty$ 時左邊趨向 $+\infty$，於是非常負的 x 也會滿足 $(*)$。若 $m^2-4<0$，當 $x\to+\infty$ 時左邊趨向 $-\infty$，於是很大的 x 會不滿足。兩者都不容許，所以 $m^2=4$，而 $(*)$ 變成線性不等式。線性不等式 $ax+b\geq 0$ 的解集為 $\{x:x\geq 3\}$，當且僅當 $a>0$ 且 $3a+b=0$。

取 $m=2$。那麼 $a=4c+5$，$b=c^2-4$，所以我們需要

$$3(4c+5)+c^2-4=c^2+12c+11=(c+1)(c+11)=0, \qquad 4c+5>0.$$

根 $c=-11$ 給出 $a=-39<0$，不符合。根 $c=-1$ 給出 $a=1>0$。所以

$$m=2, \qquad c=-1$$

可行。驗證一下：$(2x-1)^2-(4x^2-5x+4)=x-3$，它恰好在 $x\geq 3$ 時非負。（取 $m=-2$、$c=1$ 會得到相同的 $|mx+c|$，同樣成立。）

第 (iv) 部分

設 $g(x)=x^2+px+q$，$L(x)=mx+c$。由於 $|g|\leq L \iff -L\leq g\leq L$，該不等式成立當且僅當以下兩者同時成立：

$$g(x)-L(x)\leq 0 \qquad 及 \qquad g(x)+L(x)\geq 0.$$

$g-L$ 和 $g+L$ 都是首項係數（leading coefficient）為 1 的二次式。

- 使 $g-L\leq 0$ 的集合是一個閉區間 $[a,b]$（可能是空集或單一點）。
- 使 $g+L\geq 0$ 的集合是全體實數除去一個開區間 (r,s)。若 $g+L$ 沒有實根，則甚麼都不用除去。

所以解集是 $[a,b]$ 除去 (r,s)。要使它等於 $[-5,1]\cup[5,7]$，我們需要 $a=-5$ 及 $b=7$（外側兩端），而被除去的空隙必須恰好是 $(1,5)$，所以 $r=1$，$s=5$。因此

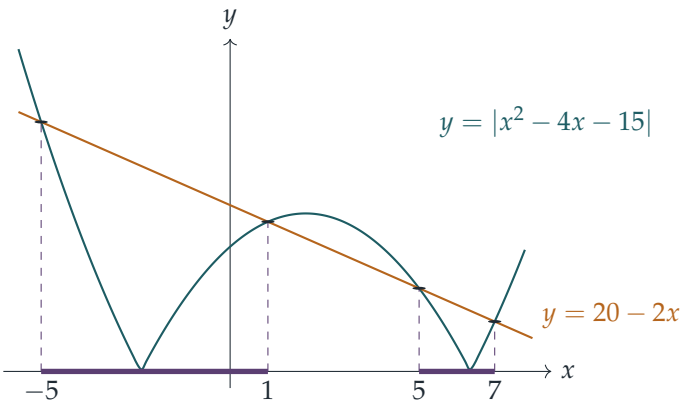
$$g(x)-L(x)=(x+5)(x-7)=x^2-2x-35,$$
$$g(x)+L(x)=(x-1)(x-5)=x^2-6x+5.$$

兩式相加再除以二，得 $g(x) = x^2 - 4x - 15$。兩式相減再除以二，得 $L(x) = -2x + 20$。因此

$$p = -4, \qquad q = -15, \qquad m = -2, \qquad c = 20.$$

以上每一步都是可逆的，所以取這些值時，解集確實是 $[-5,1] \cup [5,7]$：我們需要 $(x+5)(x-7) \le 0$ 及 $(x-1)(x-5) \ge 0$。這些值也是唯一可行的值。

在圖中，g 的根為 $2 \pm \sqrt{19} \approx -2.36,\ 6.36$。直線 $y = 20 - 2x$ 在 $x = -5$ 和 $x = 7$ 處與 $|g|$ 的外側兩臂相交，並在 $x = 1$ 和 $x = 5$ 處穿過被反射上來的拱形部分。



驗算

- 在 (ii)(a) 中，當 $x = 100$ 時，$f(100) = \sqrt{39264} - 198 \approx 0.151$，與 $60/(\sqrt{39264} + 198) \approx 0.151$ 吻合。
- 在 (iv) 中，當 $x = 0$ 時：$|-15| = 15 \le 20$，所以 0 是解。當 $x = 3$ 時：$|9 - 12 - 15| = 18 > 14$，所以 3 不是解。當 $x = 8$ 時：$|64 - 32 - 15| = 17 > 4$，所以 8 不是解。這些都與 $[-5,1] \cup [5,7]$ 相符。用電腦在 x 的細密網格上檢查，亦確認了全部四個解集。

常見錯誤

- 兩邊平方卻沒有說明為何可以這樣做。這裏之所以成立，只因為兩邊都是非負的。
- 在 (iii) 中保留真正的二次式。二次不等式的解集不可能是單側的半直線，所以 x^2 項必須抵消。
- 在 (iv) 中把端點配對錯了：外側兩端 $-5, 7$ 屬於 $g - L$，而內側兩端 $1, 5$（即空隙）屬於 $g + L$。

STEP 之外

曲線 $y^2 - 4(x-1)^2 = 60$ 是一條雙曲線，而第 (ii) 部分展示了如何求漸近線：把曲線與候選直線之差有理化（rationalise）。同樣的技巧——乘以「共軛式」（conjugate）——是大學一年級分析（analysis）中求極限的標準工具。像 (iv) 那樣把 $|g| \leq L$ 寫成兩個單側條件，正是那裏處理含絕對值（absolute value）不等式的慣常做法。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是很好的下一步讀物。

詳細解答

STEP III 2024，第 3 題

純數學 • 單調函數與導數

STEP III 2024，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

一切都取決於一個導數（derivative）。把 g 求導並通分後，分子（numerator）會化簡成一個關於 x 的線性（linear）式子，因此它的正負一眼就能看出。與第 (iii) 部分的聯繫在於：g 恰好就是 $\ln f$ 的導數。所以 g 的正負（第 (ii) 部分的草圖把它直觀地呈現出來）決定了 f 是上升還是下降。

解答

第 (i) 部分

由於 $x > 0$，可寫成 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x$。於是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)} = -\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)^2},$$

而以分母（denominator）x^2+x 運用商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x+c}{x^2+x} = \frac{(x^2+x)-(x+c)(2x+1)}{x^2(x+1)^2} = \frac{-x^2-2cx-c}{x^2(x+1)^2}.$$

兩式相減，x^2 項互相抵消：

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{-x^2-x+x^2+2cx+c}{x^2(x+1)^2} = \frac{(2c-1)x+c}{x^2(x+1)^2}.$$

分母為正，所以 $\mathrm{g}'(x)$ 的正負與 $N(x) = (2c-1)x + c$ 的正負相同。

(a) 若 $c \geq \frac{1}{2}$，則 $(2c-1)x \geq 0$ 且 $c \geq \frac{1}{2} > 0$，所以對每個 $x > 0$ 都有 $N(x) > 0$。因此對所有 $x > 0$，斜率（gradient）均為正。

(b) 若 $0 \le c < \frac{1}{2}$，則 $1-2c>0$，而

$$N(x)<0 \iff (1-2c)x > c \iff x > \frac{c}{1-2c}.$$

所以斜率為負當且僅當 $x > \dfrac{c}{1-2c}$。（當 $c=0$ 時，這就是所有 $x>0$。）記 $x_0 = \dfrac{c}{1-2c}$。當 $c>0$ 時，g 在 $(0, x_0]$ 上遞增，在 $[x_0, \infty)$ 上遞減。

第 (ii) 部分

我們還需要知道 x 很大時的情況。g 的兩項都趨向 0，所以 $\mathrm{g}(x) \to 0$，但草圖應該顯示它從哪一側趨近。利用 $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots$，取 $t = \frac{1}{x}$，再加上 $\dfrac{x+c}{x(x+1)} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{c}{x^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x} + \cdots\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{c-1}{x^2} + \cdots$，得到

$$\mathrm{g}(x) = \frac{\frac{1}{2} - c}{x^2} + \cdots \quad \text{對很大的} x.$$

想一想 若 g 遞增並趨向 0，它必定位於軸的哪一側？

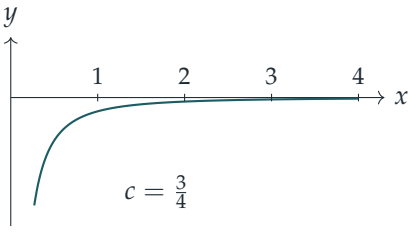
它必定在軸下方。若 g 嚴格遞增，則對任何 x，所有 $y > x$ 都有 $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(y)$；令 $y \to \infty$ 便得 $\mathrm{g}(x) < 0$（嚴格不等，因為 $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x+1) \le 0$）。同理，一個趨向 0 的嚴格遞減函數必定為正。

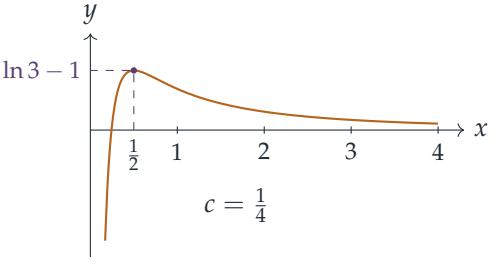
(a) $c = \frac{3}{4}$。由 (i)(a)，g 處處遞增。它從 $-\infty$（當 $x \to 0$）上升趨向 0，並一直留在軸下方。它以 $-\frac{1}{4x^2}$ 的方式趨近，所以永不穿過軸，也沒有轉向點。例如 $\mathrm{g}(1) = \ln 2 - \frac{7}{8} \approx -0.18$。

(b) $c = \frac{1}{4}$。這時 $x_0 = \dfrac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$。曲線從 $-\infty$ 上升至 $x = \frac{1}{2}$ 處的極大值，其中

$$\mathrm{g}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln 3 - \frac{3/4}{3/4} = \ln 3 - 1 \approx 0.099 > 0.$$

之後它從上方以 $\frac{1}{4x^2}$ 的方式遞減趨向 0。在 $[\frac{1}{2}, \infty)$ 上它遞減至 0，所以在那裏為正。在 $(0, \frac{1}{2})$ 上它從 $-\infty$ 遞增至一個正值，所以恰好穿過軸一次，位置略小於 $\frac{1}{4}$（數值上 $x \approx 0.243$）。





（兩圖的縱向比例不同：右圖經過拉伸，好讓那個細小的正值隆起看得見。兩圖中 y 軸都是漸近線（asymptote）。）

第 (iii) 部分

由於對 $x > 0$ 有 $\mathrm{f}(x) > 0$，我們可以取對數（logarithm）：

$$\ln \mathrm{f}(x) = (x + c) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

用積法則（product rule）求導，並利用 (i) 中的導數，

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + (x + c) \cdot \left(-\frac{1}{x(x+1)}\right) = \mathrm{g}(x).$$

所以 $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)$，又因 $\mathrm{f}(x) > 0$，f' 與 g 同號。另外留意，對每個 c，當 $x \to \infty$ 時 $\mathrm{g}(x) \to 0$，因為它的兩項都趨向 0。

(a) $c \geq \frac{1}{2}$。由 (i)(a)，g 在 $x > 0$ 上嚴格遞增並趨向 0。由 (ii) 中方框之後的論證，對所有 $x > 0$ 有 $\mathrm{g}(x) < 0$。因此 $\mathrm{f}'(x) < 0$，f 是遞減的。

(b) $0 < c < \frac{1}{2}$。由 (i)(b)，g 在 $[x_0, \infty)$ 上嚴格遞減並趨向 0，所以在那裏 $\mathrm{g} > 0$；特別地 $\mathrm{g}(x_0) > 0$。在 $(0, x_0]$ 上，g 連續（continuous）且嚴格遞增，而當 $x \to 0$ 時 $\mathrm{g}(x) \to -\infty$（題目已給出，因為 $c > 0$）。因此它恰好在一點 $x_1 \in (0, x_0)$ 取值 0，並在 $(0, x_1)$ 上 $\mathrm{g} < 0$，在 (x_1, ∞) 上 $\mathrm{g} > 0$。所以 $\mathrm{f}'(x_1) = 0$，而 f' 在該處由負變正。因此 f 在 x_1 有一個轉向點（turning point）（極小值）。

> ? **想一想** 為甚麼單憑 $\mathrm{f}'(x_1) = 0$ 並不足夠？

駐點（stationary point）不一定是轉向點（想想 $y = x^3$ 在原點的情況）。令 x_1 成為轉向點的，是 f' 的變號，而這正是 g 的形狀所提供的。

(c) $c = 0$。這時對所有 $x > 0$ 有 $\mathrm{g}'(x) = \dfrac{-x}{x^2(x+1)^2} < 0$，所以 g 嚴格遞減並趨向 0。因此對所有 $x > 0$ 有 $\mathrm{g}(x) > 0$，於是 $\mathrm{f}'(x) > 0$，而 $\mathrm{f}(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 是遞增的。

驗算

- 在某一點以數值方法對 g 求導，例如 $x = 1$、$c = \frac{1}{4}$：公式給出 $\mathrm{g}'(1) = \frac{-1/2+1/4}{4} = -\frac{1}{16}$，與差商（difference quotient）吻合。
- $c = \frac{1}{4}$：$\mathrm{g}(0.2) \approx -0.083$ 而 $\mathrm{g}(0.3) \approx 0.056$，與在 0.243 附近唯一一次穿過軸一致。對 $c = \frac{3}{4}$，$\mathrm{g}(3) \approx -0.025$，仍然剛好在軸下方。
- 在 (iii)(b) 中取 $c = \frac{1}{4}$，f 的極小值位於同一個 $x \approx 0.243$；用電腦在細密網格上檢查 f，對 $(0, \frac{1}{2})$ 中多個 c 值都恰好找到一個轉向點。

- 對 $c = 0$，$\mathrm{f}(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ 遞增至 e；對 $c = 1$，$(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ 遞減至 e。這正是大家熟悉、從兩邊夾住 e 的那對數列（sequences）。

常見錯誤

- 單憑「g 遞增」就斷定 $\mathrm{g} < 0$。你還需要當 $x \to \infty$ 時的極限 $\mathrm{g} \to 0$。
- 在 (ii)(b) 中把曲線畫成一直為負。極大值 $\ln 3 - 1$ 雖小但為正，所以曲線必須穿過軸，然後從上方回落趨近軸。
- 對 $(1 + \frac{1}{x})^{x+c}$ 求導時把指數當作常數。應先取對數。

STEP 之外

$(1 + \frac{1}{x})^x$ 遞增而 $(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ 遞減、兩者都趨向 e，這是大學一年級證明定義 e 的極限存在的經典方法。它是單調收斂定理（monotone convergence theorem）的一個例子。這道題找出了行為轉變的精確臨界值 $c = \frac{1}{2}$，而展開式 $\mathrm{g}(x) \approx (\frac{1}{2} - c)/x^2$ 解釋了原因。想進一步了解單調數列與極限，可以讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2024，第 4 題

純數學 • 拋物線的切線

STEP III 2024，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

一切都取決於兩直線夾角的 tan 公式，而這其實只是 $\tan(A-B)$ 公式換了個面貌。一旦知道在 $x=p$ 和 $x=q$ 處的切線（tangent）相交於點 (X,Y)，而 $p+q$ 和 pq 都可以用 X 和 Y 表示，那麼任何關於夾角的條件（涉及 $(p-q)^2$ 和 pq）都可以單純用 X 和 Y 改寫。改寫後的條件就是所求的軌跡（locus）。

解答

第 (i) 部分

設兩直線與 x 軸正方向分別成 α 角和 β 角，於是 $m_1=\tan\alpha$，$m_2=\tan\beta$（兩直線都有斜率（gradient），所以都不是鉛垂線）。兩直線的夾角在不計正負號及加上 180° 的倍數的意義下等於 $\alpha-\beta$。若兩者之間的銳角為 45°，則 $\alpha-\beta$ 等於 $\pm45^\circ$ 加上 180° 的某個倍數；由於 tan 的週期為 180°，

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\pm45^\circ)=\pm1.$$

特別地，$\cos(\alpha-\beta)\neq 0$，所以複角公式（compound-angle formula）適用，且 $1+m_1m_2\neq 0$：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

因此 $\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm1$，得證。更一般地，兩直線之間的銳角 θ 滿足 $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$，我們會在第 (iii) 部分用到這一點。

第 (ii) 部分

在 C 上有 $y=\dfrac{x^2}{4a}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{2a}$。在 $\left(p,\frac{p^2}{4a}\right)$ 處的切線為

$$y-\frac{p^2}{4a}=\frac{p}{2a}(x-p)\quad\Longleftrightarrow\quad y=\frac{p}{2a}x-\frac{p^2}{4a},$$

同樣，在 $x=q$ 處的切線為 $y=\dfrac{q}{2a}x-\dfrac{q^2}{4a}$。兩式相減，

$$\frac{p-q}{2a}\,x=\frac{p^2-q^2}{4a}=\frac{(p-q)(p+q)}{4a}.$$

由於 $p\neq q$，可以除以 $p-q$，得 $x=\frac{1}{2}(p+q)$，得證。代入第一條切線，

$$y=\frac{p(p+q)}{4a}-\frac{p^2}{4a}=\frac{pq}{4a}.$$

所以兩切線相交於

$$(X,Y)=\left(\tfrac{1}{2}(p+q),\,\frac{pq}{4a}\right),\qquad\text{所以}\qquad p+q=2X,\quad pq=4aY.\qquad(*)$$

現在假設在 $x=p$ 和 $x=q$ 處的切線互成 45°。它們顯然是不同的直線，所以 $p\neq q$，且 $(*)$ 成立。兩者的斜率為 $m_1=\frac{p}{2a}$ 和 $m_2=\frac{q}{2a}$，所以

$$\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{(p-q)/(2a)}{1+pq/(4a^2)}=\frac{2a(p-q)}{4a^2+pq}.$$

由第 (i) 部分，此式等於 ±1；平方後可消去正負號：

$$4a^2(p-q)^2=(4a^2+pq)^2.$$

想一想 條件涉及的是 $p-q$ 而不是 $p+q$，我們怎樣消去 p 和 q？

利用 $(p-q)^2=(p+q)^2-4pq$，這是對稱（symmetric）的表達式，所以可以應用 $(*)$：

$$(p-q)^2=4X^2-16aY,\qquad 4a^2+pq=4a^2+4aY=4a(a+Y).$$

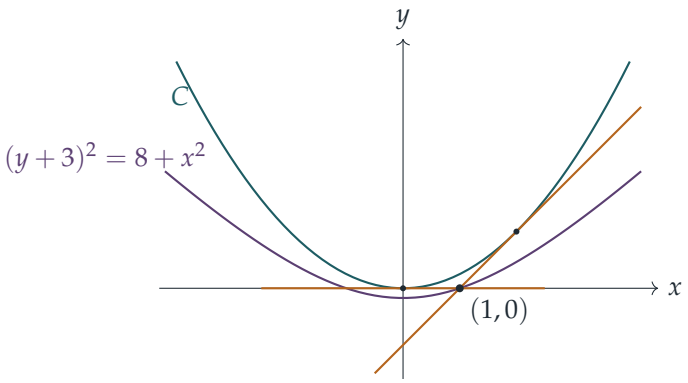
條件變成

$$4a^2\left(4X^2-16aY\right)=16a^2(a+Y)^2.$$

兩邊除以 $16a^2$（因為 $a\neq0$，所以可以這樣做），

$$X^2-4aY=Y^2+2aY+a^2,$$
$$\text{所以}\qquad X^2+8a^2=Y^2+6aY+9a^2=(Y+3a)^2.$$

因此交點位於 $(y+3a)^2=8a^2+x^2$ 上，得證。



取 $a = 1$：在 $x = 2$ 處（斜率 1）和 $x = 0$ 處（斜率 0）的切線互成 45°，兩者相交於 $(1, 0)$，這點位於雙曲線（hyperbola）的上支上。

第 (iii) 部分

設 (X, Y) 是 $(y + 7a)^2 = 48a^2 + 3x^2$ 上的一點，而 C 在 $x = p$ 和 $x = q$（$p \neq q$）處的兩條切線相交於此點，所以 $(*)$ 成立。根據第 (i) 部分末尾的說明，兩切線之間的銳角 θ 滿足

$$\tan^2\theta = \left(\frac{2a(p-q)}{4a^2+pq}\right)^2 = \frac{4a^2(4X^2-16aY)}{16a^2(a+Y)^2} = \frac{X^2-4aY}{(Y+a)^2},$$

這裏用了與第 (ii) 部分相同的代換。（若 $Y = -a$，兩切線會互相垂直；下面會證明這在此曲線上不可能發生。）

想一想 曲線的方程怎樣幫助我們處理 $X^2 - 4aY$？

展開曲線的方程：$Y^2 + 14aY + 49a^2 = 48a^2 + 3X^2$，即

$$3X^2 = Y^2 + 14aY + a^2.$$

於是

$$3(X^2 - 4aY) = Y^2 + 14aY + a^2 - 12aY = Y^2 + 2aY + a^2 = (Y + a)^2.$$

由此得出兩個結果。第一，$Y \neq -a$：否則 $X^2 - 4aY = 0$，即 $X^2 = -4a^2$，但 $a \neq 0$，這是不可能的。所以 $X^2 - 4aY = \frac{1}{3}(Y + a)^2 > 0$，這也確認了該點位於 C 之外：以 p 和 q 為根的二次方程 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$ 有兩個相異實根，所以經過曲線上每一點確實都有兩條切線。第二，

$$\tan^2\theta = \frac{\frac{1}{3}(Y+a)^2}{(Y+a)^2} = \frac{1}{3}.$$

所以無論該點位於曲線上何處，都有 $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$：兩切線之間的銳角是常數，等於 30°。

驗算

- 取 $a = 1$，在 $x = 2$ 和 $x = 0$ 處的切線分別是 $y = x - 1$ 和 $y = 0$，互成 45°。它們相交於 $(1, 0)$，而 $(0 + 3)^2 = 9 = 8 + 1^2$。
- 對於第 (iii) 部分，取 $a = 1$ 及 $X = 0$：則 $(Y + 7)^2 = 48$，所以 $Y = 4\sqrt{3} - 7 \approx -0.072$。經過 $(0, Y)$ 的切線在 $x = \pm\sqrt{-4Y} \approx \pm 0.536$ 處與曲線相切，斜率為 ± 0.268。由於 $\tan 15° \approx 0.268$，每條切線與水平線成 15°，兩者相差 30°。
- 用電腦對一千個隨機的 a 值以及每條雙曲線兩支上的點進行檢驗，確認了 45° 和 30° 的結果。

常見錯誤

- 試圖分別解出 p 和 q。其實只需要對稱組合 $p + q$ 和 pq，再配合 $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$。
- 在第 (i) 部分忘記 $\pm$：把條件平方後，45° 角的兩種方向都得以保留，正因如此才得到單一條方程。
- 在第 (iii) 部分，約去之前沒有檢查 $Y + a \neq 0$。

STEP 之外

從點 (X, Y) 到拋物線(parabola)的切線由二次方程 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$ 決定，而使兩切線以固定角度相交的點的軌跡總是一條雙曲線（當角度為 90° 時，它退化為準線（directrix）$y = -a$）。這些概念屬於射影幾何（projective geometry），其中極點與極線（pole–polar）的關係把一個點與它的切點弦（chord of contact）聯繫起來。如想做更多同類型的題目，並參考如何入手的評註，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

詳細解答

STEP III 2024，第 5 題

純數學 • 矩陣微分方程

STEP III 2024，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 7.7 節永恆不變的量中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/lax-pairs.html

關鍵思路

一切都取決於跡（trace）的兩個性質：它是線性（linear）的，而且 $\operatorname{tr}(\mathbf{XY}) = \operatorname{tr}(\mathbf{YX})$。第 (ii) 部分給出行列式（determinant）變化率的公式，即雅可比公式（Jacobi's formula）。它把「$\det \mathbf{M}$ 是否不變？」轉化為「某個跡是否為零？」。在 (iii) 中，交換子（commutator）$\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 的跡必定為零，由此得到全部三個不變量（invariants）。在 (iv) 中，同一條公式表明 $\operatorname{tr} \mathbf{N}$ 量度的是 $\ln|\det \mathbf{M}|$ 的變化快慢，於是問題變成：一個矩陣能否跡不變而行列式改變？

解答

第 (i) 部分

設 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 及 $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$。$\mathbf{MN}$ 的對角元素是 $ap + br$ 和 $cq + ds$，而 $\mathbf{NM}$ 的對角元素是 $pa + qc$ 和 $rb + sd$。所以

$$\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = ap + br + cq + ds = \operatorname{tr}(\mathbf{NM}).$$

此外，$\mathbf{M} + \mathbf{N}$ 的對角元素是 $a + p$ 和 $d + s$，所以

$$\operatorname{tr}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}) + \operatorname{tr}(\mathbf{N}).$$

同理，對純量 k 有 $\operatorname{tr}(k\mathbf{M}) = k\operatorname{tr}(\mathbf{M})$，而 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$ 的跡等於 $\operatorname{tr}\mathbf{M}$ 的導數。下文會隨意使用這些性質。

第 (ii) 部分

元素 a, b, c, d 均隨 t 而變（撇號表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$），由乘積法則（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ad - bc) = a'd + ad' - b'c - bc'.$$

由於 $\mathbf{M}$ 是非奇異（non-singular）矩陣，$\mathbf{M}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，而

$$\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} da' - bc' & * \\ * & -cb' + ad' \end{pmatrix}.$$

它的跡是 $\dfrac{a'd + ad' - b'c - bc'}{\det\mathbf{M}}$，即 $\dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M})$，得證。

第 (iii) 部分

行列式。由 (ii) 及跡的線性，

$$\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\big(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})\big) = \operatorname{tr}(\mathbf{N}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{NM}).$$

對兩個矩陣 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{M}$ 應用 (i)，得 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{M}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{N})$。所以右方為零。由於 $\det\mathbf{M} \neq 0$，得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = 0$。

跡。由 (i)，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\Big(\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\Big) = \operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$。

平方的跡。只要保持因子的次序，乘積法則對矩陣同樣成立：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\mathbf{M} + \mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = (\mathbf{MN} - \mathbf{NM})\mathbf{M} + \mathbf{M}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM}) \\ &= \mathbf{M}^2\mathbf{N} - \mathbf{NM}^2,\end{aligned}$$

因為兩個 $\mathbf{MNM}$ 項互相抵消。這同樣是交換子的形式，只是以 $\mathbf{M}^2$ 代替 $\mathbf{M}$，所以由 (i) 知其跡為零。因此 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2)$ 亦是常數。三個量都與 t 無關。

> ? **想一想** 當 $\mathbf{N}$ 也隨 t 而變時，怎樣解 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$？

把 $\mathbf{N}$ 中與一切矩陣都可交換的部分分拆出來。寫 $\mathbf{N} = t\mathbf{I} + t\mathbf{J}$，其中 $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。單位

矩陣與 $\mathbf{M}$ 可交換，所以 $\mathbf{MN}-\mathbf{NM}=t(\mathbf{MJ}-\mathbf{JM})$。設 $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，則

$$\mathbf{MJ}-\mathbf{JM}=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c & a-d\\ 0 & c\end{pmatrix}.$$

比較元素，得四條純量方程：

$$a'=-tc,\qquad b'=t(a-d),\qquad c'=0,\qquad d'=tc.$$

以 $t=0$ 時的值 A,B,C,D 依次求解：

- $c'=0$，所以 $c=C$。
- 於是 $a'=-Ct$ 及 $d'=Ct$，所以 $a=A-\frac{1}{2}Ct^2$ 及 $d=D+\frac{1}{2}Ct^2$。
- 現在 $a-d=A-D-Ct^2$，所以 $b'=(A-D)t-Ct^3$，得 $b=B+\frac{1}{2}(A-D)t^2-\frac{1}{4}Ct^4$。

因此

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}A-\frac{1}{2}Ct^2 & B+\frac{1}{2}(A-D)t^2-\frac{1}{4}Ct^4\\ C & D+\frac{1}{2}Ct^2\end{pmatrix}.$$

驗算一下：跡是 $A+D$，而展開 $ad-bc$ 可見 t 的各次冪全部抵消，剩下 $AD-BC$。這與本部分前半的結果一致。

第 (iv) 部分

現在 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t=\mathbf{MN}$，所以 $\mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t=\mathbf{N}$，而 (ii) 給出

$$\operatorname{tr}(\mathbf{N})=\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}).$$

所以對所有 t 有 $\operatorname{tr}\mathbf{N}=0$，當且僅當 $\det\mathbf{M}$ 是常數。跡不變並不能說明行列式的任何情況，所以答案應該是否。要證明這一點，只需一個反例（counterexample）。

> **想一想** 題目只透過微分方程給出 $\mathbf{N}$，我們該怎樣構造反例？

倒過來做。任取一個非奇異的 $\mathbf{M}(t)$，使其跡為非零常數而行列式不是常數，然後定義 $\mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$。這樣方程便自動成立。取

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & t\\ -t & 1\end{pmatrix},\qquad \operatorname{tr}\mathbf{M}=2,\qquad \det\mathbf{M}=1+t^2\neq 0.$$

於是

$$\mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}t & 1\\ -1 & t\end{pmatrix}.$$

乘出來可確認 $\mathbf{MN} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$。此外 $\mathbf{N}$ 是非奇異的，因為 $\det \mathbf{N} = 1/(1+t^2)$。然而

$$\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = \frac{2t}{1+t^2},$$

對每個 $t \neq 0$ 都不為零。所以 $\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0$ 不一定成立。真正必然成立的是 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}(\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t) = 0$，這是另一回事。

驗算

- 在 (iii) 中，取 $A = 1$、$B = 0$、$C = 2$、$D = 3$ 及 $t = 1$。公式給出 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，其跡為 4，行列式為 3，與 $t = 0$ 時相同。它的平方的跡是 $0 - 3 - 3 + 16 = 10$，而初始矩陣的也是：$1 + 0 + 0 + 9 = 10$。
- 對隨機的 A, B, C, D，(iii) 中 $\mathbf{M}$ 的公式與電腦數值積分該微分方程的結果吻合至小數點後八位。以隨機且隨時間變化的 $\mathbf{N}$ 進行同樣的積分時，三個不變量都保持不變。
- 在 (iv) 中，當 $t = 1$ 時，$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，其跡為 1；而 $\det \mathbf{M} = 1 + t^2$ 在該處的對數導數（logarithmic derivative）是 $2t/(1+t^2) = 1$，正如 (ii) 所預測。

常見錯誤

- 寫成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) = 2\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$：矩陣不一定可交換，所以兩種次序都必須保留。
- 以為 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}\mathbf{M}\operatorname{tr}\mathbf{N}$。這是錯的。成立的只有線性法則和循環法則（cyclic rule）。
- 在 (iv) 中，由 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = 0$ 直接推出 $\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0$。答「否」需要一個明確的反例。

STEP 之外

第 (ii) 部分是雅可比公式在 2×2 的情況，該公式對 $n \times n$ 矩陣都成立。配合 $\mathbf{M}' = \mathbf{MN}$，它給出 $\det \mathbf{M}(t) = \det \mathbf{M}(0) \exp \int_0^t \operatorname{tr}\mathbf{N}$。當 $\mathbf{N}$ 是常數時，這就變成著名的恆等式 $\det e^{\mathbf{N}} = e^{\operatorname{tr}\mathbf{N}}$。形如 $\mathbf{M}' = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 的方程稱為 Lax 方程（Lax equations）。$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k)$ 這些量總是守恆（conserved）的，這正是它們出現在可積系統（integrable systems）理論中的原因。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是閱讀跡、行列式和矩陣指數（matrix exponential）的好去處。

詳細解答

STEP III 2024，第 6 題

純數學 • 線性微分方程

STEP III 2024，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

控制量（control）u 以相同方式加到每一條方程上，所以座標的任何一個係數總和為零的組合，都完全不受 u 影響。只要選對這個組合，它的導數（derivative）就是它本身的倍數，因此無論 u 怎樣變化，它都會按指數（exponential）增長或衰減。指數函數除非一開始就是零，否則永遠不會等於零，由此便得到必要條件（necessary condition）。當這些條件成立時，運動就簡化為單一條一階（first-order）方程，而我們可以用常數 u 把它解出來。

解答

第 (i) 部分

(a) 把兩條方程相減，含 u 的項互相抵消：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-x + 3y + u) - (x + y + u) = -2(x - y).$$

因此 $w = x - y$ 滿足 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -2w$，於是對任何函數 u，都有

$$x - y = (x_0 - y_0)\,\mathrm{e}^{-2t}$$

若質點在某個 $t > 0$ 時位於原點，則該時刻 $x - y = 0$。由於 $\mathrm{e}^{-2t} \neq 0$，這迫使 $x_0 - y_0 = 0$，即 $x_0 = y_0$。

(b) 當 $x_0 = y_0$ 時，(a) 的公式給出對所有 t 都有 $x - y = 0$，所以質點一直留在直線 $y = x$ 上。把 $y = x$ 代入第一條方程，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + u.$$

當 u 為常數時，這是一條常係數線性方程。其特解（particular solution）為常數 $-\frac{1}{2}u$，所以

$$x = -\tfrac{1}{2}u + \left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2t}.$$

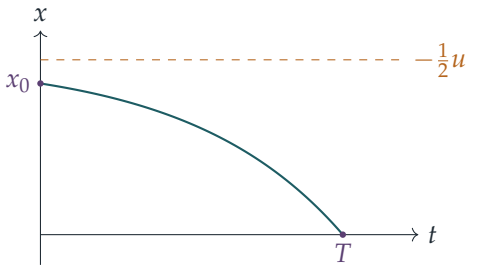
我們需要 $x(T) = 0$（這時 $y(T) = x(T) = 0$ 亦隨之成立）：

$$\left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u \quad\Longrightarrow\quad x_0\,\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u\left(1 - \mathrm{e}^{2T}\right).$$

由於 $T > 0$，$\mathrm{e}^{2T} \neq 1$，所以可以相除：

$$\boxed{u = -\frac{2x_0\,\mathrm{e}^{2T}}{\mathrm{e}^{2T} - 1}}$$

這個正負號是合理的。若不加控制，$\dot{x} = 2x$ 會把質點推離原點，所以 u 必須朝與 x_0 相反的方向推。（若 $x_0 = 0$，質點在 $u = 0$ 時已靜止於原點。）



圖中所示為 $x_0 = 1$、$T = 1$ 的情況。質點從不穩定平衡點（unstable equilibrium）$x = -\frac{1}{2}u$ 稍下方出發，被推離該點，並恰好在時間 T 到達原點。

第 (ii) 部分

(a) 仿照第 (i) 部分，我們尋找一個 $ax + by + cz$，其中 $a + b + c = 0$（使 u 抵消），而且它的導數是它本身的倍數。「x，然後 $-2y$，然後 z」這個規律提示我們取 $w = x - 2y + z$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= (4y - 5z + u) - 2(x - 2z + u) + (x - 2y + u)\\ &= -x + 2y - z = -w.\end{aligned}$$

因此無論 u 是甚麼，都有 $x - 2y + z = (x_0 - 2y_0 + z_0)\,\mathrm{e}^{-t}$。在原點處 $w = 0$，而 $\mathrm{e}^{-t} \neq 0$，所以 $x_0 - 2y_0 + z_0 = 0$。也就是說，$y_0 = \frac{1}{2}(x_0 + z_0)$，即 x_0 與 z_0 的平均值。

> **想一想** 是否還有第二個同樣不受 u 影響的組合？

最後兩條方程都含有 $x + u$，所以把它們相減，可以同時消去 x 和 u。設 $v = y - z$，則

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (x - 2z + u) - (x - 2y + u) = 2(y - z) = 2v,$$

所以 $y - z = (y_0 - z_0)\,\mathrm{e}^{2t}$。

(b) 若質點在某個 $t > 0$ 時位於原點，則該時刻 $v = 0$。由於 $\mathrm{e}^{2t} \neq 0$，得 $y_0 = z_0$。結合 (a)，有 $x_0 = 2y_0 - z_0 = y_0$，所以 $x_0 = y_0 = z_0$。

(c) 當 $x_0 = y_0 = z_0$ 時，w 和 v 的初始值都是 0，所以對所有 t 它們都保持為 0：$y = z$，從而 $x = 2y - z = y$。質點沿直線 $x = y = z$ 運動，而每條方程都變成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x - 5x + u = -x + u$$

（第二和第三條方程給出 $x - 2x + u$，結果相同）。當 u 為常數時，

$$x = u + (x_0 - u)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

令 $x(T) = 0$，得 $u\left(1 - \mathrm{e}^{-T}\right) = -x_0\,\mathrm{e}^{-T}$。由於 $T > 0$，可以相除；再把分子分母同乘 e^{T}，得

$$\boxed{u = -\frac{x_0}{\mathrm{e}^{T} - 1}}$$

這裏不受控制的運動 $\dot{x} = -x$ 本身已會衰減趨向原點，但只是在 $t \to \infty$ 時才到達。只需一個朝向原點的小推動（當 $T \to \infty$ 時趨於零），就能令質點在有限時間內到達原點。

驗算

- 極限：當 $T \to \infty$ 時，(ii)(c) 的答案趨於 0，與自然衰減相符；而 (i)(b) 的答案趨於 $-2x_0$，這使 $x_0 = -\frac{1}{2}u$ 成為平衡點。質點於是停留在那裏，永遠不會到達原點，這正是有限的 T 需要絕對值稍大的 u 的原因。當 $T \to 0^{+}$ 時，兩個答案都趨於無窮大，這是應有的結果。
- 數值驗算：取 $x_0 = 1$、$T = 1$，第 (i)(b) 部分給出 $u \approx -2.3130$，用數值方法逐步推進方程，在 $t = 1$ 時落在 $(0, 0)$，誤差在 10^{-8} 以內。(ii)(c) 取 $u = -1/(\mathrm{e} - 1) \approx -0.5820$ 時亦同樣成立。此外，亦驗證了當 u 是隨時間變化的非常數函數時，不變量（invariant）$x - y$、$x - 2y + z$ 和 $y - z$ 仍然按各自的指數函數變化。

常見錯誤

- 在 (i)(a) 或 (ii)(a)、(b) 中假設 u 為常數。這些部分針對的是任何 u，而 u 被抵消正是整個關鍵所在。
- 在 (i)(b) 和 (ii)(c) 中，忘記說明爲甚麼對所有時間都有 $y = x$（或 $x = y = z$）。這是由初始值為零的指數公式得出的。

STEP 之外

這是對控制理論（control theory）的初步體驗。把系統寫成 $\dot{\mathbf{r}} = A\mathbf{r} + \mathbf{b}u$，我們找到的組合就是 A 的左特徵向量（left eigenvector），而且與 $\mathbf{b}$ 正交（orthogonal），所以任何控制都無法影響它們。卡爾曼（Kalman）的秩條件（rank condition）決定是否每個狀態都能被引導到原點。這裏該條件不成立，這正是為甚麼只有特殊的起點才可行。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）涵蓋特徵向量方面的內容，而 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）則涵蓋常微分方程的線性系統。

詳細解答

STEP III 2024，第 7 題

純數學 • e^2 的無理性

STEP III 2024，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 1.4 節*e* 是無理數，e^2 也是中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/e-irrational.html

關鍵思路

兩個級數都是指數級數（exponential series）乘以一個階乘（factorial）之後的尾項（tail）。把 $\mathrm{e} = \sum 1/r!$ 乘以 $(2n)!$，則直至 $r = 2n$ 的每一項都變成整數，而其後的部分恰好就是 $\mathrm{f}(2n)$；$1/\mathrm{e}$ 與 $\mathrm{g}(2n)$ 亦有同樣情況。假如 e^2 是有理數（rational），這些細小尾項的某個組合便必須是整數，但它卻被嚴格夾在 0 與 1 之間。

解答

記

$$a_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad k \geq 1,$$

於是 $\mathrm{f}(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$，而 $\mathrm{g}(n) = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$。注意 $a_{k+1} = a_k/(n+k+1)$。

第 (i) 部分

每個 a_k 都是正數，所以 $\mathrm{f}(n) > 0$。a_k 分母中的每個因子都至少是 $n+1$，所以 $a_k \leq 1/(n+1)^k$，而當 $k \geq 2$ 時不等式是嚴格的（因為出現了因子 $n+2$）。與公比為 $\frac{1}{n+1} < 1$

的幾何級數（geometric series）比較，

$$\mathrm{f}(n) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

因此 $0 < \mathrm{f}(n) < \frac{1}{n}$。

第 (ii) 部分

相鄰各項嚴格遞減：由於 $n+k+1 > 1$，$a_{k+1} = a_k/(n+k+1) < a_k$。從頭開始兩兩分組，

$$\mathrm{g}(n) = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots > 0,$$

因為每個括號都是正數。改為從第一項之後開始分組，

$$\mathrm{g}(n) = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots < a_1 = \frac{1}{n+1},$$

因為每個括號同樣是正數。所以 $0 < \mathrm{g}(n) < \frac{1}{n+1}$。

第 (iii) 部分

設 $m = 2n$。利用 $\mathrm{e} = \sum_{r\ge 0} 1/r!$，

$$m!\,\mathrm{e} = \sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{r!} + \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{m!}{r!}.$$

當 $r \le m$ 時，$m!/r! = (r+1)(r+2)\cdots m$ 是整數，所以第一個和是整數，記之為 A。在第二個和中，$m!/(m+k)! = 1/\big((m+1)\cdots(m+k)\big)$，這正是 $\mathrm{f}(m)$ 的第 k 項。所以 $m!\,\mathrm{e} = A + \mathrm{f}(m)$，而 $(2n)!\,\mathrm{e} - \mathrm{f}(2n) = A$ 是整數。

同理，由 $1/\mathrm{e} = \sum_{r\ge 0}(-1)^r/r!$ 得

$$\frac{m!}{\mathrm{e}} = \underbrace{\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{m!}{r!}}_{B\in\mathbb{Z}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}.$$

想一想 為甚麼題目用 $2n$ 而不用 n？

由於 $m = 2n$ 是偶數，$(-1)^{m+k} = (-1)^k$，所以尾項是 $-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = -\mathrm{g}(m)$（此處 a_k 改由 m 構成）。因此 $m!/\mathrm{e} = B - \mathrm{g}(m)$，而 $\dfrac{(2n)!}{\mathrm{e}} + \mathrm{g}(2n) = B$ 是整數。（若 m 為奇數，尾項會是 $+\mathrm{g}(m)$，我們便需要改用減號。）

第 (iv) 部分

利用第 (iii) 部分中的整數 A 和 B，

$$\begin{aligned} q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) &= q\big((2n)!\,\mathrm{e} - A\big) + p\Big(B - \frac{(2n)!}{\mathrm{e}}\Big) \\ &= (2n)!\Big(q\mathrm{e} - \frac{p}{\mathrm{e}}\Big) - qA + pB \\ &= pB - qA, \end{aligned}$$

因為 $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$。由於 p, q, A, B 都是整數，所以對每個正整數 n，$q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n)$ 亦是整數。

第 (v) 部分

用反證法（proof by contradiction），假設 e^2 是有理數。由於 $\mathrm{e}^2 > 0$，我們可寫 $\mathrm{e}^2 = p/q$，其中 p, q 是正整數；兩邊除以 e 得 $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$。由第 (iv) 部分，對每個 $n \geq 1$，$N_n = q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n)$ 都是整數。

> **想一想** 怎樣才能令 N_n 不是整數？

把第 (i) 及 (ii) 部分應用於 $2n$，將它夾住。由於 $p, q > 0$，

$$0 < N_n < \frac{q}{2n} + \frac{p}{2n+1} < \frac{p+q}{2n}.$$

現在取足夠大的 n，使 $2n > p + q$。那麼 $0 < N_n < 1$，即 N_n 是嚴格介乎 0 與 1 之間的整數，這是不可能的。因此 e^2 是無理數（irrational）。

驗算

細小的情況可以準確求和。當 $n = 2$ 時，第 (iii) 部分指出 $24\mathrm{e} - \mathrm{f}(4)$ 是整數；事實上 $\sum_{r=0}^{4} 24/r! = 65$，而 $\mathrm{f}(4) = 24\mathrm{e} - 65 \approx 0.2388$，穩穩落在 $(0, \frac{1}{4})$ 之內。同樣地，$\mathrm{f}(2) = 2\mathrm{e} - 5 \approx 0.4366 < \frac{1}{2}$，而 $\mathrm{g}(2) = 1 - 2/\mathrm{e} \approx 0.2642 < \frac{1}{3}$。電腦驗算確認了：(i) 和 (ii) 的界限對 $n \leq 24$ 成立；(iii) 的整數性對 $2n \leq 22$ 成立；以及對隨機的 p, q，$0 < q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) < (p+q)/(2n)$ 成立。

常見錯誤

- 聲稱 $a_k < 1/(n+1)^k$ 對所有 k 成立：在 $k = 1$ 時等號成立，所以嚴格不等式來自 $k \geq 2$ 的各項。
- 忘記 $1/\mathrm{e}$ 展開式中尾項的符號：它之所以是 $-\mathrm{g}(2n)$，只因為 $2n$ 是偶數。

- 停在「N_n 很小」這一步：要得出矛盾，還需要 $N_n > 0$，這正是 (i) 和 (ii) 中下界重要的原因。

STEP 之外

這是傅立葉（Fourier）證明 e 為無理數的經典方法，並透過把 $\mathrm{e}^2 = p/q$ 拆成 $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$ 加以推廣，使兩個級數都快速收斂（converge）。同一思路經過更細緻的處理，可證明對每個非零有理數 r，e^r 都是無理數；劉維爾（Liouville）亦用它證明了 e 不是任何整係數二次方程（quadratic equation）的根。估計級數尾項的界是大學一年級分析（analysis）的核心技巧；可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2024，第 8 題

純數學 • 相交圓錐曲線

STEP III 2024，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

形如 $y^2 - x^2 + \ldots$ 的二次式（quadratic expression），當且僅當配方（completing the square）後不留下常數項時，才會分解為兩條斜率（gradient）為 ± 1 的直線。題目其餘部分的竅門在於：把一條曲線方程的某個倍數加到另一條曲線的方程上，不會失去任何公共點；而選取恰當的倍數，便能把棘手的四次（quartic）問題化為「哪些直線與拋物線（parabola）相交」，而這只不過是兩個二次方程。

解答

第 (i) 部分

乘積為零當且僅當其中一個因子為零，因此滿足 $(y - x + 3)(y + x - 5) = 0$ 的點，就是 $y = x - 3$（斜率為 1）上的點，連同 $y = -x + 5$（斜率為 -1）上的點。

對於一般方程，就兩個變量分別配方：

$$y^2 - x^2 + py + qx + r = \left(y + \tfrac{1}{2}p\right)^2 - \left(x - \tfrac{1}{2}q\right)^2 - K, \qquad \text{其中} K = \tfrac{1}{4}\left(p^2 - q^2\right) - r.$$

設 $Y = y + \frac{1}{2}p$ 及 $X = x - \frac{1}{2}q$，這是一個平移（translation），不會改變斜率。方程變為 $(Y - X)(Y + X) = K$。

若 $p^2 - q^2 = 4r$，則 $K = 0$，方程為 $(Y - X)(Y + X) = 0$；由第一段可知，這是直線 $Y = X$ 與 $Y = -X$ 組成的一對直線，斜率分別為 1 和 -1。在原坐標下，它們是

$$y - x + \tfrac{1}{2}(p + q) = 0 \quad \text{及} \quad y + x + \tfrac{1}{2}(p - q) = 0.$$

反過來，假設該方程表示一對斜率為 ± 1 的直線；我們證明 $K = 0$。其中一條直線的斜

率為 1，故具有 $Y = X + c$ 的形式，而且直線上每一點都滿足該方程。在這條直線上，$(Y - X)(Y + X) = c(2X + c)$，所以對每一個實數 X 都有 $2cX + c^2 = K$。X 的線性函數只有在其係數為零時才是常數，所以 $c = 0$，於是 $K = c^2 = 0$。因此 $p^2 - q^2 = 4r$，「當且僅當」（if and only if）得證。

第 (ii) 部分

若某點位於 C_1 上，則該處有 $y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0$；若它位於 C_2 上，則該處有 $y - x^2 = 0$。所以在公共點處，表達式

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x + k(y - x^2)$$

的值為 $0 + k \cdot 0 = 0$，不論 k 取何值。

取 $k = 1$，方程為

$$y^2 - x^2 + (2s+1)y - x + s(s+1) = 0,$$

它具有第 (i) 部分的形式，其中 $p = 2s + 1$、$q = -1$、$r = s(s+1)$。於是

$$p^2 - q^2 = 4s^2 + 4s + 1 - 1 = 4s(s+1) = 4r,$$

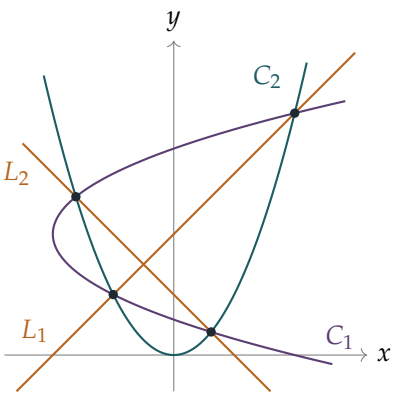
所以由第 (i) 部分，這是一對斜率為 1 和 -1 的直線。利用第 (i) 部分的因式分解（factorisation），並注意 $\frac{1}{2}(p+q) = s$ 及 $\frac{1}{2}(p-q) = s+1$，方程為

$$(y - x + s)(y + x + s + 1) = 0,$$

所以這兩條直線是

$$L_1 : \ y = x - s \qquad \text{及} \qquad L_2 : \ y = -x - s - 1.$$

由第一段，$C_1 \cap C_2$ 的每一點都滿足這個方程，所以全部四個交點都位於 $L_1 \cup L_2$ 上。（這對每個 s 都成立；我們從來不需要這四個點存在。）



圖中所示為 $s = -2$ 的情況：C_1 為 $x = (y-2)^2 - 2$，而 C_1 與 C_2 的四個公共點分別有兩個位於直線 $y = x + 2$ 上、兩個位於直線 $y = 1 - x$ 上。

第 (iii) 部分

C_1 與 C_2 的每個公共點都位於 C_2 上，並位於 L_1 或 L_2 上。代入 $y = x^2$：

$$\begin{aligned} \text{對於} L_1: \quad & x^2 - x + s = 0, \\ \text{對於} L_2: \quad & x^2 + x + s + 1 = 0. \end{aligned}$$

C_2 上的點由其 x 坐標唯一確定，所以每條直線與 C_2 至多相交於兩點。因此，要有四個不同的公共點，每個二次方程都必須有兩個不同的實根，所以兩個判別式(discriminant)都為正：

$$1 - 4s > 0 \quad \text{及} \quad 1 - 4(s+1) > 0.$$

第二個不等式給出 $s < -\frac{3}{4}$，即所求。(第一個不等式 $s < \frac{1}{4}$ 隨之自動成立。)

> **想一想** 在第 (iv) 部分，為甚麼只找出四個同時位於 C_2 和 $L_1 \cup L_2$ 上的點並不足夠？

第 (ii) 部分只證明了 C_1 與 C_2 的公共點位於這兩條直線上；我們還需要反方向的結論，而且必須確保這四個點不會重合。

第 (iv) 部分

設 $s < -\frac{3}{4}$。那麼上述兩個判別式都為正（$-3 - 4s > 0$，以及 $1 - 4s > 4 > 0$），所以 L_1 與 C_2 相交於兩個不同的點，L_2 亦然。

這四個點互不相同。若某點被重複計算，它便同時位於 L_1 和 L_2 上。兩直線相交於 $x - s = -x - s - 1$ 之處，即點 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - s\right)$。此點只在 $-\frac{1}{2} - s = \frac{1}{4}$，即 $s = -\frac{3}{4}$ 時才位於 C_2 上，而這已被排除。所以我們得到四個不同的點。

它們每一個都位於 C_1 上。在每一點處都有 $y - x^2 = 0$（因為它在 C_2 上），而第 (ii) 部分 $k = 1$ 的方程亦成立（因為它在 L_1 或 L_2 上）。兩式相減，得

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0,$$

這正是 C_1 的方程。

所以 C_1 與 C_2 至少有四個不同的公共點；由第 (iii) 部分的論證，它們不可能多於四個。因此兩者恰好相交於四個不同的點。

驗算

- 把 $y = x^2$ 代入 C_1，得四次方程 $x^4 + 2sx^2 - x + s^2 + s = 0$。展開 $(x^2 - x + s)(x^2 + x + s + 1)$ 正好得到此式，印證了這對直線。

- 當 $s = -2$ 時，四個點為 $(2,4)$、$(-1,1)$ 及 $\left(\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}), \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})\right)$；每一點都滿足 $x = (y-2)^2 - 2$，例如 $(2,4)$：$(4-2)^2 - 2 = 2$。
- 在邊界 $s = -\frac{3}{4}$ 時，兩個二次方程為 $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$（根為 $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$）及 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$，所以只有兩個不同的公共點，其中 $x = -\frac{1}{2}$ 為兩條直線所共有。用電腦計算該四次方程的實根數目，在 $s = -0.76, -1, -2$ 時得 4 個，在 $s = -0.74, -0.5$ 時得 2 個。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分只證明「若」的方向：一對直線必然給出 $p^2 - q^2 = 4r$，這一點需要論證（例如上文的論證）。
- 在第 (iv) 部分，忘記檢查兩條直線沒有共用 C_2 上的點，或忘記證明所找到的點確實位於 C_1 上。

STEP 之外

方程族 $F + kG = 0$ 稱為**二次曲線束**（pencil of conics）：族中每一條曲線都經過 $F = 0$ 與 $G = 0$ 的公共點。選取 k 使該曲線退化（degenerate）為一對直線，是求兩條二次曲線（conics）交點的經典方法。在射影幾何（projective geometry）中，做法是令一個 3×3 行列式（determinant）為零，從而得到一個關於 k 的三次方程。在本題中，不論 s 為何值，曲線束在 $k = 1$ 時恰好都是退化的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）講解了二次曲線背後的對稱矩陣（symmetric matrices）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多同類型的題目。

詳細解答

STEP III 2024，第 9 題

力學 • 斜碰撞

STEP III 2024，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

一切都在桌面這個平面上發生，所以不妨從上方俯視：每個球都變成一個以其最低點為圓心、半徑為 r 的圓。對於光滑（smooth）球體，衝量（impulse）沿連心線（line of centres）作用，因此我們把速度分解為沿這條線的分量（動量守恆和恢復係數在此適用）和垂直於這條線的分量（保持不變）。此後 B 沿直線運動，而它會否撞到 C，就變成一個關於點到直線距離的問題。

解答

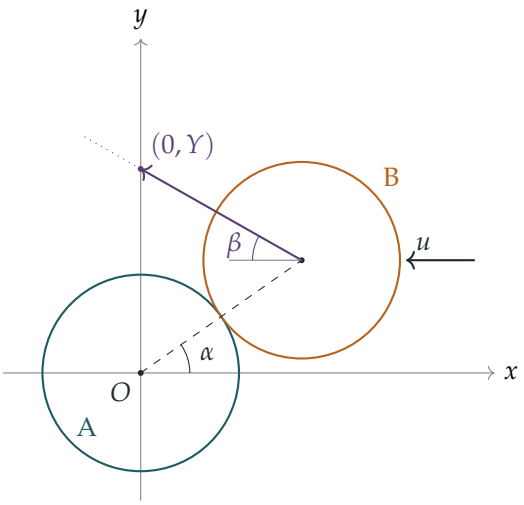
我們把球體視為光滑且質量相等，放在光滑桌面上，因此任何地方都沒有摩擦，而除了碰撞的瞬間外，每個球都以恆定速率沿直線運動。我們以最低點來處理，因為最低點在水平方向的運動與球心完全相同；兩個半徑為 r 的球，當它們的最低點相距 $2r$ 時便互相接觸。

第 (i) 部分

B 的最低點沿直線 $y = 2r\sin\alpha$ 移動。當它與 O 的距離為 $2r$ 時便接觸 A，即在點 $(2r\cos\alpha,\, 2r\sin\alpha)$（取正的 x 坐標，因為 B 從 x 值很大的正方向駛來）。因此碰撞時，從 A 指向 B 的連心線的單位向量（unit vector）為

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{而} \qquad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

與之垂直。



碰撞前 B 的速度為 $\begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix}$，沿 **n** 的分量為 $-u\cos\alpha$，沿 **t** 的分量為 $u\sin\alpha$。A 處於靜止。

由於球體光滑，兩者之間的衝量沿 **n** 方向。因此 B 的 **t** 分量保持為 $u\sin\alpha$（而 A 不會獲得任何 **t** 分量）。設碰撞後沿 **n** 的分量分別為 v_A 和 v_B。沿 **n** 方向的動量守恆（momentum conservation）（質量相等）及牛頓（Newton）恢復定律（law of restitution）給出

$$\begin{aligned} v_A + v_B &= -u\cos\alpha, \\ v_B - v_A &= \tfrac{1}{3}\big(0 - (-u\cos\alpha)\big) = \tfrac{1}{3}u\cos\alpha. \end{aligned}$$

（沿 **n** 的接近速率為 $u\cos\alpha$，而位於 **n** 正方向一側的 B 與 A 分離。）兩式相加，得 $v_B = -\frac{1}{3}u\cos\alpha$，以及 $v_A = -\frac{2}{3}u\cos\alpha$。

所以碰撞後 B 的速度為

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{3}u\cos\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + u\sin\alpha \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(1 + 2\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

這裡用了 $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

兩個分量都不為零，其中 x 分量為負，y 分量為正（因為 α 是銳角）。所以 B 此時向左上方運動，其路徑斜率的大小為

$$\frac{\frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{1}{3}u(1 + 2\sin^2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1 + 2\sin^2\alpha} = \tan\beta,$$

其中 β 是路徑與 x 負方向所成的銳角。B 的最低點從 $(2r\cos\alpha, 2r\sin\alpha)$ 出發。要到達 y 軸，x 須減少 $2r\cos\alpha$，同時 y 增加 $2r\cos\alpha\tan\beta$。所以它在 $(0, Y)$ 穿過 y 軸，其中

$$Y = 2r\sin\alpha + 2r\cos\alpha\tan\beta = 2r(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha),$$

正如所求。

第 (iii) 部分

碰撞後 B 以恆定速率沿直線運動，沿着經過 $(0, Y)$、單位方向向量為 $\mathbf{d} = (-\cos\beta, \sin\beta)$ 的直線 ℓ。C 一直靜止於 $(0, h)$，直至被撞到為止。B 撞到 C 當且僅當 $(0, h)$ 到 B 的路徑的距離跌到 $2r$ 以下。

$(0, h)$ 到 ℓ 的垂直距離（perpendicular distance），就是 $(0, h) - (0, Y) = (0, h - Y)$ 垂直於 $\mathbf{d}$ 的分量的大小。ℓ 的一個單位法向量為 $(\sin\beta, \cos\beta)$，所以這個距離是

$$\big|(0,\, h - Y)\cdot(\sin\beta, \cos\beta)\big| = |h - Y|\cos\beta,$$

因為 β 是銳角，所以 $\cos\beta > 0$。若 $h > Y + 2r\sec\beta$，則 $h - Y > 2r\sec\beta > 0$，而距離為 $(h - Y)\cos\beta > 2r$。B 的路徑上每一點（不只是整條直線上最近的那一點）與 C 的最低點的距離都至少有這麼遠。所以 B 永遠不會進入 C 的 $2r$ 範圍內，也就不會撞到它。

（也沒有其他東西阻礙：A 以速度 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,\mathbf{n}$ 離開，進入 $y < 0$ 的區域，遠離 B 和 C。）

> **想一想** 第 (iv) 部分要求我們證明 $Y < 2r\sec\beta$。能否把它化為單一個三角恆等事實？

可以：兩邊乘以 $\cos\beta > 0$，左邊就變成一條複角公式（compound-angle formula）。

第 (iv) 部分

除以 $2r$ 並乘以 $\cos\beta > 0$，不等式 $Y < 2r\sec\beta$ 等價於

$$\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta < 1, \qquad \text{即} \qquad \sin(\alpha + \beta) < 1.$$

顯然 $\sin(\alpha + \beta) \le 1$，且等號只在 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 時成立（因為 $0 < \alpha + \beta < \pi$）。這意味着 $\tan\beta = \cot\alpha$，即

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1 + 2\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \iff 2\sin^2\alpha = 1 + 2\sin^2\alpha$$

（除以 $\cos\alpha \neq 0$），這是不可能的。因此 $\sin(\alpha + \beta) < 1$，從而 $Y < 2r\sec\beta$。

由此。現在

$$Y + 2r\sec\beta < 4r\sec\beta,$$

所以我們需要 $\sec\beta$ 在所有銳角 α 下的上界，即 $\tan\beta$ 的上界。分子分母同除以 $\cos^2\alpha$，並記 $t=\tan\alpha>0$，

$$\tan\beta=\frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha+2\tan^2\alpha}=\frac{2t}{1+3t^2}\le\frac{2t}{2\sqrt{3}\,t}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

這裡用了算術－幾何平均不等式（AM–GM inequality）$1+3t^2\ge 2\sqrt{3}\,t$（等號在 $t=1/\sqrt{3}$ 即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 時成立）。所以 $0<\beta\le\frac{\pi}{6}$，從而 $\sec\beta\le\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}$。因此對每個銳角 α，

$$Y+2r\sec\beta<4r\sec\beta\le\frac{8r}{\sqrt{3}}.$$

若 $h>\dfrac{8r}{\sqrt{3}}$，則 $h>Y+2r\sec\beta$，由第 (iii) 部分可知，無論 α 取何值，B 都不會撞到 C。

驗算

- 動量：A 的速度 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 加上第 (i) 部分中 B 的速度，總和為 $(-u,0)$，符合質量相等時應有的結果。
- 當 $\alpha=0$（正面碰撞）時，公式給出 B 的速度為 $(-\frac{1}{3}u,0)$，而 A 得到 $(-\frac{2}{3}u,0)$：正是質量相等、$e=\frac{1}{3}$ 時常見的一維答案。
- 取 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，得 $\tan\beta=1/\sqrt{3}$，所以 $\beta=\frac{\pi}{6}$，$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$，而 $Y=2r(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2})=2r$，明顯小於 $2r\sec\beta=4r/\sqrt{3}\approx 2.31r$。於是 $Y+2r\sec\beta\approx 4.31r$，低於 $8r/\sqrt{3}\approx 4.62r$。
- 我們用電腦對 20,000 個隨機的 α 值作了驗證：逐步推進 B 的直線路徑，得到的穿越點正是上面的 Y；在略高於 $h=Y+2r\sec\beta$ 時 B 避過 C，略低於此值時則撞到 C；而 $\sec\beta$ 的最大值為 $1.1547\ldots=2/\sqrt{3}$。

常見錯誤

- 把恢復係數應用於 x 分量，而不是沿連心線的分量。光滑球體之間的衝量沿連心線作用，而這裡連心線與 x 軸成角 α。
- 以為碰撞時連心線沿 x 軸或 y 軸。接觸點是由兩球相距 $2r$ 這一條件決定的。
- 在第 (iii) 部分中，只檢驗 C 的最低點是否在單一點 $(0,Y)$ 的 $2r$ 範圍內，而不是整條路徑的 $2r$ 範圍內。

STEP 之外

把速度分解為沿某個選定單位向量及垂直於它的分量，就是投影到一組標準正交基（orthonormal basis）上，這個概念貫穿大學一年級的線性代數和力學。光滑球體的斜碰（oblique collision）是散射（scattering）的入門模型，物理學家用它來研究氣體和粒子碰撞。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）就以這種向量方法處理二維碰撞。

詳細解答

STEP III 2024，第 10 題

力學 • 傾倒與滑動

STEP III 2024，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

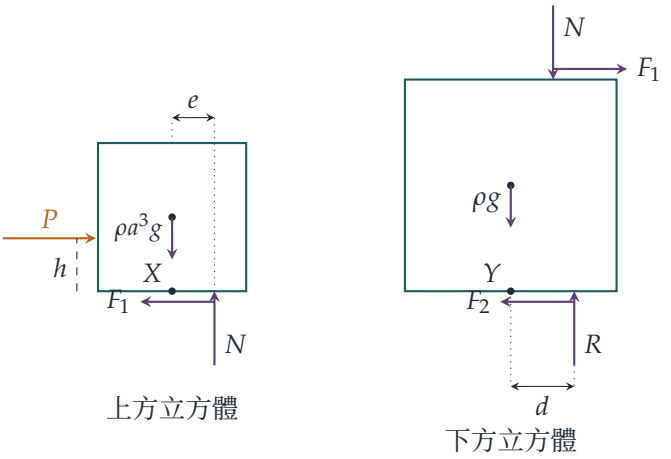
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

每一部分都是在比較平衡（equilibrium）被打破的四種方式：上方立方體滑動、下方立方體滑動、上方立方體翻倒（topple），或兩個立方體一同翻倒。每一種情況各自在某個 P 的臨界值發生；當 P 由零開始增大時，哪個臨界值最小，哪種情況就先發生。選取適當的點取力矩（moments），即對整個系統取關於 Y 的力矩、對上方立方體單獨取關於 X 的力矩，便可以毫不費力地求得第 (i) 部分中法向反作用力（normal reaction）的位置；而當其中一個反作用力到達其作用面的邊緣時，翻倒便開始。

解答

我們把兩個立方體視為剛體（rigid body）。下方立方體的質量為 ρ，上方立方體的質量為 ρa^3。設 P 水平向右作用，作用點位於下方立方體頂面之上高度 h 處，即離地面高度 $1+h$。由於 P 是水平的，它關於任何一點的力矩只取決於其高度，而與它作用於該面上的哪個位置無關。



圖中 N 和 F_1 是兩個立方體之間的法向反作用力和摩擦力（friction）（根據牛頓第三定律（Newton's third law），在每個立方體上分別畫出），作用點與 X 的距離為 e；R 和 F_2 是地面施加的法向反作用力和摩擦力，作用點與 Y 的距離為 d。

第 (i) 部分

整個系統。外力只有 P、兩個重量、R 和 F_2。分解各力，得

$$F_2 = P, \qquad R = \rho g + \rho a^3 g = (1 + a^3)\rho g.$$

對 Y 取力矩。兩個重量都沿着通過 Y 的鉛垂線作用（每個質心（centre of mass）都在 Y 的正上方），而 F_2 沿着地面通過 Y 作用，所以這些力都沒有力矩。剩下的就是高度為 $1 + h$ 的 P，與距離為 d 的 R 互相平衡：

$$R\,d = P(1 + h) \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{P(1 + h)}{(1 + a^3)\rho g},$$

此距離由 Y 沿 P 的方向量度。這正是所求的結果。

單獨考慮上方立方體。分解各力，得 $F_1 = P$ 及 $N = \rho a^3 g$。對 X 取力矩，重量和 F_1 都沒有力矩，所以 $Ne = Ph$，從而

$$e = \frac{Ph}{\rho a^3 g},$$

同樣由 X 沿 P 的方向量度。

第 (ii) 部分

在任何物體移動之前，摩擦力分別為兩個立方體之間的 $F_1 = P$ 及地面上的 $F_2 = P$。當某接觸處所需的摩擦力超過 μ 乘以該處的法向反作用力時，該處便會滑動（slip），所以

$$\text{上方立方體在下方立方體上滑動的條件為} P > \mu\rho a^3 g,$$
$$\text{下方立方體在地面上滑動的條件為} P > \mu(1+a^3)\rho g.$$

由於 $a^3 < 1 + a^3$，第一個臨界值必定嚴格較小。當 P 由零開始增大時（假如沒有先發生翻倒），上方立方體會先到達其極限並開始滑動，而此時地面的摩擦力仍遠未到達極限。上方立方體一旦開始滑動，它施加於下方立方體的摩擦力為 $\mu\rho a^3 g$，仍然小於地面所能提供的 $\mu(1+a^3)\rho g$，因此下方立方體保持不動。所以打破平衡的是上方立方體的滑動，而不是下方立方體的滑動。

第 (iii) 部分

當作用於一個平面上的物體所受的法向反作用力到達該面的邊緣時，物體便即將翻倒。上方立方體底面的半寬為 $\frac{1}{2}a$，下方立方體底面的半寬為 $\frac{1}{2}$。因此，以 ρg 為單位量度所有力，P 的四個臨界值為

$$P_{\text{滑動}} = \mu a^3 \text{（上方在下方上）}, \qquad P_{\text{地面}} = \mu(1+a^3),$$
$$P_{\text{上翻}} = \frac{a^4}{2h} \text{（由} e = \tfrac{1}{2}a \text{ 得）}, \qquad P_{\text{同翻}} = \frac{1+a^3}{2(1+h)} \text{（由} d = \tfrac{1}{2} \text{ 得）}.$$

下方立方體翻倒時會把上方立方體一併帶倒，這就是為甚麼 $d = \frac{1}{2}$ 表示兩個立方體一同翻倒。

現在設 $a = 1$，於是 $P_{\text{滑動}} = \mu$、$P_{\text{上翻}} = \frac{1}{2h}$ 及 $P_{\text{同翻}} = \frac{1}{1+h}$。根據第 (ii) 部分，我們可以不理會 $P_{\text{地面}}$。

> **想一想** 我們需要擔心上方立方體單獨翻倒嗎？

不需要，但必須加以驗證。由於 $h < a = 1$，我們有 $2h < 1 + h$，所以

$$P_{\text{上翻}} = \frac{1}{2h} > \frac{1}{1+h} = P_{\text{同翻}}.$$

兩個立方體會在上方立方體能夠單獨翻倒之前一同翻倒。因此只需比較 $P_{\text{滑動}} = \mu$ 與 $P_{\text{同翻}} = 1/(1+h)$：

- 若 $\mu(1+h) < 1$，則 $\mu < \frac{1}{1+h}$，滑動的臨界值先到達，上方立方體在下方立方體上滑動；
- 若 $\mu(1+h) > 1$，則 $\frac{1}{1+h} < \mu$，翻倒的臨界值先到達，兩個立方體一同翻倒。

第 (iv) 部分

若沒有發生滑動，便只需比較 $P_{\text{上翻}}$ 與 $P_{\text{同翻}}$。上方立方體先翻倒，當且僅當

$$\frac{a^4}{2h} < \frac{1+a^3}{2(1+h)} \iff a^4(1+h) < h(1+a^3) \iff a^4 < h\big(1+a^3-a^4\big) = h\big(1+a^3(1-a)\big),$$

其中我們在兩邊乘以正數 $2h(1+h)$。這正是題目所給的條件，所以在此條件下，打破平衡的是上方立方體的翻倒。

第 (v) 部分

當 $a = \frac{1}{2}$ 時，我們需要滿足三個條件。

- 第 (iv) 部分的條件：$h\big(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\big) > \frac{1}{16}$，即 $\frac{17}{16}h > \frac{1}{16}$，所以 $h > \frac{1}{17}$。
- 題目設定要求 $h < a = \frac{1}{2}$。
- 翻倒之前沒有滑動：$P_{\text{上翻}} < P_{\text{滑動}}$，即 $\dfrac{1/16}{2h} < \dfrac{\mu}{8}$，亦即 $\mu > \dfrac{1}{4h}$。（根據第 (ii) 部分，在地面上的滑動永遠不會最先發生。）由於我們同時需要 $\mu < 1$，這要求 $h > \frac{1}{4}$。

所以選取 $h = \frac{2}{5}$，它滿足 $\frac{1}{4} < h < \frac{1}{2}$ 及 $h > \frac{1}{17}$。這時我們需要 $\frac{5}{8} < \mu < 1$；取 $\mu = \frac{3}{4}$。於是各臨界值（以 ρg 為單位）為

$$P_{\text{上翻}} = \tfrac{5}{64} \approx 0.078, \quad P_{\text{滑動}} = \tfrac{3}{32} \approx 0.094, \quad P_{\text{同翻}} = \tfrac{45}{112} \approx 0.402, \quad P_{\text{地面}} = \tfrac{27}{32} \approx 0.844.$$

最小的是 $P_{\text{上翻}}$，所以當 P 增大時，上方立方體會在任何滑動發生之前翻倒：第 (iv) 部分的情況確實會出現。

驗算

- 當 $P \to 0$ 時，d 和 e 都趨向 0：沒有推力時，每個反作用力都作用於質心的正下方，理應如此。
- 單獨對下方立方體取力矩（其重量、距離為 d 的 R 和 F_2，以及方向相反、與 X 距離為 e 的 N 和 F_1），得 $Rd = Ne + F_1\cdot 1$，即 $P(1+h) = Ph + P$。所以第 (i) 部分的兩個答案互相吻合。
- 對於 $a = \frac{1}{2}$、$h = \frac{2}{5}$、$\mu = \frac{3}{4}$，上述四個臨界值都經過精確計算；而第 (ii)–(iv) 部分中的比較亦已用電腦就大量隨機選取的 a、h 和 μ 加以驗證。

常見錯誤

- 在第 (iii) 部分中，只比較滑動與兩個立方體一同翻倒，卻從未證明上方立方體不會先翻倒。
- 對上方立方體取關於地面上某點的力矩，這樣會把接觸面上的摩擦力 F_1 牽涉進來；對 X 取力矩則可避免。
- 在整個系統的力矩方程中，誤把 h 而不是 $1+h$ 當作 P 離地面的高度。

STEP 之外

這裏每一種失效方式都是關於各力的一條不等式，只要所有不等式同時成立，平衡便得以維持；最先失效的，就是臨界值最小的那一條。這種「一組線性約束中有一條起決定作用（binding）」的想法，正是工程學中用於砌體及堆疊結構的極限分析（limit analysis）的核心，更廣泛而言亦是線性規劃（linear programming）的核心。若想深入了解摩擦力、扭矩（torque）及剛體靜力學，可參閱 Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

詳細解答

STEP III 2024，第 11 題

概率與統計 • 二項分佈的期望值

> **STEP III 2024，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分的恆等式（identity）把和式下半部分的每一項 $r\binom{2n}{r}$ 與上半部分的一項配對起來。這種對稱性（symmetry）正是處理 X 所需要的：正面與反面次數中較大者，不是正面的次數，就是反面的次數；把正面和反面的角色互換，便能把期望值（expectation）摺疊到和式的上半部分。之後，第 (iii) 部分只是一個比值檢驗（ratio test），而第 (iv) 部分只需一行。

解答

第 (i) 部分

當 $1 \le r \le 2n$ 時，把 r 與 $r!$ 約去，得

$$r\binom{2n}{r} = \frac{r\,(2n)!}{r!\,(2n-r)!} = \frac{(2n)!}{(r-1)!\,(2n-r)!}.$$

另一邊，$2n-(2n+1-r) = r-1$，所以

$$(2n+1-r)\binom{2n}{2n+1-r} = \frac{(2n+1-r)\,(2n)!}{(2n+1-r)!\,(r-1)!} = \frac{(2n)!}{(2n-r)!\,(r-1)!},$$

同樣是把分子的因子與階乘（factorial）約去。（我們需要 $1 \le r \le 2n$，使 $2n+1-r$ 介乎 1 與 $2n$ 之間，這樣兩個階乘才有意義。）兩個表達式相同，故恆等式成立。

至於和式，$r = 0$ 的項為零。把其餘各項分成 $1 \le r \le n$ 和 $n+1 \le r \le 2n$ 兩組。在較低的一組中，設 $s = 2n+1-r$。當 r 由 1 走到 n，s 便由 $2n$ 遞減至 $n+1$，而根據恆等式，

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{2n}{r} = \sum_{r=1}^{n}(2n+1-r)\binom{2n}{2n+1-r} = \sum_{s=n+1}^{2n} s\binom{2n}{s}.$$

因此較低一組等於較高一組，從而

$$\sum_{r=0}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r},$$

得證。

第 (ii) 部分

設 H 為正面的次數，則 $H \sim \mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$，且 $\mathrm{P}(H=r) = \binom{2n}{r}/2^{2n}$。反面的次數為 $2n-H$，所以 $X = \max(H, 2n-H)$。即是說，當 $H \geq n+1$ 時 $X = H$；當 $H = n$ 時 $X = n$；當 $H \leq n-1$ 時 $X = 2n-H$。因此

$$2^{2n}\,\mathrm{E}(X) = \sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r} + n\binom{2n}{n} + \sum_{r=0}^{n-1}(2n-r)\binom{2n}{r}.$$

在最後一個和式中設 $s = 2n-r$，它由 $2n$ 遞減至 $n+1$。由於 $\binom{2n}{r} = \binom{2n}{2n-r}$，該和式變成 $\sum_{s=n+1}^{2n} s\binom{2n}{s}$，與第一個和式相同。（這就是正反面的對稱性：得到 s 次反面的機會與得到 s 次正面的機會相同。）

> **想一想** $\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r}$ 只涵蓋一半的範圍，該如何求它的值？

這正是第 (i) 部分的用途。題目已給出全範圍的版本：以 $2n$ 代替 n，得 $\sum_{r=0}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2n\cdot 2^{2n-1}$。所以由第 (i) 部分，

$$2\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2n\cdot 2^{2n-1} = n\,2^{2n}.$$

因此

$$2^{2n}\,\mathrm{E}(X) = n\,2^{2n} + n\binom{2n}{n}, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{E}(X) = n\left(1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right),$$

得證。

第 (iii) 部分

設 $a_n = \binom{2n}{n}/2^{2n}$，它是正數。於是

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{n!\,n!}{(2n)!}\cdot\frac{1}{4} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2},$$

這裏用了 $2n+2 = 2(n+1)$。這個比值小於 1，而 $a_n > 0$，所以對每個 $n \geq 1$ 都有 $a_{n+1} < a_n$。此數列（sequence）嚴格遞減（strictly decreasing）。

第 (iv) 部分

你贏得的金額正是第 (ii) 部分的 X，而你要付 £n，所以每付一英鎊的期望贏得金額為

$$\frac{\mathrm{E}(X)}{n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = 1 + a_n.$$

由第 (iii) 部分，n 最小時 a_n 最大，所以你應選 $n = 1$。這時每付一英鎊可取回 $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 英鎊，即每英鎊的期望利潤為 50 便士（50p）。（若「贏得金額」指的是利潤，則為 $\mathrm{E}(X)/n - 1 = a_n$，結論不變。）

驗算

- 當 $n = 1$（擲兩次）時，HH 或 TT 對應 $X = 2$，HT 或 TH 對應 $X = 1$，所以 $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$。公式給出 $1\cdot(1 + \frac{2}{4}) = \frac{3}{2}$。
- 當 $n = 2$ 時，公式給出 $2(1 + \frac{6}{16}) = \frac{11}{4}$，所以每英鎊的回報為 $\frac{11}{8} = 1.375 < 1.5$。當 $n = 3$ 時，回報為 $\frac{21}{16} = 1.3125$，正如第 (iii) 部分所預測，仍在遞減。
- 對於 $n \le 5$，已用電腦逐一檢查全部 2^{2n} 個擲幣序列，確認 $\mathrm{E}(X)$ 的公式正確。

常見錯誤

- 把 $H = n$ 的項計算兩次，或完全漏掉。這一項不屬於分割的任何一邊，只貢獻一次 $n\binom{2n}{n}$。
- 在第 (iv) 部分中，去最大化會無限增大的 $\mathrm{E}(X)$ 本身，而不是每付一英鎊的 $\mathrm{E}(X)$。

STEP 之外

超出的部分 $\mathrm{E}(X) - n = na_n$ 是簡單隨機漫步（simple random walk）與起點之期望距離的一半。由史特靈公式（Stirling's formula），$a_n \approx 1/\sqrt{\pi n}$，所以這個超出量的增長與 $\sqrt{n/\pi}$ 相若：正面與反面次數的典型差距，按擲幣次數的平方根增長。與此同時，每英鎊的超出量 a_n 趨向 0，這正是大數定律（law of large numbers）在起作用。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）講述了隨機漫步及這些極限。

詳細解答

STEP III 2024，第 12 題

概率與統計 • 幾何概率

STEP III 2024，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

若在單位正方形（unit square）內均勻（uniformly）隨機選取一點，則 $\mathrm{P}(R \le r)$ 正是正方形內落在以原點為圓心、半徑為 r 的圓之內那部分的面積。當 $r > 1$ 時，圓會從正方形的兩條邊突出，而留在正方形內的區域可以整齊地分拆為兩個直角三角形和一個扇形（sector）。至於期望值（expectation），先求導得出概率密度函數（density），再對 $rf(r)$ 積分；用一次分部積分（integration by parts）便能消去麻煩的 $\cos^{-1}$ 項，最後以雙曲代換（hyperbolic substitution）完成計算。

解答

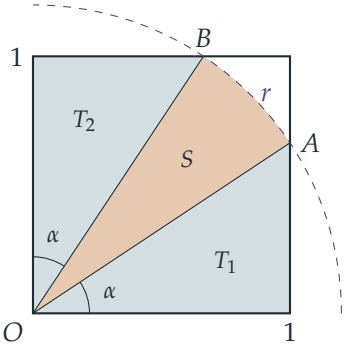
第 (i) 部分

由於概率等於面積，$\mathrm{P}(R \le r)$ 就是正方形內與 O 的距離不超過 r 的點所組成集合的面積。

當 $0 \le r \le 1$ 時，四分之一圓盤 $x, y \ge 0$，$x^2 + y^2 \le r^2$ 完全位於正方形之內，因此

$$\mathrm{P}(R \le r) = \tfrac{1}{4}\pi r^2 \qquad (0 \le r \le 1).$$

當 $1 \le r \le \sqrt{2}$ 時，圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 與邊 $x = 1$ 相交於 $A = \left(1, \sqrt{r^2 - 1}\right)$，與邊 $y = 1$ 相交於 $B = \left(\sqrt{r^2 - 1}, 1\right)$；由於 $0 \le \sqrt{r^2 - 1} \le 1$，這兩點都在正方形上。設 α 為 OA 與 x 軸所成的角，則 $\cos\alpha = 1/r$，即 $\alpha = \cos^{-1}(r^{-1})$。由於圖形關於 $y = x$ 對稱，OB 與 y 軸所成的角同樣是 α。



正方形內位於圓內的部分由以下各部分組成：

- 頂點為 O、$(1,0)$、A 的三角形 T_1：直角位於 $(1,0)$，兩條直角邊分別為 1 和 $\sqrt{r^2-1}$，故面積為 $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$；
- 頂點為 O、$(0,1)$、B 的三角形 T_2：它是 T_1 的鏡像，面積同樣是 $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$；
- 介於 OA 與 OB 之間、半徑為 r 的扇形 S，其圓心角為 $\frac{\pi}{2}-2\alpha$，故面積為 $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{1}{4}\pi r^2-r^2\alpha$。

相加得

$$\mathrm{P}(R\le r)=\sqrt{r^2-1}+\tfrac{1}{4}\pi r^2-r^2\cos^{-1}(r^{-1})\qquad(1\le r\le\sqrt{2}),$$

此即所求。（在 $r=1$ 時，兩條公式都給出 $\frac{1}{4}\pi$；而在 $r=\sqrt{2}$ 時，我們得到 $1+\frac{1}{2}\pi-2\cdot\frac{\pi}{4}=1$，正如所料。）

第 (ii) 部分

記 $F(r)=\mathrm{P}(R\le r)$，並以 $f=F'$ 表示概率密度函數。在 $0<r<1$ 上，$f(r)=\frac{1}{2}\pi r$。在 $1<r<\sqrt{2}$ 上，我們需要

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}(r^{-1})=-\frac{1}{\sqrt{1-r^{-2}}}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)=\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}},$$

這裏用了當 $r>0$ 時 $\sqrt{1-r^{-2}}=\sqrt{r^2-1}/r$。於是由乘積法則（product rule），

$$\begin{aligned}f(r)&=\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}+\tfrac{1}{2}\pi r-\left(2r\cos^{-1}(r^{-1})+\frac{r^2}{r\sqrt{r^2-1}}\right)\\&=\tfrac{1}{2}\pi r-2r\cos^{-1}(r^{-1}).\end{aligned}$$

兩個 $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-1}}$ 項互相抵消，這是個好兆頭。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R)&=\int_0^{\sqrt{2}}rf(r)\,\mathrm{d}r=\int_0^{\sqrt{2}}\tfrac{1}{2}\pi r^2\,\mathrm{d}r-2\int_1^{\sqrt{2}}r^2\cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi(\sqrt{2})^3}{6}-2I=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{3}-2I,\end{aligned}$$

其中 $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} r^2 \cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r$。

想一想 怎樣才能消去 I 裏面的反餘弦？

進行分部積分，對 $\cos^{-1}(r^{-1})$ 求導（上面已求得它的導數是代數式），並對 r^2 積分：

$$\begin{aligned} I &= \Big[\tfrac{1}{3}r^3\cos^{-1}(r^{-1})\Big]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{3}\cdot\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

這裏用了 $\cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ 及 $\cos^{-1}1 = 0$。（被積函數在 $r=1$ 處無界，但在該處它的表現與 $1/\sqrt{2(r-1)}$ 相若，所以積分收斂（converges）。）因此

$$\mathrm{E}(R) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} + \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r,$$

此即所求結果。

第 (iii) 部分

$\sqrt{r^2-1}$ 提示我們設 $r = \cosh t$，則 $\mathrm{d}r = \sinh t\,\mathrm{d}t$，且 $\sqrt{r^2-1} = \sinh t$（因為 $t \geq 0$）。積分上下限變為 $t = 0$ 和 $t = T$，其中 $\cosh T = \sqrt{2}$，所以 $\sinh T = 1$，且

$$T = \cosh^{-1}\sqrt{2} = \ln\big(\sqrt{2}+\sqrt{2-1}\big) = \ln\big(\sqrt{2}+1\big).$$

於是

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r &= \int_0^T \frac{\cosh^2 t}{\sinh t}\,\sinh t\,\mathrm{d}t = \int_0^T \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\sinh t\cosh t\Big]_0^T = \tfrac{1}{2}\ln\big(\sqrt{2}+1\big) + \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}. \end{aligned}$$

乘以 $\frac{2}{3}$，得

$$\mathrm{E}(R) = \tfrac{1}{3}\Big(\sqrt{2} + \ln\big(\sqrt{2}+1\big)\Big),$$

此即所求。

驗算

- F 在 $r=1$ 處連續（兩段公式都給出 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$），並在 $r=\sqrt{2}$（即最遠的那個角）處達到 1。
- 概率密度函數 $\frac{1}{2}\pi r - 2r\cos^{-1}(r^{-1})$ 在 $r=\sqrt{2}$ 處等於零，理應如此：只有那唯一的角點才有這麼遠。

- 數值上，$\mathrm{E}(R) = \frac{1}{3}(1.41421 + 0.88137) \approx 0.7652$，合理地介於 $\frac{1}{2}$ 與 $\sqrt{2}$ 之間。以電腦模擬 4×10^5 個隨機點，得到的平均距離約為 0.766，而其經驗分佈函數（empirical distribution function）在多個 r 值上與 F 的差距都在 0.002 以內。

常見錯誤

- 把扇形的圓心角當成 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 而非 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$：在兩條邊的每一條都切出了一個三角形。
- 弄錯 $\cos^{-1}(r^{-1})$ 導數的正負號：兩個負號（分別來自 $\cos^{-1}$ 和 r^{-1}）互相抵消，所以導數是正的。

STEP 之外

這是幾何概率（geometric probability）的初體驗：由單位正方形的一個角到正方形內隨機一點的平均距離。與之相關的問題——單位正方形內兩個隨機點之間的平均距離——有一個類似但更複雜、含有 $\ln(1+\sqrt{2})$ 的閉合形式，是二重積分（double integrals）與變量代換（change of variables）的經典練習。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）介紹了由幾何定義的分佈，以及如何由分佈函數（distribution function）計算期望值。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2024 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。