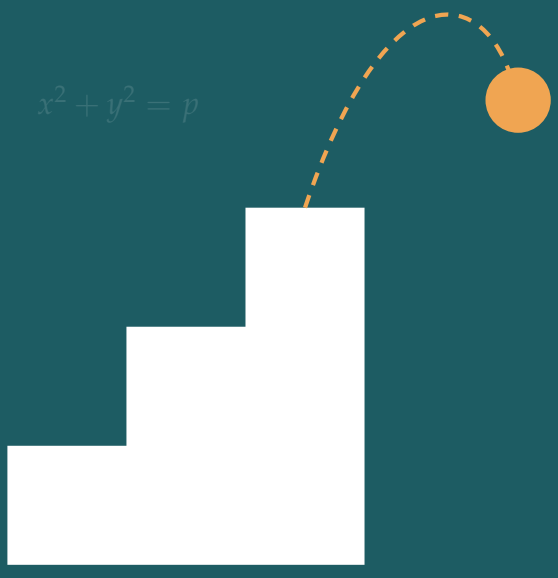
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP II 及 III

2023 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP II 及 III

2023 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2023 年詳細解答

2023 年 STEP 試卷（STEP II 及 III）全部 24 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP II

第 1 題 代換積分法 純數學 . . . 3

第 2 題 三角代換 純數學 . . . 7

第 3 題 多項式與導數 純數學 . . . 12

第 4 題 消去多項式中的根式 純數學 . . . 16

第 5 題 遞推關係與收斂 純數學 . . . 20

第 6 題 斐波那契矩陣恆等式 純數學 . . . 24

第 7 題 兩個平方數之和 純數學 . . . 28

第 8 題 三維向量 純數學 . . . 33

第 9 題 斜坡上的連接質點 力學 . . . 37

第 10 題 擺體軌道的包絡線 力學 . . . 41

第 11 題 混合分佈 概率與統計 . . . 46

第 12 題 最大值的分佈 概率與統計 . . . 50

STEP III

第 1 題 圓錐曲線的切線 純數學 . . . 54

第 2 題 極坐標曲線的面積 純數學 . . . 58

第 3 題 三次方程的複數根 純數學 . . . 62

第 4 題 切比雪夫多項式的係數 純數學 . . . 67

第 5 題 數論 純數學 . . . 71

第 6 題 雙曲函數與單調性 純數學 . . . 75

第 7 題 積分不等式 純數學 . . . 79

第 8 題 分段微分方程 純數學 . . . 83

第 9 題 以繩連接的兩質點運動 力學 . . . 88

第 10 題 槓桿的平衡 力學 . . . 92

第 11 條件期望值 概率與統計 96
第 12 組合概率 概率與統計 100

詳細解答

STEP II 2023，第 1 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2023，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

代換（substitution）$x = 1/t$ 把 $\frac{1}{2}$ 和 2 互換，因此它把區間（interval）$[\frac{1}{2}, 2]$ 映射到自身（方向相反）。於是，在這個區間上的積分（integral）可以改寫成在同一區間上、外表不同的另一個積分。有時新的被積函數（integrand）可以直接積分；有時它是原被積函數的「搭檔」，把兩者相加（或互相比較）便能替我們完成工作。

解答

第 (i) 部分

設 $x = 1/t$，則 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$。由於 $a > 0$，$[a, b]$ 中每個 x 都是正數，對應的 t 亦然。於是

$$1 + x^2 = \frac{t^2 + 1}{t^2} \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)^{3/2} = \frac{(1 + t^2)^{3/2}}{t^3},$$

這裏用到了 $\sqrt{t^2} = t$，因為 $t > 0$。積分限 $x = a$ 和 $x = b$ 變成 $t = a^{-1}$ 和 $t = b^{-1}$。因此

$$\int_a^b \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{t^3}{(1 + t^2)^{3/2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{-t}{(1 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t,$$

得證。

第 (ii) 部分

(a) 取 $a = \frac{1}{2}$、$b = 2$，新的積分限是 2 和 $\frac{1}{2}$。把上下限對調便可吸收負號：

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

新的被積函數是 $1+t^2$ 某個冪的導數（derivative）（的倍數）：由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t^2)^{-1/2} = -t(1+t^2)^{-3/2}$，

$$\int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \Big[-(1+t^2)^{-1/2}\Big]_{1/2}^{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5/4}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(b) 被積函數是偶函數（even function），所以在 $[-2,2]$ 上的積分是在 $[0,2]$ 上積分的兩倍。把後者拆成 $[0,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},2]$；第二段就是 (a) 部分。

> **想一想** 第 (i) 部分要求 $a>0$。從 0 開始的那一段該怎樣處理？

先在 $[a,\frac{1}{2}]$ 上處理，其中 $0<a<\frac{1}{2}$，這時第 (i) 部分適用；然後令 $a\to 0^+$。在第 (i) 部分取 $b=\frac{1}{2}$，得

$$\int_{a}^{1/2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{1/a} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}}}.$$

當 $a\to 0^+$ 時，$a^{-2}\to\infty$，最後一項趨於 0。左邊趨於在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上的積分，因為被積函數在該處連續。所以這一段同樣等於 $\frac{1}{\sqrt{5}}$，從而

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

第 (iii) 部分

(a) 記 $J=\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$，再次使用 $x=1/t$。此時 $(1+x^2)^2 = (1+t^2)^2/t^4$，所以

$$J = \int_{2}^{1/2} \frac{t^4}{(1+t^2)^2}\cdot\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

把啞變量（dummy variable）t 改名為 x 後，這就是第一個等式。把這第二個積分記作 K，於是 $J=K$。把兩個被積函數相加，

$$J+K = \int_{1/2}^{2} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

由於 $J=K$，得 $J=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，等式鏈便完成了。

因此

$$J = \tfrac{1}{2}(\arctan 2 - \arctan\tfrac{1}{2}).$$

這個結果可用以下兩種方法之一化簡。由於 $\arctan 2 + \arctan\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$（兩直角邊為 1 和 2 的直角三角形中的兩個餘角（complementary angles））得 $J=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{2}$。又或者，

用 tan 的減法公式，$\tan(\arctan 2 - \arctan\frac{1}{2}) = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{3}{4}$，而這個差位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內，所以

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{3}{4} \approx 0.3218.$$

(b) 設 L 為所求的積分。在動用難求的原函數（antiderivative）之前，不妨再試一次 $x = 1/t$。被積函數變成

$$\frac{1-\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = \frac{\frac{t-1}{t}}{\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}} = \frac{t(t-1)}{\sqrt{1+t^2}},$$

這裏再次用到 $t > 0$。乘以 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$，並注意積分限由 2 到 $\frac{1}{2}$，

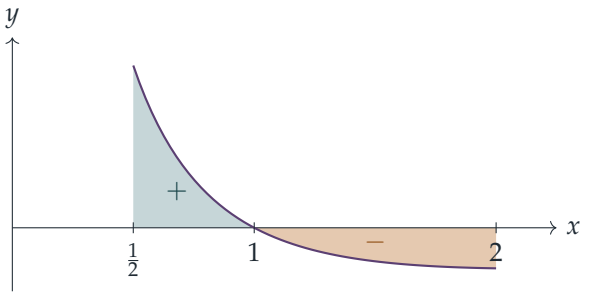
$$L = \int_{2}^{1/2} \frac{-(t-1)}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t-1}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{1/2}^{2} \frac{1-t}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -L.$$

想一想 代換把 L 變成了 $-L$。這是矛盾嗎？

不是：它正好告訴我們積分的值。由 $L = -L$ 得 $2L = 0$，所以

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1-x}{x(1+x^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

圖像也吻合：$[\frac{1}{2}, 1]$ 上的正面積恰好抵消 $[1, 2]$ 上的負面積，因為 $x \mapsto 1/x$ 把這兩段互換，而且由上面的推導可知，它把其中一段的面積變成另一段面積的相反數。



驗算

- $(1+x^2)^{-3/2}$ 的一個原函數是 $x(1+x^2)^{-1/2}$（求導即可驗證）。用它計算，(ii)(a) 得 $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472$，(ii)(b) 得 $\frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1.7889$，與我們的答案一致。
- 在 (iii)(a) 中，$\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4} \approx 0.32175$ 與 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2} \approx 0.32175$ 相符。對等式鏈中三個積分進行數值積分（numerical quadrature），都得到相同的值。
- 在 (iii)(b) 中，被積函數在 $x < 1$ 時為正，在 $x > 1$ 時為負，所以答案為零是合理的。數值積分在捨入誤差範圍內得到 0。

常見錯誤

- 漏掉 $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ 中的負號，或忘記對調積分上下限會把它抵消。
- 在 (ii)(b) 中直接以 $a = 0$ 套用第 (i) 部分，這需要積分限 $t = 1/0$。應該取極限，或者乾脆用原函數。
- 寫 $\sqrt{(1+t^2)/t^2} = \sqrt{1+t^2}/t$ 時沒有指出這需要 $t > 0$。

STEP 之外

映射 $x \mapsto 1/x$ 是區間 $[\frac{1}{2}, 2]$ 的一種對稱性（symmetry），而利用積分的對稱性是一個反覆出現的技巧，例如藉 $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ 計算 $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$。第 (ii)(b) 部分讓你初嘗瑕積分（improper integral）：代換把一個有限的端點送到無窮遠，我們必須小心地取極限。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）嚴謹地處理積分的極限，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）則有更多 STEP 風格的積分練習。

詳細解答

STEP II 2023，第 2 題

純數學 • 三角代換

STEP II 2023，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

每條等式的右方，其實都是一條熟悉的倍角公式（multiple-angle formula）換了個樣子：當 $t = \tan\alpha$ 時，$\frac{2t}{1-t^2}$ 就是 $\tan 2\alpha$，$\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ 就是 $\tan 3\alpha$；而當 $t = \cos\alpha$ 時，$2t^2 - 1$ 就是 $\cos 2\alpha$。作代換（substitution）後，三條互相牽連的方程便化為一條只含一個角的三角方程，既容易求解，更重要的是容易計數。唯一要小心的，是確保這個代換恰好把每個解都捕捉一次。

解答

第 (i) 部分

每個實數都恰好對應 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 中的一個 α，使該實數等於 $\tan\alpha$，所以把 x 寫成 $x = \tan\alpha$（其中 α 在該區間內）不會遺失任何解。第一條方程要有意義，須有 $x \neq \pm 1$，即 $\alpha \neq \pm\frac{1}{4}\pi$，因此 2α 不是 $\frac{1}{2}\pi$ 的奇數倍，可以使用二倍角公式（double-angle formula）：

$$y = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan 2\alpha.$$

對 $y = \tan 2\alpha$ 作完全相同的步驟（由於 z 有定義，故 $y \neq \pm 1$），得 $z = \tan 4\alpha$；再對 z 作同樣步驟（由於 $z \neq \pm 1$），得 $x = \tan 8\alpha$。又因 $x = \tan\alpha$，故

$$\tan\alpha = \tan 8\alpha,$$

此即所求。兩個角的正切相等，當且僅當兩角相差 π 的整數倍，所以對某整數 k 有 $8\alpha = \alpha + k\pi$，即

$$\alpha = \frac{k\pi}{7}.$$

條件 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ 等價於 $-\frac{7}{2} < k < \frac{7}{2}$，所以 $k = -3, -2, \ldots, 3$。

反過來，這七個值每一個都給出真正的解：$2\alpha = \frac{2k\pi}{7}$ 和 $4\alpha = \frac{4k\pi}{7}$ 永遠不會是 $\frac{1}{2}\pi$ 的奇數倍（否則 $4k$ 或 $8k$ 須等於 7 乘一個奇數，於是 $7 \mid k$，迫使 $k = 0$，但這時得到的是 0，並非奇數倍），所以 x, y, z 都不等於 ± 1，每個分母都不為零，上面的推導可以倒過來進行。不同的 k 給出 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 中不同的 α，因而給出不同的 x。所以恰好有七個解。

要以題目要求的形式寫出這些解，可利用 $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$，把 2α 和 4α 減去 π 的倍數，化到 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之內。例如 $\tan\frac{4\pi}{7} = \tan(-\frac{3\pi}{7})$，$\tan\frac{8\pi}{7} = \tan\frac{\pi}{7}$。記 $t_m = \tan\frac{m\pi}{7}$，則解 (x, y, z) 為：

k	(x, y, z)
0	$(0, 0, 0)$
1	$(t_1,\ t_2,\ t_{-3})$
2	$(t_2,\ t_{-3},\ t_1)$
3	$(t_3,\ t_{-1},\ t_{-2})$

k	(x, y, z)
-1	$(t_{-1},\ t_{-2},\ t_3)$
-2	$(t_{-2},\ t_3,\ t_{-1})$
-3	$(t_{-3},\ t_1,\ t_2)$

留意除 $(0, 0, 0)$ 外，這些解正是 (t_1, t_2, t_{-3}) 和 (t_{-1}, t_{-2}, t_3) 的循環排列（cyclic rearrangement）。這是必然的，因為方程組在 $x \to y \to z \to x$ 之下保持不變。

第 (ii) 部分

先推導三倍角公式（triple-angle formula）：設 $t = \tan\alpha$，

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan\alpha} = \frac{\frac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \frac{2t^2}{1-t^2}} = \frac{2t + t - t^3}{1 - t^2 - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}.$$

與前相同，設 $x = \tan\alpha$，其中 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$。方程要求 $1 - 3x^2$、$1 - 3y^2$、$1 - 3z^2$ 皆不為零；在此前提下，公式依次給出 $y = \tan 3\alpha$、$z = \tan 9\alpha$ 和 $x = \tan 27\alpha$。於是 $\tan\alpha = \tan 27\alpha$，得 $26\alpha = k\pi$，即

$$\alpha = \frac{k\pi}{26}, \qquad -13 < k < 13.$$

這是 α 的 25 個候選值，各自給出不同的 x 值。

> **想一想** 這 25 個候選值當中，會不會有些令某個分母為零，因而並非真正的解？

這正是需要檢查的地方。分母 $1 - 3\tan^2\beta$ 在 $\beta \equiv \pm\frac{1}{6}\pi \pmod{\pi}$ 時為零，而當 β 是 $\frac{1}{2}\pi$ 的奇數倍時，正切本身沒有定義。這裏涉及的角是 $\beta = 3^j \cdot \frac{k\pi}{26}$，其中 $j = 0, 1, 2$。

- 若 $3^j k\pi/26 = \pm\frac{1}{6}\pi + m\pi$，則 $3^{j+1}k = \pm 13 + 78m$。左方是 3 的倍數，右方卻不是（因為 78 是 3 的倍數而 13 不是）。不可能。

- 若 $3^j k\pi/26 = \frac{1}{2}(2m+1)\pi$，則 $3^j k = 13(2m+1)$，所以 13 整除 k，迫使 $k = 0$；但這時左方為 0，並非 13 的奇數倍。不可能。

所以每個候選值都是真正的解，方程組恰好有 25 個實數解。（區間所排除的 $k = \pm 13$ 對應 $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$，此時 $\tan\alpha$ 不存在。）

第 (iii)(a) 部分

現在 $|x| \le 1$，所以可以對恰好一個 $\alpha \in [0,\pi]$ 寫 $x = \cos\alpha$。二倍角公式 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ 給出 $y = \cos 2\alpha$，繼而 $z = \cos 4\alpha$ 及 $x = \cos 8\alpha$；這些自動滿足 $|y| \le 1$ 和 $|z| \le 1$。因此三者皆在 $[-1,1]$ 內的解，恰好對應滿足

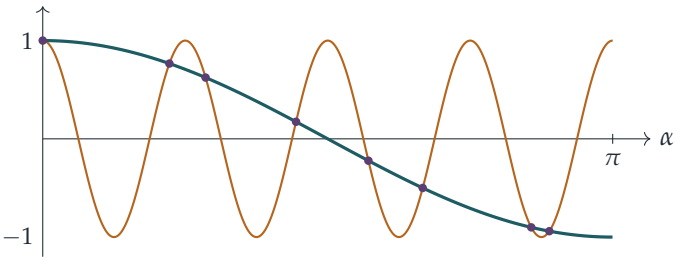
$$\cos 8\alpha = \cos\alpha.$$

的 $\alpha \in [0,\pi]$。兩個角的餘弦相等，當且僅當兩角在相差 2π 的整數倍的意義下相等或互為相反數，所以

$$8\alpha = \alpha + 2m\pi \quad \text{或} \quad 8\alpha = -\alpha + 2n\pi, \qquad \text{即} \qquad \alpha = \frac{2m\pi}{7} \quad \text{或} \quad \alpha = \frac{2n\pi}{9}.$$

在 $[0,\pi]$ 內，第一族給出 $m = 0,1,2,3$，即 $0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$；第二族給出 $n = 0,1,2,3,4$，即 $0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$。唯一重疊的是 $\alpha = 0$（公共值須滿足 $\frac{m}{7} = \frac{n}{9}$，即 $9m = 7n$，迫使 $7 \mid m$）。於是剩下 $4+5-1 = 8$ 個不同的 α 值；由於餘弦在 $[0,\pi]$ 上是一一對應（one-to-one）的，它們給出 8 個不同的 x 值，每個 x 決定 y 和 z。所以滿足 $|x|, |y|, |z| \le 1$ 的解恰好有 8 個。

下圖顯示在 $[0,\pi]$ 上 $\cos 8\alpha$（琥珀色）與 $\cos\alpha$（青綠色）的八個交點。



第 (iii)(b) 部分

現在取消限制。消去 y 和 z：$y = 2x^2 - 1$ 是 x 的二次式，所以 $z = 2y^2 - 1$ 是 x 的 4 次多項式（polynomial），於是 $x = 2z^2 - 1$ 變成

$$x = 2\Big(2\big(2x^2-1\big)^2 - 1\Big)^2 - 1,$$

這是 x 的 8 次多項式方程（右方的首項（leading term）是 $2\cdot(2\cdot 2^2)^2x^8 = 128x^8$，沒有任何項能把它抵消）。展開後為

$$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 - x + 1 = 0.$$

方程組的每個解 (x, y, z) 中，x 都是這個八次多項式（octic）的根，而 x 決定 y 和 z。8 次多項式最多有 8 個實根，而 (a) 部分已經找到 8 個不同的實根，即該部分求得的八個 α 值所對應的 $\cos\alpha$。所以這些就是全部的根，方程組的每個解都是 (a) 中八個解之一。特別地，每個解都滿足 $|x| \le 1$、$|y| \le 1$、$|z| \le 1$，這正是要證明的。

想一想 為甚麼 (b) 需要用到次數，而不能單靠 (a) 的八個解？

(a) 部分只找出 $[-1, 1]$ 內的解；單憑它，對例如 $x = 5$ 的情況甚麼也說不出來。排除其他一切可能的，是次數的上界：八次多項式最多只有八個根，而 (a) 已經把它們用盡。

驗算

- 在 (i) 中取 $k = 1$：$\tan\frac{\pi}{7} \approx 0.4816$，而 $\frac{2(0.4816)}{1-0.4816^2} \approx 1.2540 = \tan\frac{2\pi}{7}$。再做兩步便回到 0.4816。
- 以電腦在實數線上搜尋 $f(f(f(x))) = x$ 的根，對 $f(t) = \frac{2t}{1-t^2}$ 恰好找到 7 個根，對 $f(t) = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ 恰好找到 25 個，後者與 $\tan\frac{k\pi}{26}$（$|k| \le 12$）吻合。
- 在 (iii) 中，$x = 1$ 給出 $y = z = 1$，即 $\alpha = 0$ 的解；而確實 $128 - 256 + 160 - 32 - 1 + 1 = 0$。在 $[-50, 50]$ 上搜尋該八次多項式的根，恰好找到 8 個，全部在 $[-1, 1]$ 內。

常見錯誤

- 在 (ii) 中容許 $k = \pm 13$（或完全不限制 α），得出 27 個解；$\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$ 並不對應任何實數 x。
- 在 (iii)(a) 中漏掉第二族 $8\alpha = -\alpha + 2n\pi$，或把 $\alpha = 0$ 計算了兩次。
- 在 (i) 中沒有化簡 $\tan\frac{4\pi}{7}$ 之類的答案，而題目要求角度須在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之內。

STEP 之外

滿足 $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$ 的多項式 T_n 稱為切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials）；第 (iii) 部分就是方程 $T_8(x) = x$，而上面的八次多項式就是 $T_8(x) - x$。反覆迭代像 $x \mapsto 2x^2 - 1$ 這樣的映射，並追問哪些點在三步後回到原處，正是動力系統（dynamical systems）理論的起點：這個映射在 $[-1, 1]$ 上是「混沌」（chaotic）的，而角度代換

把它變成簡單的倍增 $\alpha \mapsto 2\alpha$。同樣的技巧也解釋了為何 (i) 和 (ii) 中的正切映射有那麼多週期點（periodic points）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多同類題目。

詳細解答

STEP II 2023，第 3 題

純數學 • 多項式與導數

STEP II 2023，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

對 q 求導（differentiate），只會把和式中的每一項向後移一位，而最後一個導數為零，所以 $q' = q - p$。整道題都由這一個關係推動。之後三個證明 $q > 0$ 的方法，分別從三個角度解讀這個關係：作為關於駐點（stationary point）的事實；作為 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ 的導數（即積分因子（integrating factor））；以及作為反覆使用分部積分法（integration by parts）所得的積分公式。

解答

以下一律記 $p(x) = ax^n + \ldots$，其中 $a \neq 0$。對於 $k \geq 1$，$p^{(k)}$ 的次數小於 n（或為零），而 $p^{(n+1)} \equiv 0$。

第 (i) 部分

(a) 奇數次多項式（polynomial）在實數線的一端趨向 $+\infty$，在另一端趨向 $-\infty$。由於它是連續的，根據介值定理（intermediate value theorem），它必在某處取值 0。但對所有 x 都有 $p(x) > 0$，所以 p 沒有實根，因此 n 必為偶數。

此外 $a > 0$：若 $a < 0$，則當 $x \to \infty$ 時 $p(x) \to -\infty$，與 $p > 0$ 矛盾。在 $q = p + p' + \cdots + p^{(n)}$ 中，第一項以後的每一項次數都小於 n，所以 q 的次數亦為 n，而首項係數（leading coefficient）為 $a > 0$。因此當 $x \to \infty$ 時 $q(x) \to +\infty$（而由於 n 是偶數，當 $x \to -\infty$ 時亦然），所以 q 必定取到正值。（若 $n = 0$，則 $q = p$ 是正的常數。）

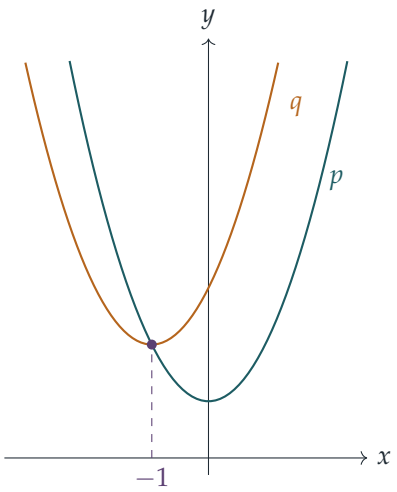
(b) 逐項求導，

$$q'(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} p^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x) - p(x) + p^{(n+1)}(x) = q(x) - p(x),$$

因為對於 n 次多項式，$p^{(n+1)} \equiv 0$。

第 (ii) 部分

(a) 在 $y = q(x)$ 的駐點 x_0 處，有 $q'(x_0) = 0$，所以由 (i)(b) 得 $q(x_0) = p(x_0)$：兩條曲線在該處相交。



（圖中所示為 $p(x) = x^2 + 1$，此時 $q(x) = x^2 + 2x + 3$。q 的最小值在 $x = -1$ 處，正正是兩條曲線相交之處。）

現在證明 $q > 0$。若 $n = 0$，則 $q = p > 0$，所以設 $n \geq 2$。由 (i)(a)，當 $x \to \pm\infty$ 時 $q(x) \to +\infty$，所以可以選取 $R > 0$，使得只要 $|x| > R$，便有 $q(x) > q(0)$。

想一想 我們怎樣知道 q 確實有最低點，而且該點是駐點？

在閉區間 $[-R, R]$ 上，連續函數 q 在某點 x_0 取得最小值，且 $q(x_0) \leq q(0)$。在區間以外，q 大於 $q(0)$，所以 $q(x_0)$ 是 q 在整條實數線上的最小值。由於 x_0 是 $\mathbb{R}$ 的內點（interior point），且 q 可導（differentiable），故 $q'(x_0) = 0$。由第一個結果，$q(x_0) = p(x_0) > 0$。所以對每個 x，

$$q(x) \geq q(x_0) = p(x_0) > 0.$$

(b) 利用 (i)(b)，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x} q(x)\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(q'(x) - q(x)\right) = -\mathrm{e}^{-x} p(x) < 0$$

對所有 x 成立，因為 $p>0$。所以 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ 是（嚴格）遞減的。

至於 $q>0$：由於 q 是多項式，當 $X\to\infty$ 時 $\mathrm{e}^{-X}q(X)\to 0$（指數函數增長得比冪函數快）。遞減函數永遠不會低於它在 $+\infty$ 的極限，所以對所有 X 都有 $\mathrm{e}^{-X}q(X)\geq 0$。於是對任意 x，嚴格遞減給出

$$\mathrm{e}^{-x}q(x)>\mathrm{e}^{-(x+1)}q(x+1)\geq 0,$$

再乘以 $\mathrm{e}^{x}>0$，便得 $q(x)>0$。

(c) 這裏所有積分都收斂（converge），因為 t 的多項式乘以 e^{-t} 在 $[0,\infty)$ 上可積。取 $u=p(x+t)$ 及 $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 作分部積分（把 x 視為常數）：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \Big[-p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^\infty+\int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= p(x)+\int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因為當 $t\to\infty$ 時 $p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\to 0$。這就是第一個結果。

上述計算除了 p 是多項式之外，沒有用到 p 的任何其他性質，所以同樣的結果對每一個導數都成立：記

$$I_k(x)=\int_0^\infty p^{(k)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\qquad \text{我們有}\qquad I_k(x)=p^{(k)}(x)+I_{k+1}(x)$$

對於 $k=0,1,\ldots,n$ 成立。此外 $I_{n+1}(x)=0$，因為 $p^{(n+1)}\equiv 0$。反覆應用這個關係，

$$I_0(x)=p(x)+I_1(x)=p(x)+p^{(1)}(x)+I_2(x)=\cdots=\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)+I_{n+1}(x)=q(x),$$

這就是第二個結果。

> **想一想** 為甚麼這條公式令 $q(x)>0$ 變得顯而易見？

對每個固定的 x，被積函數（integrand）$p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$ 對每個 $t\geq 0$ 都連續且嚴格為正，因為 $p>0$ 處處成立。連續且嚴格為正的函數在長度為正的區間上的積分嚴格為正。所以對所有 x，$q(x)=I_0(x)>0$。

驗算

- 取 $p(x)=x^2+1$，得 $q(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$。確實 $q'=2x+2=q-p$，q 的最小值為 2，在 $x=-1$ 處取得，而 $p(-1)=2$，正如 (ii)(a) 所預測。
- 對同一個 p，在 $x=0$ 處：$\int_0^\infty(t^2+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=2!+1=3=q(0)$。
- 我們用電腦對 300 個次數不超過 6 的隨機處處為正多項式作驗證：$q'=q-p$ 準確成立；在 $[-20,20]$ 的網格上 $q>0$ 而 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ 遞減；以及數值積分重現 $q(x)$ 至約十位有效數字。

常見錯誤

- 在 (ii)(a) 中，沒有給出理由便假設最小值存在。這需要在兩端都有 $q \to +\infty$，而這用到 (i)(a) 中的 n 為偶數及 $a > 0$。
- 在 (ii)(b) 中，只由極限得出 $\mathrm{e}^{-x}q(x) \geq 0$ 便停下。正是嚴格遞減把這個結論提升為 $q(x) > 0$。
- 忘記了邊界項 $p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$ 必須在 $t \to \infty$ 時趨於零，才可以把它捨去。

STEP 之外

(ii)(b) 中的函數 e^{-x} 是一個積分因子，而 (ii)(c) 則明確地解出 $q' - q = -p$。公式 $\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 是一種拉普拉斯變換（Laplace transform）式的積分，而恆等式 $q = (1 + D + D^2 + \cdots)p = (1 - D)^{-1}p$（其中 D 表示求導）則讓人初嚐線性微分方程（linear differential equations）的算子方法（operator methods）。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵蓋積分因子及拉普拉斯變換；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）則把 (ii)(a) 中的極值論證嚴格化。

詳細解答

STEP II 2023，第 4 題

純數學 • 消去多項式中的根式

STEP II 2023，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 6.3 節以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 爲根的多項式中有完整的引導式講解：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/field-extensions.html

關鍵思路

要從方程中消去根式（surd），就把所有含該根式的項移到一邊，其餘的項移到另一邊，然後平方（或立方）。每一部分用的都是同一招：把數寫成「一個好處理的數加上一個根式」，把該根式單獨分離出來，再升冪直至它消失為止。如果展開後仍有根式殘留，就把含它的項集中到一邊，再重複一次。

解答

第 (i) 部分

展開 $(x-\sqrt{2})^2=3$，得 $x^2-2\sqrt{2}\,x+2=3$，即

$$x^2-1=2\sqrt{2}\,x.$$

現在根式已單獨在一邊，於是兩邊平方：

$$x^4-2x^2+1=8x^2 \quad\Longrightarrow\quad x^4-10x^2+1=0,$$

得證。（平方只是單向推導，但這正是我們所需要的：每個滿足第一條方程的 x 都滿足第二條方程。）

至於推論部分，取 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$。那麼 $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$，所以 $(x-\sqrt{2})^2=3$，而由剛才所證，$\mathrm{f}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$。

第 (ii) 部分

設 $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 及 $y = x-\sqrt{5} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$。由第 (i) 部分，$y^4 - 10y^2 + 1 = 0$。現在把它改寫成以 x 表示。首先，

$$y^2 = (x-\sqrt{5})^2 = (x^2+5) - 2\sqrt{5}\,x,$$

因此

$$\begin{aligned} y^4 &= (x^2+5)^2 - 4\sqrt{5}\,x(x^2+5) + 20x^2 \\ &= x^4 + 30x^2 + 25 - 4\sqrt{5}\,x^3 - 20\sqrt{5}\,x. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} 0 &= y^4 - 10y^2 + 1 \\ &= \left(x^4 + 30x^2 + 25 - 4\sqrt{5}\,x^3 - 20\sqrt{5}\,x\right) - 10\left(x^2 + 5 - 2\sqrt{5}\,x\right) + 1 \\ &= x^4 + 20x^2 - 24 - 4\sqrt{5}\,x^3. \end{aligned}$$

$\sqrt{5}\,x$ 的項恰好互相抵消，相當幸運。現在只剩下一個含根式的項，於是把它分離出來再平方：

$$x^4 + 20x^2 - 24 = 4\sqrt{5}\,x^3 \quad\Longrightarrow\quad (x^4 + 20x^2 - 24)^2 = 80x^6.$$

展開左邊，

$$\begin{aligned} (x^4 + 20x^2 - 24)^2 &= x^8 + 40x^6 + 400x^4 - 48x^4 - 960x^2 + 576 \\ &= x^8 + 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576. \end{aligned}$$

減去 $80x^6$ 後，可取

$$g(x) = x^8 - 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576,$$

它的次數（degree）為 8，具有整數係數（integer coefficients），並且 $g(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}) = 0$。

> **想一想** 為甚麼我們先利用第 (i) 部分處理 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$，最後才消去 $\sqrt{5}$，而不是從頭開始？

第 (i) 部分已經消去了三個根式中的兩個，所以我們只需再處理一個。以平方消去一個根式會使次數加倍，由 4 變成 8，這正好是題目所要求的次數。若從頭開始，就要同時應付三個根式。

第 (iii) 部分

設 $x = a + \sqrt{2}$，則 $a = x - \sqrt{2}$，且 $a^3 - 3a + 1 = 0$。展開，

$$(x - \sqrt{2})^3 = x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 + 6x - 2\sqrt{2},$$

所以

$$0 = (x - \sqrt{2})^3 - 3(x - \sqrt{2}) + 1 = x^3 + 3x + 1 - \sqrt{2}\,(3x^2 - 1).$$

把根式分離出來再平方：

$$x^3 + 3x + 1 = \sqrt{2}\,(3x^2 - 1) \quad \Longrightarrow \quad (x^3 + 3x + 1)^2 = 2(3x^2 - 1)^2.$$

兩邊分別為

$$(x^3 + 3x + 1)^2 = x^6 + 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 6x + 1,$$
$$2(3x^2 - 1)^2 = 18x^4 - 12x^2 + 2,$$

所以可取

$$\mathrm{h}(x) = x^6 - 12x^4 + 2x^3 + 21x^2 + 6x - 1.$$

我們只用到 a 滿足 $t^3 - 3t + 1 = 0$ 這一事實，所以同樣的推導亦適用於 b 和 c。因此 $\mathrm{h}(a + \sqrt{2}) = \mathrm{h}(b + \sqrt{2}) = \mathrm{h}(c + \sqrt{2}) = 0$。

第 (iv) 部分

平方無法消去立方根（cube root），所以我們需要另一個恆等式（identity）。設 $p = \sqrt[3]{2}$、$q = \sqrt[3]{3}$ 及 $x = p + q$。由二項式展開（binomial expansion）得

$$x^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q) = 5 + 3pq\,x.$$

? **想一想** pq 仍然是無理數（irrational），怎樣才能把它消去？

這裏 $pq = \sqrt[3]{6}$ 是唯一剩下的無理量，而且它只以因子的形式出現。我們把它分離出來再立方，並利用 $(pq)^3 = 6$：

$$x^3 - 5 = 3pq\,x \quad \Longrightarrow \quad (x^3 - 5)^3 = 27 \cdot 6\,x^3 = 162x^3.$$

由於 $(x^3 - 5)^3 = x^9 - 15x^6 + 75x^3 - 125$，可取

$$\mathrm{k}(x) = x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125,$$

它具有整數係數，且 $\mathrm{k}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$。

驗算

- 在第 (ii) 部分，$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\approx 5.38233$。由 $x^2\approx 28.9695$，得 $x^8\approx 704\,310$ 及 $40x^6\approx 972\,485$。再者 $352x^4\approx 295\,410$ 及 $960x^2\approx 27\,811$，而 g 的各項在捨入誤差範圍內互相抵消。
- 改變 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{5}$ 的正負號都不會改變 $\mathrm{g}(x)$，所以全部八個數 $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{5}$ 都是根（root）。這解釋了為何次數是 8。同理，h 有六個根 $a\pm\sqrt{2}$、$b\pm\sqrt{2}$、$c\pm\sqrt{2}$。
- $t^3-3t+1=0$ 的根是 $2\cos 40^\circ$、$2\cos 160^\circ$ 和 $2\cos 280^\circ$。例如 $a\approx 1.53209$ 給出 $a+\sqrt{2}\approx 2.94630$，而 $\mathrm{h}(2.94630)$ 在捨入誤差範圍內等於零。
- 在第 (iv) 部分，$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\approx 2.70217$，而 $\mathrm{k}(2.70217)$ 在捨入誤差範圍內等於零。以電腦驗算，確認四個多項式（polynomial）的結果均準確至約 10^{-10}。

常見錯誤

- 未把根式分離出來就平方。若兩邊都留有 $\sqrt{5}$ 的項，它們便不會抵消。
- 在第 (iv) 部分嘗試平方，或者把 x 立方卻沒有留意到 $x^3=5+3pqx$。展開式 $(p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)$ 就是整個竅門所在。
- 在第 (iii) 部分展開三次式時弄錯正負號，尤其是常數項 $-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\sqrt{2}$。

STEP 之外

若一個數是某個整數係數多項式的根，就稱它為*代數數*（algebraic）。這道題以人手計算的方式說明了代數數之和仍是代數數。一般情況的證明要用到線性代數（linear algebra）：$\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限維向量空間（finite-dimensional vector space）。因此冪 $1,\alpha+\beta,(\alpha+\beta)^2,\ldots$ 最終必定線性相關（linearly dependent）。這裏出現的次數 4、8、6 和 9，正是這些域擴張（field extensions）的維數。想進一步了解，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

詳細解答

STEP II 2023，第 5 題

純數學 • 遞推關係與收斂

STEP II 2023，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 2.7 節六位還是六百位中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/newton-speed.html

關鍵思路

兩條遞推關係（recurrence）都是用來逼近 $\sqrt{2}$ 的「機器」，而題目關心的是誤差縮小得有多快。每一部分的竅門，都在於用恰當的方式量度誤差：在 (i) 中考慮 $x_n^2 - 2$，它每一步都會乘以一個大小不超過 $\frac{1}{4}$ 的因子（並且改變正負號）；在 (ii) 中考慮 $y_n - \sqrt{2}$，它每一步（大致上）會被平方。乘以一個常數只帶來穩定的進展；平方則每次令正確的位數加倍，這正是 (ii) 能在同樣十步之內達到 10^{-600} 的原因。

解答

第 (i) 部分

(a) 我們可以把遞推關係改寫為

$$x_{n+1} = \frac{(x_n + 1) + 1}{x_n + 1} = 1 + \frac{1}{x_n + 1}.$$

已知 $x_0 = 1 \geq 1$。若 $x_n \geq 1$，則 $x_n + 1 > 0$，故 $\frac{1}{x_n+1} > 0$，從而 $x_{n+1} > 1$。由歸納法（induction），對所有 n 都有 $x_n \geq 1$。

(b) 把各項通分至同一分母（common denominator）：

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 2 &= \frac{(x_n+2)^2 - 2(x_n+1)^2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{-(x_n^2-2)}{(x_n+1)^2}. \end{aligned}$$

分母是正數，所以 $x_{n+1}^2 - 2$ 與 $x_n^2 - 2$ 的正負號相反。（兩者都永不為零：由歸納法，每個 x_n 都是有理數（rational），而 $\sqrt{2}$ 是無理數（irrational）。）

取絕對值（modulus），並利用 (a) 得出的 $x_n + 1 \geq 2$，從而 $(x_n+1)^2 \geq 4$，

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n+1)^2} \leq \tfrac{1}{4}|x_n^2 - 2|,$$

此即所求。

(c) 由於 $x_0^2 - 2 = -1$，把 (b) 應用十次，得

$$|x_{10}^2 - 2| \leq \left(\tfrac{1}{4}\right)^{10} |x_0^2 - 2| = \frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1\,048\,576} < 10^{-6}.$$

至於正負號：$x_0^2 - 2 < 0$，而正負號每一步都會翻轉，所以對每個偶數 n，$x_n^2 - 2$ 都是負數。特別地，$x_{10}^2 - 2 < 0$，因此

$$-10^{-6} < x_{10}^2 - 2 < 0, \qquad \text{即} \qquad 2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2.$$

第 (ii) 部分

(a) 首先，每個 y_n 都是正數：$y_0 = 1 > 0$，而若 $y_n > 0$，則 $y_{n+1} = \frac{y_n^2+2}{2y_n} > 0$。所以遞推關係永遠不會出現除以零的情況。現在

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,y_n}{2y_n} = \frac{\left(y_n - \sqrt{2}\right)^2}{2y_n},$$

因為 $(y_n - \sqrt{2})^2 = y_n^2 - 2\sqrt{2}\,y_n + 2$。這就是所求的恆等式（identity）。

至於推論部分：$y_0 = 1$。對 $n \geq 1$，把恆等式應用於 $n-1$，可見 $y_n - \sqrt{2}$ 是一個平方數除以正數 $2y_{n-1}$，所以 $y_n - \sqrt{2} \geq 0$，因此 $y_n \geq \sqrt{2} > 1$。故對所有 $n \geq 0$ 都有 $y_n \geq 1$。

(b) 記 $e_n = y_n - \sqrt{2}$ 及 $r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$。由 (a)，對 $n \geq 1$ 有 $e_n \geq 0$；又因為 $y_n \geq 1$，

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2y_n} \leq \frac{e_n^2}{2}.$$

我們用歸納法證明對 $n \geq 1$ 有 $e_n \leq 2r^{2^n}$。

基本情況（*base case*）$n = 1$。$y_1 = \frac{3}{2}$，所以 $e_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$，而

$$2r^2 = 2 \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = \tfrac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

所以上界在此取等號。

歸納步驟（*inductive step*）。假設對某個 $n \geq 1$ 有 $0 \leq e_n \leq 2r^{2^n}$。

想一想 為甚麼我們可以把 $e_n \leq 2r^{2^n}$ 的兩邊平方？

對非負數之間的不等式取平方，不等式仍然成立，而 $e_n \geq 0$ 正是 (a) 部分給我們的結果。（這也是上界由 $n = 1$ 而非 $n = 0$ 開始的原因：$e_0 = 1 - \sqrt{2}$ 是負數。）所以

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{\left(2r^{2^n}\right)^2}{2} = \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}},$$

歸納法至此完成。

(c) 下界 $y_{10} \geq \sqrt{2}$ 已在 (a) 證明。至於上界，由 $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$ 得 $0 < r < \frac{1}{4}$，所以由 (b)

$$y_{10} - \sqrt{2} \leq 2r^{2^{10}} = 2r^{1024} < 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^{1024} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

要把它與 10 的冪比較，可利用 $2^{10} = 1024 > 10^3$：

$$2^{2047} > 2^{2040} = \left(2^{10}\right)^{204} > \left(10^3\right)^{204} = 10^{612} > 10^{600}.$$

因此 $y_{10} - \sqrt{2} < 2^{-2047} < 10^{-600}$，綜合而言

$$\sqrt{2} \leq y_{10} \leq \sqrt{2} + 10^{-600}.$$

想一想 (ii) 中驚人的速度從何而來？

在 (i) 中，誤差每次最多乘以 $\frac{1}{4}$，所以十步只能多得大約六個小數位。在 (ii) 中，誤差每次（大致上）被平方，所以指數 2^n 不斷加倍：十步就能把誤差由大約 $\frac{1}{10}$ 降至低於 10^{-600}。

驗算

- 首幾項：$x_1 = \frac{3}{2}$，$x_2 = \frac{7}{5}$，$x_3 = \frac{17}{12}$，而 $x_n^2 - 2$ 依次為 -1，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{25}$，$\frac{1}{144}$：正負交替，而且每次至少縮小 4 倍。
- 用分數精確計算，得 $x_{10}^2 \approx 2 - 3.0 \times 10^{-8}$，穩穩落在區間 $[2 - 10^{-6}, 2]$ 之內。
- $y_2 = \frac{17}{12}$，所以 $y_2 - \sqrt{2} \approx 0.00245$，對比上界 $2r^4 \approx 0.00368$。用電腦以精確分數驗算，得 $y_{10} - \sqrt{2} \approx 10^{-783}$，遠低於所保證的 $2^{-2047} \approx 10^{-616}$。

常見錯誤

- 在 (i)(c) 中忘記考慮正負號：單靠絕對值的上界只能得出 $2-10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2+10^{-6}$；上界 2 需要用到正負號交替這一點。
- 未先確定 $e_n \geq 0$ 便把 $e_n \leq 2r^{2^n}$ 平方。
- 停在 2^{-2047}，而沒有真正把它與 10^{-600} 比較；用不等式 $2^{10} > 10^3$ 是最簡潔的做法。

STEP 之外

(ii) 中的遞推關係，就是把牛頓（Newton）法（Newton's method）應用於 $f(y) = y^2 - 2$；而 (ii)(a) 中的恆等式，正是在說牛頓法在單根（simple root）附近二次收斂（quadratic convergence），而 (i) 則是收斂率不超過 $\frac{1}{4}$ 的線性收斂（linear convergence）的例子。數 x_n 亦是 $\sqrt{2}$ 的連分數（continued fraction）的漸近分數（convergents）。收斂階（order of convergence）和不動點迭代（fixed-point iteration）都是大學第一個數值分析（numerical analysis）課程的標準課題，而背後的分析理論在 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）中有仔細的闡述。

詳細解答

STEP II 2023，第 6 題

純數學 • 斐波那契矩陣恆等式

STEP II 2023，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

只要把斐波那契數（Fibonacci numbers）看成同一個 2×2 矩陣（matrix）各次冪的元素，關於它們的每一條恆等式（identity）就變成關於 $\mathbf{Q}$ 的冪的恆等式，而普通的代數運算（指數律（index laws）、行列式（determinant）、二項式定理（binomial theorem））便能完成所有工作。每一部分都依循同一個方法：找出同一個矩陣的兩種寫法，然後讀出其中一個元素。幾乎每次都是右上角的元素，而它正是 F_n 本身。

解答

矩陣公式

當 $n = 1$ 時，左邊是 $\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}$，因為 $F_2 = F_1 + F_0 = 1$。所以結果在 $n = 1$ 時成立。

假設結果對某個 $n \geq 1$ 成立。那麼

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix},$$

這裏用了兩次遞推關係（recurrence）。這正是把公式中的 n 換成 $n + 1$ 的結果，所以由歸納法（induction），公式對所有正整數 n 成立。

第 (i) 部分

行列式具有乘法性，所以 $\det(\mathbf{Q}^n) = (\det \mathbf{Q})^n = (0-1)^n = (-1)^n$。從元素直接計算同一個行列式，

$$\det(\mathbf{Q}^n) = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2,$$

因此 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$，得證。（這就是卡西尼恆等式（Cassini's identity）。）

第 (ii) 部分

由指數律，$\mathbf{Q}^{m+n} = \mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$：

$$\begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

乘積的右上角元素是 $\mathbf{Q}^m$ 的第一行乘以 $\mathbf{Q}^n$ 的第二列，即 $F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$。比較右上角元素，得

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}.$$

第 (iii) 部分

直接計算，

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{Q}.$$

（這是 $x^2 = 1 + x$ 的矩陣版本，而這條方程正是黃金比例（golden ratio）所滿足的方程。）

在以下各部分中，注意對每個 $k \geq 1$，$\mathbf{Q}^k$ 的右上角元素都是 F_k；對 $k = 0$ 亦然，因為 $\mathbf{Q}^0 = \mathbf{I}$ 的右上角元素是 $0 = F_0$。取矩陣之和的右上角元素是線性（linear）運算，所以 $\sum c_k\mathbf{Q}^k$ 的右上角元素是 $\sum c_kF_k$。

(a) 利用 $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I} + \mathbf{Q}$ 及取 $\mathbf{A} = \mathbf{Q}$ 的二項式定理，

$$\mathbf{Q}^{2n} = (\mathbf{Q}^2)^n = (\mathbf{I} + \mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathbf{Q}^k.$$

左邊的右上角元素是 F_{2n}，右邊的則是 $\sum_k \binom{n}{k}F_k$。因此 $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}F_k$。

(b) 先用同樣的方法求 $\mathbf{Q}^3$：

$$\mathbf{Q}^3 = \mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} + \mathbf{I} + \mathbf{Q} = \mathbf{I} + 2\mathbf{Q}.$$

然後應用取 $\mathbf{A} = 2\mathbf{Q}$ 的二項式定理：

$$\mathbf{Q}^{3n} = (\mathbf{I} + 2\mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}2^k\mathbf{Q}^k,$$

比較右上角元素，得 $F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k$。

至於第二條恆等式，寫成 $\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n \mathbf{Q}^{2n}$，並利用 (a) 的展開式：

$$\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^{n+k}.$$

$\mathbf{Q}^{n+k}$ 的右上角元素是 F_{n+k}，所以 $F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n+k}$。

(c)

? **想一想** 應該把哪個矩陣自乘 n 次，才能產生符號 $(-1)^{n+k}$？

展開 $(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n$ 時，就會出現符號 $(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}$。為了配合我們可以使用的二項式定理的形式，寫成 $\mathbf{Q} - \mathbf{I} = -(\mathbf{I} + (-\mathbf{Q}))$，於是

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n = (-1)^n (\mathbf{I} + (-\mathbf{Q}))^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k.$$

兩邊乘以 $\mathbf{Q}^n$，

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^{n+k} = \mathbf{Q}^n (\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n = \big(\mathbf{Q}(\mathbf{Q} - \mathbf{I})\big)^n,$$

最後一步之所以成立，是因為 $\mathbf{Q}$ 與 $\mathbf{Q} - \mathbf{I}$ 可交換（commute）（兩者都是 $\mathbf{Q}$ 的多項式（polynomial）），所以各因子可以重新組合。但由 (iii)，$\mathbf{Q}(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = \mathbf{Q}^2 - \mathbf{Q} = \mathbf{I}$，所以整個和等於 $\mathbf{I}^n = \mathbf{I}$。

$\mathbf{I}$ 的右上角元素是 0，而左邊的右上角元素是 $\sum_k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k}$。因此

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k} = 0.$$

額外收穫：比較左上角元素，得 $\sum_k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k+1} = 1$。

驗算

- (i)，取 $n = 5$：$F_6 F_4 - F_5^2 = 8 \cdot 3 - 25 = -1 = (-1)^5$。
- (ii)，取 $m = 3$、$n = 4$：$F_4 F_4 + F_3 F_3 = 9 + 4 = 13 = F_7$。
- (a)，取 $n = 4$：$0 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 21 = F_8$。
- (b)，取 $n = 3$：$3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 34 = F_9$，另外 $F_3 + 3F_4 + 3F_5 + F_6 = 2 + 9 + 15 + 8 = 34$。
- (c)，取 $n = 3$：$-F_3 + 3F_4 - 3F_5 + F_6 = -2 + 9 - 15 + 8 = 0$。

這五條恆等式亦已用電腦驗證，對所有不超過 59 的 n 都成立（在 (ii) 中則對所有不超過 49 的 m, n 成立）。

常見錯誤

- 在 (ii) 中比較錯了元素，或者把行乘以行，會得到一條看似合理但錯誤的公式。$\mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$ 的右上角元素用的是 $\mathbf{Q}^m$ 的第一行和 $\mathbf{Q}^n$ 的第二列。
- 對不可交換的矩陣使用 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n$ 的二項式定理。這裏每個矩陣都是 $\mathbf{Q}$ 的多項式，所以全部都可交換，但這一點值得明確指出。
- 遺漏 $k=0$ 的項：它貢獻 $\mathbf{I}$，其右上角元素是 $F_0=0$。

STEP 之外

關係式 $\mathbf{Q}^2=\mathbf{I}+\mathbf{Q}$ 就是 $\mathbf{Q}$ 的凱萊–哈密頓定理（Cayley–Hamilton theorem）：每個方陣都滿足它自己的特徵方程（characteristic equation），這裏是 $\lambda^2-\lambda-1=0$。把特徵值（eigenvalues）為 $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ 的 $\mathbf{Q}$ 對角化（diagonalising），便得到 F_n 的比內（Binet）封閉公式；而矩陣的冪亦提供了一種以反覆平方（repeated squaring）快速計算 F_n 的方法。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）在介紹特徵值時，正是用這種方式處理斐波那契數。

詳細解答

STEP II 2023，第 7 題

純數學 • 兩個平方數之和

STEP II 2023，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 1.6 節兩個平方數之和中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/two-squares.html

關鍵思路

兩個平方數之和（sum of two squares）x^2+y^2 正是 $|x+y\mathrm{i}|^2$。這樣一來，第 (i) 部分說的就是：兩個「兩平方數之和」的乘積仍然是兩個平方數之和，而把對應的複數（complex number）相乘，就能知道是哪兩個平方數。之後每一部分的做法都一樣：把每個因數寫成兩個平方數之和（通常是找出一個相近的完全平方數），然後相乘。最後一部分則反其道而行，以除法代替乘法。

解答

第 (i) 部分

我們有 $zw=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$，所以

$$\begin{aligned}|zw|^2&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\\&=a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2\\&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=|z|^2|w|^2.\end{aligned}$$

由於 $|zw|$ 和 $|z||w|$ 都是非負數，取平方根便得 $|zw|=|z||w|$，證畢。

以下我們會使用平方形式：若 z 和 w 的實部和虛部都是整數，則

$$|z|^2\,|w|^2 = |zw|^2 = (\operatorname{Re} zw)^2 + (\operatorname{Im} zw)^2.$$

第 (ii) 部分

這裏 $|2+\mathrm{i}|^2 = 4+1 = 5$，而 $|10+11\mathrm{i}|^2 = 100+121 = 221$。兩者的乘積是

$$(2+\mathrm{i})(10+11\mathrm{i}) = 20+22\mathrm{i}+10\mathrm{i}-11 = 9+32\mathrm{i},$$

所以由第 (i) 部分，$9^2+32^2 = 5\times 221$。(的確，$81+1024 = 1105$。) 因此 $h=9$、$k=32$ 符合要求。

若改用 $10-11\mathrm{i}$（它的模（modulus）相同），則得 $(2+\mathrm{i})(10-11\mathrm{i}) = 31-12\mathrm{i}$，所以 $h=31$、$k=12$ 也符合要求。

第 (iii) 部分

這個數的末位是 5，所以 $8045 = 5\times 1609$，而如前所述 $5 = |2+\mathrm{i}|^2$。現在需要把 1609 寫成兩個平方數之和。它略大於 $40^2 = 1600$，而 $1609-1600 = 9 = 3^2$，所以 $1609 = |40+3\mathrm{i}|^2$。於是

$$(2+\mathrm{i})(40+3\mathrm{i}) = 80+6\mathrm{i}+40\mathrm{i}-3 = 77+46\mathrm{i},$$

由第 (i) 部分得

$$77^2+46^2 = 5\times 1609 = 8045.$$

所以 $m=77$、$n=46$。(若改用 $3+40\mathrm{i}$，則得 $-34+83\mathrm{i}$，所以 $34^2+83^2 = 8045$ 亦成立。)

第 (iv) 部分

這裏多出的因數是 $36 = 6^2 = |6|^2$，即實數 6 的模的平方。把 $102+201\mathrm{i}$ 乘以 6，只是把實部和虛部同時放大：

$$(6\times 102)^2+(6\times 201)^2 = 36\,(102^2+201^2) = 36\times 50805.$$

所以 $p=612$、$q=1206$。

第 (v) 部分

思路是找出兩種不同的方法，用高斯整數把 25 寫成 $|\alpha|^2$，再把每一個都乘以 1002082 的同一個固定表示式。

首先，1002082 略大於 $1001^2 = 1002001$，而

$$1002082 - 1002001 = 81 = 9^2,$$

所以 $1002082 = 1001^2 + 9^2 = |1001 + 9\mathrm{i}|^2$。

其次，$25 = |5|^2 = |3 + 4\mathrm{i}|^2 = |3 - 4\mathrm{i}|^2$。把它們各自乘以 $1001 + 9\mathrm{i}$，每個都給出一對數：

$$\begin{aligned} 5(1001 + 9\mathrm{i}) &= 5005 + 45\mathrm{i}, \\ (3 + 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} + 4004\mathrm{i} - 36 = 2967 + 4031\mathrm{i}, \\ (3 - 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} - 4004\mathrm{i} + 36 = 3039 - 3977\mathrm{i}. \end{aligned}$$

由第 (i) 部分，每一個的模的平方都是 25×1002082。把實部和虛部取絕對值，並把較小的放在前面，便得到三組不同且滿足 $r < s$ 的數對：

$$(r, s) = (45, 5005), \qquad (2967, 4031), \qquad (3039, 3977).$$

想一想 為甚麼不同時使用 $4 + 3\mathrm{i}$，得出第四組數對？

因為 $4 + 3\mathrm{i} = \mathrm{i}(3 - 4\mathrm{i})$，而乘以 i 只會把實部和虛部互換（不計正負號）。它重現的是 $(3039, 3977)$，只是次序倒轉，所以並沒有給出新的結果。真正不同的選擇是 5、$3 + 4\mathrm{i}$ 和 $3 - 4\mathrm{i}$。

第 (vi) 部分

現在我們把方法倒過來用。同樣先找一個相近的平方數：$1002037 - 1002001 = 36 = 6^2$，所以

$$1002037 = 1001^2 + 6^2 = |1001 + 6\mathrm{i}|^2,$$

而且 $109 = 10^2 + 3^2 = |10 + 3\mathrm{i}|^2$。如果我們能把 $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(t + u\mathrm{i})$ 中的 t、u 取為整數，那麼由第 (i) 部分得

$$1002037 = 109\,(t^2 + u^2),$$

再除以 109（利用 $109 \times 9193 = 1002037$）便得 $t^2 + u^2 = 9193$。

於是我們做除法，分子和分母同乘以共軛（conjugate）$10 - 3\mathrm{i}$：

$$\begin{aligned} \frac{1001 + 6\mathrm{i}}{10 + 3\mathrm{i}} &= \frac{(1001 + 6\mathrm{i})(10 - 3\mathrm{i})}{109} = \frac{10010 - 3003\mathrm{i} + 60\mathrm{i} + 18}{109} \\ &= \frac{10028 - 2943\mathrm{i}}{109} = 92 - 27\mathrm{i}, \end{aligned}$$

因為 $109 \times 92 = 10028$ 及 $109 \times 27 = 2943$。這個除法剛好整除，所以 $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(92 - 27\mathrm{i})$，因此

$$92^2 + 27^2 = 9193.$$

所以 $t = 92$、$u = 27$。驗算一下：$8464 + 729 = 9193$。

> **想一想** 如果除法不能整除，那怎麼辦？

那就試另一個共軛。改為除以 $10 - 3\mathrm{i}$，得到 $(9992 + 3063\mathrm{i})/109$，這並不是高斯整數（9992 不是 109 的倍數）。由於 109 是質數（prime），兩個選擇之中必有一個可行；這正是下文「STEP 之外」一節提到的高斯整數性質。至於拿 $1001 - 6\mathrm{i}$ 來除，並不會得到新結果，只會得到上述結果的共軛。

驗算

每個答案都可以直接用算術驗證：$9^2 + 32^2 = 1105 = 5 \times 221$；$77^2 + 46^2 = 5929 + 2116 = 8045$；$612^2 + 1206^2 = 1828980 = 36 \times 50805$；對於 (v)，$45^2 + 5005^2$、$2967^2 + 4031^2$ 和 $3039^2 + 3977^2$ 都等於 25052050；以及 $92^2 + 27^2 = 9193$。用電腦搜尋可以證實這些結果，並發現 25×1002082 其實有六個滿足 $0 < r < s$ 的表示式（另外三個是 $(721, 4953)$、$(2079, 4553)$ 和 $(2395, 4395)$）。它們來自 1002082 本身的另一個表示式，所以任何三組不同的數對都可接受。同樣地，$9193 = 48^2 + 83^2$ 亦成立。

常見錯誤

- 在 (v) 中，以為 $(3 + 4\mathrm{i})$ 和 $(4 + 3\mathrm{i})$ 會給出不同的數對：其實它們給出的是同一對數，只是次序相反。
- 在 (vi) 中，除以錯誤的共軛而得到非整數，然後就放棄。應該試試另一個。
- 展開乘積時，在 $\mathrm{i}^2 = -1$ 上弄錯正負號：最後務必直接驗算平方和。

STEP 之外

所有 a, b 為整數的數 $a + b\mathrm{i}$ 組成**高斯整數**（Gaussian integers），這是一個環（ring）；與普通整數一樣，在其中分解為質數的方式是唯一的。若普通質數 $p \equiv 1 \pmod 4$，則它可分裂為 $(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})$，這就是費馬（Fermat）的二平方和定理（two-squares theorem）。計算把這些因數分配的方法有多少種，便能準確解釋一個數有多少個表示式，以及為何 1002082 的表示式不止我們用過的那一個。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）對兩個平方數之和有精彩的論述；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與

羣》）則把高斯整數作為一個環來討論。

詳細解答

STEP II 2023，第 8 題

純數學 • 三維向量

> **STEP II 2023，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

先為三對對棱命名，第 (i) 部分就化為三條線性方程。之後的一切，都來自把每個長度條件轉化為點積（dot product），所用的是 $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$。一旦三個點積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$、$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ 都以 $|\mathbf{a}|^2$、$|\mathbf{b}|^2$ 和 $|\mathbf{c}|^2$ 表示出來，第 (iii) 和 (iv) 部分就只是展開括號而已。

解答

第 (i) 部分

將四面體（tetrahedron）記為 $OABC$。它的六條棱（edge）組成三對沒有公共頂點的棱：

$$OA \text{ 和} BC, \qquad OB \text{ 和} CA, \qquad OC \text{ 和} AB.$$

設 $OA = p$、$BC = p'$、$OB = q$、$CA = q'$、$OC = r$、$AB = r'$。四個面的周界（perimeter）分別為

$$OAB : p+q+r', \qquad OAC : p+r+q',$$
$$OBC : q+r+p', \qquad ABC : p'+q'+r'.$$

若四面體是等腰四面體（*isosceles tetrahedron*），則 $p = p'$、$q = q'$、$r = r'$，而四個周界都等於 $p+q+r$。

反過來，假設四個周界全部相等。設 $X = p - p'$、$Y = q - q'$、$Z = r - r'$。把前三個面

分別與 ABC 比較：

$$(p+q+r')-(p'+q'+r')=X+Y=0,$$
$$(p+r+q')-(p'+q'+r')=X+Z=0,$$
$$(q+r+p')-(p'+q'+r')=Y+Z=0.$$

三式相加得 $2(X+Y+Z)=0$。再以 $X+Y+Z=0$ 依次減去每一條方程，得 $Z=0$、$Y=0$ 及 $X=0$。所以 $p=p'$、$q=q'$ 及 $r=r'$：四面體是等腰的。這就證明了兩個方向。

第 (ii) 部分

由於 $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$，條件 $OA=BC$ 即是

$$|\mathbf{a}|^2=|\mathbf{c}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c},$$

移項後得 $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}|^2$，正是所求。

對另外兩對對棱（$OB=CA$ 及 $OC=AB$）作同樣的論證，得

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{b}|^2,\qquad 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{c}|^2.$$

把這兩式相加，$|\mathbf{b}|^2$ 和 $|\mathbf{c}|^2$ 項互相抵消：

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=2|\mathbf{a}|^2,\quad \text{所以}\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|^2.$$

這三條點積公式對 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 是對稱的，因此同理可得

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})=|\mathbf{b}|^2,\qquad \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=|\mathbf{c}|^2.$$

第 (iii) 部分

設 $S=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2$。把第 (ii) 部分中 $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$、$2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ 和 $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的三條公式相加，每個長度的平方都以正號出現兩次、以負號出現一次，所以

$$2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=S.$$

與 O 的距離。

$$OG^2=\tfrac{1}{16}|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2=\tfrac{1}{16}\big(S+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\big)=\tfrac{1}{16}(2S)=\tfrac{1}{8}S.$$

與 A 的距離。這裏 $\overrightarrow{AG}=\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a})$，而

$$\begin{aligned}|\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a}|^2&=|\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2-6\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})+9|\mathbf{a}|^2\\&=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-6|\mathbf{a}|^2+9|\mathbf{a}|^2\qquad\text{利用}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|^2\\&=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+\big(|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}|^2\big)+3|\mathbf{a}|^2\\&=2S.\end{aligned}$$

所以同樣有 $AG^2 = \frac{1}{16}(2S) = \frac{1}{8}S$。

與 B 和 C 的距離。我們用過的每一個關於 $\mathbf{a}$ 的事實，對 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 同樣成立（見第 (ii) 部分末段），而 S 是對稱的。因此完全相同的計算給出 $BG^2 = CG^2 = \frac{1}{8}S$。

故此 G 與四個頂點的距離都是 $\sqrt{S/8}$。

第 (iv) 部分

展開題目提示的向量：

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 &= S - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ &= S - 2|\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} && \text{由第 (ii) 部分}\\ &= \left(|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2\right) + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 4\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 \geq 0,$$

因此角 BOC 不是鈍角（obtuse angle）。

想一想 這只是十二個角之中的一個。怎樣才能不必重複計算，就得到其餘所有的角？

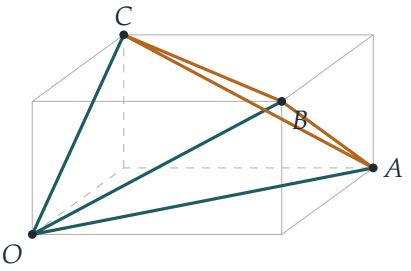
以 $\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 作同樣的計算，得 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \geq 0$ 及 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$，所以 O 處沒有鈍角。「等腰」是四面體本身的性質，與我們怎樣標記頂點無關，所以任何一個頂點都可以叫作 O。因此同一論證在 A、B 和 C 處同樣適用。（另一做法：每個面的三邊都是 p、q、r，所以四個面是全等（congruent）三角形，而它們的角正好就是 O 處的三個角 BOC、COA、AOB。）故此在任何一個頂點處相交的兩條棱之間的角都不是鈍角。

會不會是直角？等號 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$ 只在 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}| = 0$ 時成立，即 $\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$。但這樣 A 便位於經過 O、B、C 的平面上（事實上 $OBAC$ 是長方形），$OABC$ 是平的，並不是四面體。每個角的情況都一樣，所以**沒有任何角可以是直角**：在真正的等腰四面體中，每個面角都是銳角（acute angle）。

驗算

- 一個具體例子：取邊長為 x, y, z 的長方體（cuboid），選出它的四個頂點，使其中任何兩個都不由長方體的棱相連，例如 $O = (0,0,0)$、$A = (x,y,0)$、$B = (x,0,z)$、$C = (0,y,z)$。對棱是相對兩個面的對角線，所以彼此相等。取 $x = 1$、$y = 2$、$z = 3$，得 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 9$ 及 $\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c} = (0,0,-6)$，而確實 $\frac{1}{4}\cdot 36 = 9$。此外 $G = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ 是長方體的中心，與每個頂點的距離都是 $\sqrt{14}/2$，與 $\sqrt{S/8}$（其中 $S = 5+10+13 = 28$）吻合。

- 平面的情況：$\mathbf{b} = (3,0,0)$、$\mathbf{c} = (0,4,0)$、$\mathbf{a} = (3,4,0)$ 給出一個長方形，它的對「棱」（邊和對角線）相等，而且有直角。這正是我們排除了的退化情況。
- 這些恆等式亦已用電腦在數千個隨機的長方體例子上驗證過。



常見錯誤

- 在第 (i) 部分只證明了一個方向。「當且僅當」（if and only if）需要兩個方向，而有實質內容的是逆命題那一部分。
- 在第 (iv) 部分沒有妥善排除直角。$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$ 迫使 $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$，令四點共面（coplanar）。
- 只檢查了 O 處的角便停下來。要說明為甚麼其餘三個頂點也有同樣結論。

STEP 之外

上面的長方體圖已道出全部真相：每個等腰四面體（又稱雙楔體（disphenoid））都可以從長方體選取相間的頂點得到。這樣，第 (iii) 部分是說形心（centroid）就是長方體的中心，而第 (iv) 部分是說長方體的邊長是正數。把長度條件轉化為點積，進而轉化為由內積（inner product）組成的格拉姆矩陣（Gram matrix），是大學一年級線性代數（linear algebra）和幾何的標準工具。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是了解這套方法如何發展的好去處。

詳細解答

STEP II 2023，第 9 題

力學 • 斜坡上的連接質點

STEP II 2023，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

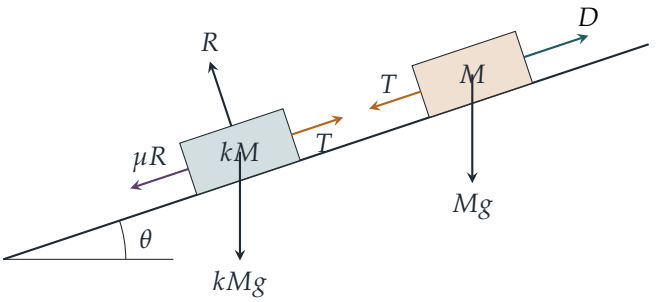
關鍵思路

在三種情況下，分別對貨車和拖車寫出牛頓（Newton）第二定律（Newton's second law）。下坡其實就是上一條傾角為 $-\alpha$ 的斜坡，所以一組方程就能涵蓋全部三種情況。單憑貨車的方程，幾乎就能直接得出 (i) 的關係式。至於 (ii)，整道題歸結為比較 $1-\cos\alpha$ 與 $\sin\alpha$ 的大小。

解答

我們把貨車和拖車視為質點（particle），兩者之間以一根沿運動方向放置的輕剛性桿連接。兩者都沿貨車的方向運動，所以拖車所受的摩擦力（friction）與運動方向相反，大小為 μR，其中 R 是拖車所受的法向反作用力（normal reaction）。張力（tension）T 把拖車向前拉，把貨車向後拉。（若 T 算出來是負數，就表示桿處於推力（thrust）狀態；代數運算不變。）

把斜坡的傾角記為 θ，規定 $\theta=\alpha$ 為上坡，$\theta=0$ 為平地，$\theta=-\alpha$ 為下坡。



設沿斜坡向上的加速度（acceleration）為 a。對每個物體沿斜坡方向分解力，並對拖車在垂直於斜坡的方向分解力（得 $R = kMg\cos\theta$），便有

$$\text{貨車：} \qquad D - T - Mg\sin\theta = Ma, \tag{1}$$

$$\text{拖車：} \qquad T - kMg\sin\theta - \mu kMg\cos\theta = kMa. \tag{2}$$

把 (1) 與 (2) 相加，消去 T：

$$a = \frac{D}{(1+k)M} - g\sin\theta - \frac{\mu kg\cos\theta}{1+k}.$$

代入 (1)，得 $T = D - Mg\sin\theta - Ma$，所以

$$T = D - \frac{D}{1+k} + \frac{\mu kMg\cos\theta}{1+k} = \frac{kD + \mu kMg\cos\theta}{1+k}.$$

含 $\sin\theta$ 的項互相抵消，因此張力只透過 $\cos\theta$ 與 θ 有關。

第 (i) 部分

由於 $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$，$\theta = \alpha$ 與 $\theta = -\alpha$ 兩種情況的張力相同：

$$T_1 = T_3 = \frac{kD + \mu kMg\cos\alpha}{1+k}, \qquad T_2 = \frac{kD + \mu kMg}{1+k}.$$

要證明第二個結果，只需用到三種情況下的貨車方程 (1)：

$$\begin{aligned} Ma_1 &= D - T_1 - Mg\sin\alpha, \\ Ma_2 &= D - T_2, \\ Ma_3 &= D - T_3 + Mg\sin\alpha. \end{aligned}$$

把第一和第三條方程相加，並利用 $T_3 = T_1$，得 $M(a_1 + a_3) = 2D - 2T_1$。再減去中間方程的兩倍，

$$M(a_1 + a_3 - 2a_2) = (2D - 2T_1) - (2D - 2T_2) = 2(T_2 - T_1),$$

即為所求。

第 (ii)(a) 部分

第一個不等式。由 (i) 可知，$a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$ 等價於 $T_2 > T_1$（因為 $M > 0$）。由上面的公式，

$$T_2 - T_1 = \frac{\mu kMg\,(1 - \cos\alpha)}{1+k} > 0,$$

這是因為 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ 給出 $\cos\alpha < 1$，而由於有摩擦力作用，$\mu > 0$。所以 $a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$。

第二個不等式。$\frac{1}{2}(a_1+a_3) < a_3$ 等價於 $a_1 < a_3$。從 a 的公式可見，對於 $\theta = \pm\alpha$，含 D 的項和摩擦力項都相同，所以

$$a_3 - a_1 = 2g\sin\alpha > 0.$$

（另一做法是把兩條貨車方程相減，並利用 $T_1 = T_3$，得 $M(a_3 - a_1) = 2Mg\sin\alpha$。）因此

$$a_2 < \tfrac{1}{2}(a_1+a_3) < a_3.$$

第 (ii)(b) 部分

在 a 的公式中分別取 $\theta = 0$ 和 $\theta = \alpha$，

$$a_2 - a_1 = g\sin\alpha - \frac{\mu k g\,(1-\cos\alpha)}{1+k} = g\left[\sin\alpha - \frac{\mu k}{1+k}(1-\cos\alpha)\right].$$

想一想 上坡會損失 $g\sin\alpha$ 的加速度，但法向反作用力減小，又會省下一些摩擦力。哪一個效應較大？

省下的摩擦力是較小的一方。首先，$\dfrac{k}{1+k} < 1$ 且 $\mu < 1$，所以 $0 \le \dfrac{\mu k}{1+k} < 1$。其次，利用半角公式（half-angle formulae），

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha, \qquad \sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

所以 $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha < 1$，因為 $0 < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{4}\pi$。因此

$$\frac{\mu k}{1+k}(1-\cos\alpha) < 1-\cos\alpha < \sin\alpha,$$

其中第一個不等號是嚴格的，因為 $1-\cos\alpha > 0$。所以 $a_2 - a_1 > 0$，即 $a_1 < a_2$。條件 $\mu < 1$ 正是在這裏用上的。若拖車非常重、μ 很大而斜坡又很陡，省下的摩擦力就可能超過 $g\sin\alpha$。

驗算

- 取 $M = 1000\,\text{kg}$、$k = 0.5$、$\mu = 0.4$、$\alpha = 30°$、$D = 5000\,\text{N}$ 及 $g = 9.8\,\text{m s}^{-2}$。那麼 $a_1 \approx -2.698$、$a_2 \approx 2.027$、$a_3 \approx 7.102\,\text{m s}^{-2}$，而 $T_1 = T_3 \approx 2798\,\text{N}$、$T_2 \approx 2973\,\text{N}$。可見 $\frac{1}{2}(a_1+a_3) \approx 2.202$ 確實嚴格介乎 a_2 與 a_3 之間，而且 $a_1 < a_2$。用電腦對大量 $\mu < 1$ 的隨機參數組合進行檢驗，所有恆等式和不等式均成立。
- 若 $\mu = 0$，則在任何斜坡上張力都是 $kD/(1+k)$，而 a_2 恰好是 a_1 與 a_3 的平均值。這就是 (ii)(a) 需要有摩擦力的原因。
- 取 $\mu = 3$、$k = 100$ 及 $\alpha = 1.5$ 弧度，則 $a_1 > a_2$，所以 (b) 中的條件 $\mu < 1$ 確實不可缺少。

常見錯誤

- 在斜坡上把摩擦力寫成 μkMg。斜坡上的法向反作用力是 $kMg\cos\alpha$，而第 (ii) 部分的全部內容正是建基於這個差別。
- 下坡時把重力分量的正負號弄錯。把一切用 θ 表示，再令 $\theta = -\alpha$，就可避免這個錯誤。
- 在 (ii)(b) 中只論證 $\mu k/(1+k) < 1$，卻沒有比較 $1-\cos\alpha$ 與 $\sin\alpha$。兩個事實缺一不可。

STEP 之外

把一個系統拆分成若干物體，對每個物體應用牛頓定律，而內力則以大小相等、方向相反的形式成對出現——這是剛體（rigid body）力學和多質點力學的基本方法。把各方程相加，便得到質心（centre of mass）的運動，而內力則會消去。不等式 $1-\cos\alpha < \sin\alpha$ 也是一個利用半角恆等式比較函數（function）大小的小例子，這種技巧在整個分析學（analysis）中都很有用。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這些概念有細緻的闡述。

詳細解答

STEP II 2023，第 10 題

力學 • 拋體軌道的包絡線

STEP II 2023，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

一條軌跡與曲線 E 相切，當且僅當求它們公共點的方程有重根，所以第 (i) 部分其實是一個判別式（discriminant）的計算。要求對每一個角度都出現這種情況，便迫使 E 成為所有軌跡的包絡線（envelope），即速度為 u 的質點所能到達範圍的邊界。題目其餘部分從三個角度審視這條邊界：哪些點可以被擊中、質點在某一固定時刻位於何處，以及沿着包絡線本身滑行的第二粒質點。

解答

全題中，質點視為只受重力作用而自由運動的點，不計空氣阻力，並記 $c = \cos\alpha$，$s = \sin\alpha$。

第 (i) 部分

設 t 為拋出後經過的時間，則 P_α 一直留在平面 $y = 0$ 上，且

$$x = uct, \qquad z = ust - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

消去 $t = x/(uc)$，得到軌跡（trajectory）

$$z = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2c^2}.$$

與 E 的公共點滿足 $A - Bx^2 = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2c^2}$，即

$$\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right)x^2 - x\tan\alpha + A = 0. \qquad (*)$$

若 x^2 的係數為零，則 $(*)$ 是線性方程，而 $\tan\alpha \neq 0$，這只會給出一個穿越點而非相切，所以 $(*)$ 確實是二次方程。兩曲線恰好相切一次，當且僅當 $(*)$ 有重根，即其判別式為零：

$$\tan^2\alpha = 4A\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right).$$

兩邊乘以 u^2c^2：

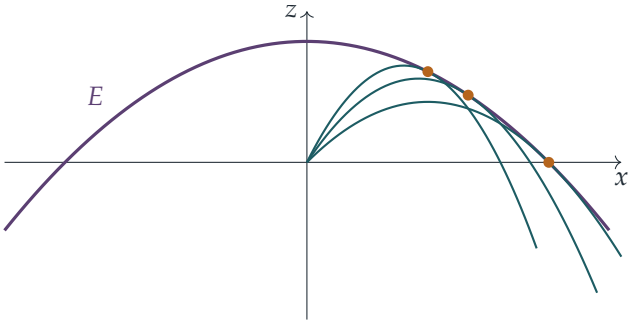
$$\begin{aligned} u^2s^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \\ u^2 - u^2c^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \qquad (\text{利用} s^2 = 1 - c^2) \\ u^2 - 2gA &= u^2(1 - 4AB)\cos^2\alpha, \end{aligned}$$

此即所求。

若此式對 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 中每一個 α 都成立，則左邊是常數，而 $\cos^2\alpha$ 取遍 $(0,1)$ 中所有值。一個常數對所有這些值都等於 $k\cos^2\alpha$，便迫使 $k = 0$，從而該常數為 0。所以 $u^2 = 2gA$ 且 $4AB = 1$：

$$A = \frac{u^2}{2g}, \qquad B = \frac{g}{2u^2}.$$

反過來，這些值使恆等式對每一個 α 都成立。切點就是重根 $x = \dfrac{\tan\alpha}{2(g/(2u^2c^2) - B)} = \dfrac{u^2}{g\tan\alpha}$。



上圖（取 $u^2/g = 2$ 繪製）顯示三條軌跡，每條都在琥珀色的點與 E 相切一次。

第 (ii) 部分

每粒質點都在包含其初速度的鉛垂平面內運動，而整個情況關於 z 軸對稱。因此考慮一個與 z 軸水平距離為 r、高度為 z 的點，並在通過該點的鉛垂平面內處理，設 $\theta \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 為朝該點方向、高於水平線的拋射角。

若 $r = 0$，只有垂直向上或向下射出的質點能夠到達；向上射出的那粒可到達不超過 $u^2/(2g)$ 的每一個高度，向下射出的那粒可到達每一個負高度，所以軸上可到達的點就是滿足 $z \leq u^2/(2g)$ 的點。

若 $r > 0$，與第 (i) 部分完全一樣，質點經過該點當且僅當

$$z = r\tan\theta - \frac{gr^2}{2u^2}(1+\tan^2\theta),$$

這裏用了 $1/\cos^2\theta = 1+\tan^2\theta$。記 $T = \tan\theta$，它可取任何實數值，於是得到二次方程

$$\frac{gr^2}{2u^2}T^2 - rT + \left(z + \frac{gr^2}{2u^2}\right) = 0,$$

它有實根當且僅當

$$r^2 \geq \frac{2gr^2}{u^2}\left(z+\frac{gr^2}{2u^2}\right) \iff z \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gr^2}{2u^2},$$

這裏除以了 $2gr^2/u^2 > 0$。

所以，由 $r^2 = x^2+y^2$，可被擊中的點恰好是位於拋物面（paraboloid）

$$z = \frac{u^2}{2g} - \frac{g}{2u^2}(x^2+y^2),$$

之上或其下方的點；這個曲面正是把 E（取第 (i) 部分的值）繞 z 軸旋轉而得的。嚴格位於其下方的點可由平面內兩個方向到達，位於其上的點恰好由一個方向到達（即重根，與第 (i) 部分的相切吻合），而位於其上方的點則無法到達。

第 (iii) 部分

設質點的初速度為 $u\mathbf{n}$，其中 $\mathbf{n}$ 是單位向量（unit vector）。經過時間 t 後，其位置為

$$\mathbf{r} = ut\,\mathbf{n} - \tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k},$$

其中 $\mathbf{k}$ 是向上的單位向量。因此

$$\left|\mathbf{r} - (-\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k})\right| = |ut\,\mathbf{n}| = ut.$$

所以在時刻 t，每粒質點都位於以 $(0,0,-\frac{1}{2}gt^2)$ 為球心、ut 為半徑的球面上。從物理角度看：重力使每粒質點獲得相同的加速度，所以相對於一個從原點自由下落的點，它們全都以速率 u 沿直線向外飛散。

第 (iv) 部分

設 τ 為 Q 拋出後經過的時間，則 Q 有 $y = 0$ 及

$$x = u\tau, \qquad z = A - \tfrac{1}{2}g\tau^2.$$

代入 $\tau = x/u$：

$$z = A - \frac{g}{2u^2}x^2 = A - Bx^2,$$

這裏用了第 (i) 部分的 $B = g/(2u^2)$。所以 Q 一直在 E 上。

第 (v) 部分

假設 Q 在爆炸後時刻 T 拋出，並且 Q 與 P_α 在爆炸後時刻 t $(\geq T)$ 位於同一點。那麼 $\tau = t - T$，而兩者的 y 坐標都是 0，所以需要 x 坐標和 z 坐標相等：

$$uct = u(t-T),$$
$$ust - \tfrac{1}{2}gt^2 = A - \tfrac{1}{2}g(t-T)^2.$$

第一式給出 $t - T = ct$，所以 $T = t(1-c)$。把 $t - T = ct$ 代入第二式，並利用 $1 - c^2 = s^2$：

$$ust - \tfrac{1}{2}gs^2t^2 = A = \frac{u^2}{2g}.$$

想一想 怎樣不用繁瑣的公式來解出 t？

乘以 $2g$ 並把所有項移到一邊：$g^2s^2t^2 - 2gus\,t + u^2 = 0$，這是一個完全平方

$$(gst - u)^2 = 0, \qquad \text{所以} \qquad t = \frac{u}{g\sin\alpha}.$$

出現重根正是意料之中：碰撞必須發生在 P_α 的軌跡與 E 相切之處，因為那是兩條路徑唯一的公共點。事實上，此時 P_α 位於 $x = uct = u^2/(g\tan\alpha)$，正是第 (i) 部分求得的切點。因此

$$T = t(1-\cos\alpha) = \frac{u(1-\cos\alpha)}{g\sin\alpha},$$

此即所求。由於 $0 < 1 - \cos\alpha < 1$，得 $0 < T < t$，所以 Q 確實是在爆炸之後、碰撞之前拋出的。

驗算

- 在第 (i) 部分，取 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 得切點 $x = u^2/g$，$z = 0$：這是在水平地面上的最大射程，可到達區域的邊界理應經過此點。
- 在第 (ii) 部分，在軸 $r = 0$ 上，界限是 $z \leq u^2/(2g)$，即垂直向上射出的質點所達的最大高度。
- 在第 (v) 部分，取 $u = 7$、$g = 9.8$ 及 $\alpha = 0.5$，公式給出 $T \approx 0.182$；把兩個運動逐步按時間推進，可確認兩粒質點在 $t = u/(g\sin\alpha) \approx 1.49$ 相遇，而即使把 Q 延遲 0.05 才拋出，它們便會錯過。
- 當 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 時，$T \to u/g$ 且 $t \to u/g$：P_α 幾乎垂直向上，到達 E 的頂點 $(0, 0, A)$，到達時刻為 u/g，恰好是 Q 從那裏出發的時刻。

常見錯誤

- 未先把公共點方程整理成關於 x 的單一二次方程便令判別式為零，結果在 x^2 的係數中漏掉了 $-B$ 項。
- 在第 (ii) 部分只描述邊界曲面：題目要求的是整個集合，即拋物面之上及其下方的實心區域。
- 在第 (v) 部分，兩粒質點用了同一個時間變量：Q 只運動了 $t-T$ 的時間。

STEP 之外

曲線 E 是這族軌跡的*包絡線*：一條與族中每一成員都相切的曲線。一般而言，曲線族 $F(x,z,\alpha)=0$ 的包絡線可透過在 $F=0$ 與 $\partial F/\partial\alpha=0$ 之間消去 α 求得，這就是本題所用重根條件的微積分版本。第 (ii) 部分的拋物面常被稱為*安全拋物面*（paraboloid of safety），而第 (iii) 部分則是轉換到自由下落參考系（freely falling frame）的一個例子，在該參考系中重力消失了。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這兩個概念都有闡述。

詳細解答

STEP II 2023，第 11 題

概率與統計 • 混合分佈

STEP II 2023，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 13.5 節 *問題尷尬的問題* 中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch13/awkward-questions.html

關鍵思路

Y 是一個*混合分佈*（mixture）：先隨機選定一個分佈，再從該分佈中抽取數值。它的平均值（mean）是兩個平均值的加權平均，但它的方差（variance）多了一項，因為兩個平均值之間的差距本身也會帶來變異。第 (ii) 和第 (iii) 部分都是先擲硬幣，再擲骰子，但兩者的表現截然不同。在 (ii) 中，每擲一次骰子都重新擲一次硬幣，所以混合的效果會被平均掉。在 (iii) 中，一枚硬幣決定一切，而那額外的一項最終會佔主導地位。

解答

第 (i) 部分

選用哪個隨機變量，與 X_1 和 X_2 的取值互相獨立（independent），所以

$$\mathrm{P}(Y = x_i) = p\,a_i + q\,b_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

因此

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_i x_i(pa_i + qb_i) = p\sum_i x_i a_i + q\sum_i x_i b_i = p\mu_1 + q\mu_2.$$

同理，$\mathrm{E}(Y^2) = p\,\mathrm{E}(X_1^2) + q\,\mathrm{E}(X_2^2) = p(\sigma_1^2+\mu_1^2) + q(\sigma_2^2+\mu_2^2)$。所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + p\mu_1^2 + q\mu_2^2 - (p\mu_1+q\mu_2)^2\\ &= p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + p(1-p)\mu_1^2 + q(1-q)\mu_2^2 - 2pq\mu_1\mu_2\\ &= p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + pq\mu_1^2 + pq\mu_2^2 - 2pq\mu_1\mu_2\\ &= p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + pq(\mu_1-\mu_2)^2,\end{aligned}$$

當中用到 $1-p=q$ 及 $1-q=p$。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

設 H 為硬幣擲出正面的事件，S 為骰子擲出六點的事件。硬幣與骰子互相獨立，所以

$$\mathrm{P}(B=1) = \mathrm{P}(H)\mathrm{P}(S) + \mathrm{P}(H^c)\mathrm{P}(S^c) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

所以每個 B 取 0 或 1 的概率各為 $\frac{1}{2}$。Z_1 是 n 個獨立的 B 之中 1 的個數，而每個 B 成功的概率同樣是 $\frac{1}{2}$。這正是二項分佈（binomial distribution）的設定，所以 $Z_1 \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{2})$，平均值為 $\frac{n}{2}$，方差為 $\frac{n}{4}$。

當 n 很大時，我們以 $\mathrm{N}(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$ 近似 Z_1，其標準差（standard deviation）為 $\frac{\sqrt{n}}{2}$。與平均值相差不超過 10%，即 $|Z_1 - \frac{n}{2}| \le \frac{n}{20}$。設 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$，進行標準化（standardising），得

$$\mathrm{P}\big(|Z_1 - \tfrac{n}{2}| \le \tfrac{n}{20}\big) \approx \mathrm{P}\Big(|Z| \le \frac{n/20}{\sqrt{n}/2}\Big) = \mathrm{P}\Big(|Z| \le \frac{\sqrt{n}}{10}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{10}\Big) - 1.$$

當 $n \to \infty$ 時，$\sqrt{n}/10 \to \infty$，所以 $\Phi(\sqrt{n}/10) \to 1$，而該概率趨向 $2-1=1$。（連續性校正（continuity correction）只會令界限改變 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 個標準差，並不影響極限。）

第 (iii) 部分

設 X_1 為 n 粒骰子中擲出六點的數目，X_2 為不是六點的數目。則 $X_1 \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{6})$ 及 $X_2 \sim \mathrm{B}(n, \frac{5}{6})$。現在 Z_2 以概率 $p = \frac{1}{2}$ 取 X_1 的值，以概率 $q = \frac{1}{2}$ 取 X_2 的值，而且硬幣與骰子互相獨立。這正是第 (i) 部分的情況，其中

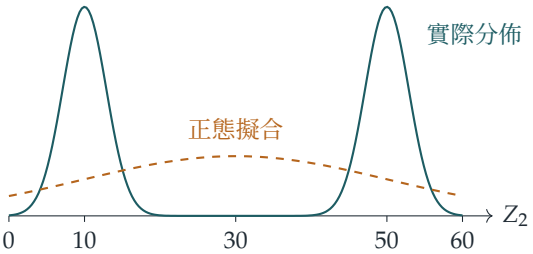
$$\mu_1 = \tfrac{n}{6}, \quad \mu_2 = \tfrac{5n}{6}, \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = n\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6} = \tfrac{5n}{36}.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z_2) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n}{6} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5n}{6} = \tfrac{n}{2},\\ \mathrm{Var}(Z_2) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5n}{36} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5n}{36} + \tfrac{1}{4}\Big(\tfrac{4n}{6}\Big)^2 = \frac{5n}{36} + \frac{n^2}{9}.\end{aligned}$$

想一想 當 n 很大時，Z_2 的分佈實際上是甚麼樣子？

Z_2 有 $\frac{1}{2}$ 的概率接近 $\frac{n}{6}$，另有 $\frac{1}{2}$ 的概率接近 $\frac{5n}{6}$。這兩個峯各自的標準差為 $\frac{\sqrt{5n}}{6}$，與兩者之間的距離 $\frac{2n}{3}$ 相比極小。所以這個分佈是雙峯（bimodal）的：兩個狹窄的峯，而在平均值 $\frac{n}{2}$ 附近幾乎沒有概率。正態分佈（normal distribution）只在平均值處有單一個峯，所以在這裏恰恰錯了：它把最多的概率放在 Z_2 幾乎從不落入的地方。另外還有第二個問題。標準差約為 $\frac{n}{3}$，所以 $\mathrm{N}(\frac{n}{2}, \frac{n^2}{9})$ 給負值的概率約為 $\mathrm{P}(Z < -1.5) \approx 0.067$，給大於 n 的值的概率也一樣，但 $0 \le Z_2 \le n$ 總是成立。下圖展示 $n = 60$ 時的兩幅圖像。



現在處理最後一部分。當 $0.45n \le Z_2 \le 0.55n$ 時，Z_2 與其平均值相差不超過 10%。以硬幣的結果為條件，

$$\mathrm{P}(0.45n \le Z_2 \le 0.55n) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}(0.45n \le X_1 \le 0.55n) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}(0.45n \le X_2 \le 0.55n).$$

對於第一項，$\mathrm{P}(0.45n \le X_1 \le 0.55n) \le \mathrm{P}(X_1 \ge 0.45n)$，而 $0.45n - \frac{n}{6} = \frac{17n}{60}$。利用正態近似（normal approximation）$X_1 \approx \mathrm{N}(\frac{n}{6}, \frac{5n}{36})$，其標準差為 $\frac{\sqrt{5n}}{6}$，得

$$\mathrm{P}(X_1 \ge 0.45n) \approx \mathrm{P}\Big(Z \ge \frac{17n/60}{\sqrt{5n}/6}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{17\sqrt{n}}{10\sqrt{5}}\Big) \longrightarrow 1 - 1 = 0.$$

第二項是第一項的鏡像：$X_2 = n - X_1$，所以 $0.45n \le X_2 \le 0.55n$ 當且僅當 $0.45n \le X_1 \le 0.55n$，因此第二項等於第一項。故此，Z_2 與其平均值相差不超過 10% 的概率至多約為 $1 - \Phi\big(\frac{17\sqrt{n}}{10\sqrt{5}}\big)$，當 $n \to \infty$ 時趨向 0。

這一步其實並不依賴近似。切比雪夫（Chebyshev）不等式可準確地給出

$$\mathrm{P}\big(|X_1 - \tfrac{n}{6}| \ge \tfrac{17n}{60}\big) \le \frac{5n/36}{(17n/60)^2} = \frac{500}{289\,n} \longrightarrow 0.$$

驗算

- 在 (i) 中，若 $\mu_1 = \mu_2$，額外的一項便會消失；若 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$，則 Y 只取 μ_1 或 μ_2 兩個值，方差為 $pq(\mu_1 - \mu_2)^2$，與經縮放的伯努利（Bernoulli）隨機變量相同。

- 在 (ii) 中，$n = 400$ 時準確的二項概率為 0.9598，而正態近似值為 $2\Phi(2) - 1 = 0.9545$。$n = 1000$ 時，兩者分別為 0.9986 和 0.9984。
- 在 (iii) 中，以電腦模擬 $n = 30$ 的 Z_2，得出平均值 15.00 及方差 104.2，而公式給出的是 15 和 104.17。當 $n = 100$ 時，與平均值相差不超過 10% 的準確概率約為 3×10^{-11}。

常見錯誤

- 寫出 $\mathrm{Var}(Y) = p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2$，忘記了在兩個平均值之間作選擇本身就是變異的來源。
- 把 (iii) 中的 Z_2 當作 (ii) 中的 Z_1 處理。在 (ii) 中，每粒骰子都重新擲一次硬幣；但在 (iii) 中，一次擲硬幣便決定了全部 n 粒骰子，所以各結果並不獨立。
- 只用「方差很大」來解釋擬合不佳。真正的問題在於形狀：兩個分開的峯，而平均值附近的概率極少。

STEP 之外

第 (i) 部分是*全方差定律*（law of total variance）$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}\big(\mathrm{Var}(Y \mid C)\big) + \mathrm{Var}\big(\mathrm{E}(Y \mid C)\big)$ 最簡單的情況，其中 C 代表硬幣。第 (ii) 部分是弱大數定律（weak law of large numbers），大學的入門課程會利用切比雪夫不等式嚴格證明它。第 (iii) 部分說明了為何這條定律需要獨立性：只要一枚共用的硬幣，便足以令它失效。像 Z_2 這樣的混合分佈是統計建模的常用工具。Blitzstein 與 Hwang 所著的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）以大量例子涵蓋了以上三個概念。

詳細解答

STEP II 2023，第 12 題

概率與統計 • 最大值的分佈

STEP II 2023，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

若干個數的最大值不超過 t，當且僅當其中每一個都不超過 t，因此 Y 的累積分佈函數（cumulative distribution function）是單個 X_i 的累積分佈函數的冪。其餘一切都源於使用累積分佈函數而不是密度函數：中位數（median）可直接解方程 $\mathrm{P}(Y \le m) = \frac{1}{2}$ 得出，而均值（mean）則可透過分部積分（integration by parts）簡潔地求得，使積分中出現的是分佈函數而非密度函數。

解答

第 (i) 部分

記 $F(t) = \mathrm{P}(X_1 \le t)$。當 $0 \le t \le \pi$ 時，

$$F(t) = \int_0^t \tfrac{1}{2}\sin x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos t).$$

事件 $\{Y \le t\}$ 發生，當且僅當 $X_1 \le t$、$X_2 \le t$、…、$X_n \le t$ 全部發生：若最大者不超過 t，則其餘各個亦不超過 t，反之亦然。各 X_i 獨立同分佈（independent and identically distributed），故這個交集的概率等於各個概率之積：

$$\mathrm{P}(Y \le t) = \mathrm{P}(X_1 \le t)\,\mathrm{P}(X_2 \le t)\cdots\mathrm{P}(X_n \le t) = \big[\mathrm{P}(X_1 \le t)\big]^n.$$

因此，以 G 記 Y 的累積分佈函數，

$$G(t) = \frac{(1-\cos t)^n}{2^n} \qquad (0 \le t \le \pi),$$

且當 $t<0$ 時 $G(t)=0$，當 $t>\pi$ 時 $G(t)=1$。用鏈式法則（chain rule）求導，得 Y 的概率密度函數（probability density function）為

$$g(t)=\frac{n\,(1-\cos t)^{n-1}\sin t}{2^n}\quad \text{當} 0\le t\le \pi,$$

其他情況下為零。

第 (ii) 部分

中位數 $m=m(n)$ 滿足 $G(m)=\frac{1}{2}$：

$$\left(\frac{1-\cos m}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\iff \frac{1-\cos m}{2}=2^{-1/n}$$
$$\iff \cos m=1-2^{1-1/n},$$

由於 $(1-\cos m)/2\ge 0$，這裏取正實數 n 次方根。由於 m 必須位於 $[0,\pi]$ 內，而餘弦函數在此區間上是一一對應（one-to-one）的，

$$m(n)=\arccos\left(1-2^{1-1/n}\right).$$

當 n 增大時，$1/n$ 減小，故 $2^{1-1/n}$ 增大（趨向 2），而 $1-2^{1-1/n}$ 減小（趨向 -1）。由於 arccos 是遞減函數，$m(n)$ 隨 n 遞增，且當 $n\to\infty$ 時 $m(n)\to\arccos(-1)=\pi$。（當 $n=1$ 時得 $m(1)=\arccos 0=\pi/2$，這正符合 $\frac{1}{2}\sin x$ 關於 $\pi/2$ 的對稱性。）這是合理的：取越來越多個值的最大值，結果會被推向取值範圍的頂端。

第 (iii) 部分

按定義，$\mu(n)=\int_0^\pi t\,g(t)\,\mathrm{d}t$。由於 $g=G'$，取 $u=t$ 及 $\mathrm{d}v=g(t)\,\mathrm{d}t$、$v=G(t)$ 進行分部積分：

$$\mu(n)=\Big[t\,G(t)\Big]_0^\pi-\int_0^\pi G(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\pi\cdot 1-0-\frac{1}{2^n}\int_0^\pi (1-\cos x)^n\,\mathrm{d}x,$$

其中用到 $G(\pi)=\left(\frac{1+1}{2}\right)^n=1$。這就是所求的公式。

? **想一想** 為甚麼要用分部積分，而不是嘗試直接計算 $\int t\,(1-\cos t)^{n-1}\sin t\,\mathrm{d}t$？

目標公式含有 $(1-\cos x)^n$，即 $2^nG(x)$，是分佈函數而非密度函數。分部積分正是把 $t\,g(t)$ 換成 $G(t)$ 的一步，同時亦消去了麻煩的因子 t。

(a) 設 $h(x)=\frac{1}{2}(1-\cos x)$，則在 $[0,\pi]$ 上 $0\le h(x)\le 1$，且當 $0<x<\pi$ 時 $0<h(x)<1$。公式變為 $\mu(n)=\pi-\int_0^\pi h(x)^n\,\mathrm{d}x$，故

$$\mu(n+1)-\mu(n)=\int_0^\pi \big(h(x)^n-h(x)^{n+1}\big)\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi h(x)^n\big(1-h(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

在 $0 < x < \pi$ 上，被積函數連續且嚴格為正，因為在該處 $h(x) > 0$ 且 $1 - h(x) > 0$。所以積分嚴格為正，對每個 $n \geq 1$ 都有 $\mu(n+1) > \mu(n)$：$\mu(n)$ 隨 n 遞增。

(b) 取 $n = 2$，展開並利用 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$：

$$\int_0^{\pi} (1 - \cos x)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x\right) \mathrm{d}x = \tfrac{3}{2}\pi,$$

因為 $\cos x$ 和 $\cos 2x$ 在 $[0, \pi]$ 上的積分均為零。因此

$$\mu(2) = \pi - \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{2}\pi = \frac{5\pi}{8}.$$

由第 (ii) 部分，$m(2) = \arccos\left(1 - \sqrt{2}\right)$。$5\pi/8$ 與 $m(2)$ 均位於 $[0, \pi]$ 內，而餘弦函數在此區間上嚴格遞減，故

$$\mu(2) < m(2) \iff \cos \tfrac{5\pi}{8} > \cos m(2) = 1 - \sqrt{2}.$$

想一想 怎樣求得 $\cos \frac{5\pi}{8}$ 的準確值？

寫成 $\cos \frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin \frac{\pi}{8}$，並利用半角公式（half-angle formula）$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$。由於 $\sin \frac{\pi}{8} > 0$，

$$\cos \tfrac{5\pi}{8} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

所以我們需要證明 $-\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} > 1 - \sqrt{2}$，即 $\sqrt{2} - 1 > \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$。兩邊均為正數，故此式等價於兩邊平方後的不等式，再乘以 4：

$$\begin{aligned} 4\left(3 - 2\sqrt{2}\right) > 2 - \sqrt{2} &\iff 10 > 7\sqrt{2} \\ &\iff 100 > 98, \end{aligned}$$

其中最後一步是把兩個正數平方。此式成立，而每一步都是等價變換，故 $\cos \frac{5\pi}{8} > 1 - \sqrt{2}$，因此 $\mu(2) < m(2)$。

驗算

- 當 $n = 1$ 時，$Y = X_1$ 關於 $\pi/2$ 對稱，而確實 $\mu(1) = \pi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos x)\,\mathrm{d}x = \pi/2 = m(1)$。
- 數值上，$\mu(2) = 5\pi/8 \approx 1.9635$，$m(2) = \arccos(1 - \sqrt{2}) \approx 1.9979$，所以均值略低於中位數。對 n 由 1 至 7 的每個值各以電腦模擬 10^5 個最大值，結果與兩條公式的誤差均在 0.01 以內（例如 $\mu(3) \approx 2.1598$，$m(3) \approx 2.1986$），而且兩個數列都遞增。
- 當 $n = 2$ 時，Y 的密度函數為 $\frac{1}{2}(1 - \cos t)\sin t$，屬左偏（skewed to the left）分佈（有一條伸向 0 的長尾），而左偏分佈的均值通常低於中位數。

常見錯誤

- 忘記論證 $\mathrm{P}(Y \leq t) = [F(t)]^n$：既需要「全部都不超過 t」這個等價關係，也需要獨立性。
- 做了分部積分，卻忘記邊界項 $\left[tG(t)\right]_0^{\pi} = \pi$，而開首的 π 正是由此而來。
- 透過餘弦比較角的大小時，沒有指出餘弦函數在 $[0, \pi]$ 上是遞減的，結果把不等號方向弄反。

STEP 之外

樣本的最大值是順序統計量（order statistic）的一個例子，而第 (i) 部分的技巧可以求出任何樣本最大值的分佈。恆等式 $\mathrm{E}[Y] = \pi - \int_0^{\pi} G(t)\,\mathrm{d}t$ 是非負隨機變量的一般尾部積分公式（tail-integral formula）$\mathrm{E}[Y] = \int_0^{\infty} \mathrm{P}(Y > t)\,\mathrm{d}t$ 的特例，你在大學概率課程的初期就會遇到。這兩個概念在 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）中均有深入討論。

詳細解答

STEP III 2023，第 1 題

純數學 • 圓錐曲線的切線

STEP III 2023，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

一條直線與圓相切（tangent），當且僅當圓心到該直線的垂直距離等於半徑。因此，我們先用 p 和 q 寫出弦（chord）PQ 的方程，計算這個距離，然後看着相切條件化簡成題目所給的關係式。之後，一切都歸結為一條含兩個參數的對稱方程：最後一部分問的是，這個關係式對第三條邊是否仍然成立，而這正是根之和與根之積（sums and products of roots）的用武之地。

解答

第 (i) 部分

PQ 的斜率（gradient）是

$$\frac{aq^2 - ap^2}{2aq - 2ap} = \frac{p+q}{2},$$

由於兩點相異，可以除以 $q - p \neq 0$。因此經過 P 的直線是 $y - ap^2 = \frac{1}{2}(p+q)(x - 2ap)$，化簡後得

$$(p+q)x - 2y - 2apq = 0.$$

圓心 $C(0, 3a)$ 到這條直線的距離是

$$\frac{|-6a - 2apq|}{\sqrt{(p+q)^2 + 4}} = \frac{2a|pq+3|}{\sqrt{(p+q)^2+4}}.$$

這條直線與圓相切，當且僅當此距離等於 $2a$，即（由於兩邊皆為正，可以平方，再約去 $4a^2 \neq 0$）當且僅當

$$(pq+3)^2 = (p+q)^2 + 4 \iff p^2q^2 + 6pq + 5 = (p+q)^2.$$

這正是 $(*)$，所以當 $(*)$ 成立時，直線 PQ 是圓的切線。（每一步都是可逆的，所以逆命題（converse）亦成立，而我們在第 (iii) 部分會用到這一點。）

第 (ii) 部分

展開 $(*)$ 並按 q 的冪次整理：

$$(1-p^2)q^2 - 4pq + (p^2-5) = 0.$$

由於 $p^2 \neq 1$，首項係數不為零，所以這確實是一條關於 q 的二次方程。它的判別式（discriminant）是

$$\begin{aligned} 16p^2 - 4(1-p^2)(p^2-5) &= 16p^2 - 4(-p^4+6p^2-5) \\ &= 4(p^4-2p^2+5) \\ &= 4\big((p^2-1)^2+4\big) > 0, \end{aligned}$$

所以有兩個相異實根 q_1, q_2。兩者都不等於 p：把 $q=p$ 代入左邊得 $-p^4-2p^2-5<0$。所以 Q_1 和 Q_2 確實是與 P 相異的點。

由這條二次方程，

$$q_1+q_2 = \frac{4p}{1-p^2}, \qquad q_1q_2 = \frac{p^2-5}{1-p^2}.$$

第 (iii) 部分

取三角形 PQ_1Q_2，其中 $Q_i = (2aq_i, aq_i^2)$，而 q_1, q_2 是第 (ii) 部分中的兩個根。它的頂點全都在 $x^2 = 4ay$ 上，而且是三個相異點（如 (ii) 所證）；拋物線（parabola）上三個相異點必定不共線，因為一條直線與拋物線最多相交兩次。所以這確實是一個三角形。

由第 (i) 部分，由於 (p, q_1) 和 (p, q_2) 滿足 $(*)$，邊 PQ_1 和 PQ_2 都與圓相切。

> **想一想** 如果我們不想明確解出 q_1 和 q_2，怎樣才能證明第三條邊 Q_1Q_2 也是切線？

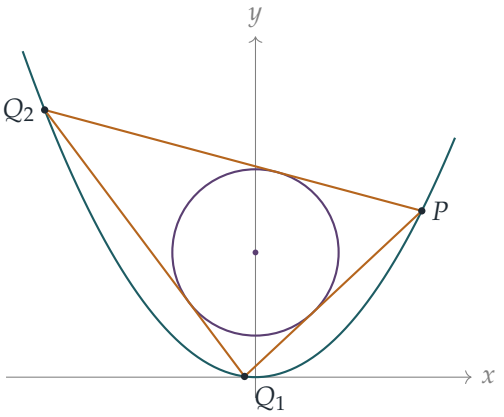
根據第 (i) 部分的可逆論證（把 p, q 換成 q_1, q_2），Q_1Q_2 是切線當且僅當

$$(q_1+q_2)^2 = q_1^2q_2^2 + 6q_1q_2 + 5,$$

而兩邊都只涉及 $s = q_1+q_2$ 和 $t = q_1q_2$，這兩者我們已經知道。全式乘以 $(1-p^2)^2$。左邊變成 $16p^2$。右邊變成

$$\begin{aligned} &(p^2-5)^2 + 6(p^2-5)(1-p^2) + 5(1-p^2)^2 \\ &\quad = (p^4-10p^2+25) + (-6p^4+36p^2-30) + (5p^4-10p^2+5) \\ &\quad = 16p^2. \end{aligned}$$

兩邊相等，所以 Q_1Q_2 也與圓相切，而 PQ_1Q_2 就是所求的三角形。



圖中顯示 $a=1$、$p=2$ 的情況，此時 $q_{1,2}=\frac{1}{3}(-4\pm\sqrt{13})$。

驗算

- 取 $a=1$、$p=2$：二次方程是 $3q^2+8q+1=0$，其中 $q_1+q_2=-\frac{8}{3}=\frac{4p}{1-p^2}$，$q_1q_2=\frac{1}{3}=\frac{p^2-5}{1-p^2}$。於是 $(q_1+q_2)^2=\frac{64}{9}$，而 $q_1^2q_2^2+6q_1q_2+5=\frac{1}{9}+2+5=\frac{64}{9}$，正如第 (iii) 部分所要求。
- 數值上，取 $q_1\approx-0.1315$、$q_2\approx-2.5352$，三條邊所在直線到 $(0,3)$ 的距離都是 2.000；用電腦對數以千計的隨機 a 和 p 作檢驗，結果吻合至約 10^{-13}。
- 被排除的情況 $p=\pm1$ 很有啟發性：當 $p=1$ 時，二次方程退化為 $-4q-4=0$，只得出 $q=-1$。從 $P(2a,a)$ 出發那條「失蹤」的切線是鉛垂線 $x=2a$，它與圓相切，但與拋物線只相交於 P。

常見錯誤

- 在距離公式中忘記絕對值，或者平方時沒有指出兩邊皆為正。
- 只用了第 (i) 部分的「若」方向：第 (iii) 部分需要逆命題，才能把 Q_1Q_2 的相切轉化為代數條件，所以要說明各步是可逆的。
- 沒有檢查 $q_1,q_2\neq p$，以確保三角形不是退化的。

STEP 之外

這是龐斯萊閉合定理（Poncelet's porism）的一個例子：如果一個三角形可以內接於一條圓錐曲線（conic），同時外切於另一條圓錐曲線，那麼這樣的三角形可以從第一條圓錐曲線上的任何一點出發作出。這裏的拋物線與圓正是這樣的一對，而第 (iii) 部分用韋達定理（Vieta's formulas）直接證明了閉合性。一般情況的證明要用到射影幾何（projective geometry），而最優雅的證明則用到橢圓曲線（elliptic curves）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學高階難題》）收錄了更多這類參數化圓錐曲線幾何的題目。

詳細解答

STEP III 2023，第 2 題

純數學 • 極坐標曲線的面積

STEP III 2023，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

兩條曲線都是由一條從 $\theta = 0$ 掃到 $\theta = \pi$ 的半徑畫出來的，所以整道題目的重點在於：在每個角度上，哪一條曲線離原點較遠。比較 $k(1+\sin\theta)$ 與 $k+\cos\theta$，可見兩者恰好在 $\theta = \alpha$ 處交換一次位置。於是 A 與 B 兩個區域合起來，正是兩條曲線所圍區域的重疊部分；而所有面積都來自極坐標（polar coordinates）面積公式 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$，其中 $\sin^2$ 和 $\cos^2$ 用倍角公式（double angle formulae）處理。

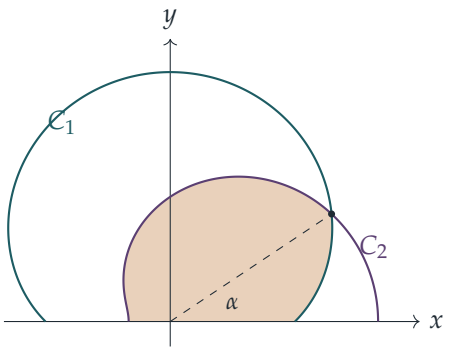
解答

第 (i) 部分

先算一些數值，有助作草圖：

	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = \pi$
C_1: $r = k(1+\sin\theta)$	k	$2k$	k
C_2: $r = k+\cos\theta$	$k+1$	k	$k-1$

由於 $k > 1$，兩個半徑在整個範圍內都是正數。C_1 是心臟線（cardioid）的上半部分，關於 y 軸對稱，最高到達 $(0, 2k)$。C_2 是一個稍微壓扁、「半徑約為 k」的半圓，在 $\theta = 0$ 處向右推出 1 個單位，在 $\theta = \pi$ 處向內收入 1 個單位。下圖取 $k = 1.5$；陰影部分是兩條曲線所圍區域的重疊部分。



在交點處兩個半徑相等，所以

$$k(1+\sin\alpha) = k+\cos\alpha \iff k\sin\alpha = \cos\alpha.$$

這裏 $\cos\alpha \neq 0$（否則便需要 $k\sin\alpha = 0$，但此時 $\sin\alpha = \pm 1$），因此兩邊相除得 $\tan\alpha = \frac{1}{k}$，即所求。由於 $0 < \frac{1}{k} < 1$，在 $[0,\pi]$ 內恰好有一個這樣的角，而且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$。

更有用的是，$k+\cos\theta - k(1+\sin\theta) = \cos\theta - k\sin\theta$，它在 $0 \leq \theta < \alpha$ 時為正，在 $\alpha < \theta \leq \pi$ 時為負（利用下面 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的值，它等於 $\sqrt{1+k^2}\,\sin(\alpha-\theta)$，而 $\alpha-\theta$ 分別落在 $(0,\alpha]$ 或 $[\alpha-\pi,0)$ 之內）。所以在 α 之前 C_2 在 C_1 之外，在 α 之後則在 C_1 之內。

我們亦會用到由 $\tan\alpha = \frac{1}{k}$ 得出的

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

第 (ii) 部分

區域 A 是在 $0 \leq \theta \leq \alpha$ 時，由伸到 C_1 的半徑掃出來的，所以其面積為

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_0^\alpha k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \frac{k^2}{2}\int_0^\alpha \left(1+2\sin\theta+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{k^2}{2}\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\alpha \\
&= \frac{k^2}{2}\left(\tfrac{3}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\right) \\
&= \frac{k^2}{4}(3\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + k^2(1-\cos\alpha),
\end{aligned}$$

這裏用了 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ 和 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$。這正是所求的表達式。

第 (iii) 部分

同樣地，利用 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$，B 的面積為

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\pi (k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\pi \left(k^2+\tfrac{1}{2}+2k\cos\theta+\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\left(k^2+\tfrac{1}{2}\right)\theta+2k\sin\theta+\tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_\alpha^\pi\\ &= \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4}-k\sin\alpha-\tfrac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

如果想消去 α 的三角函數，可用第 (i) 部分的數值：$k\sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$，$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{k}{1+k^2}$，所以

$$\text{B 的面積} = \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4}-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}-\frac{k}{4(1+k^2)}.$$

第 (iv) 部分

想一想 A 與 B 合起來的區域是甚麼形狀？

由第 (i) 部分，當 $\theta<\alpha$ 時，A 的邊界是位於內側的曲線 C_1；當 $\theta>\alpha$ 時，B 的邊界是位於內側的曲線 C_2。所以 R 是兩個區域重疊部分的面積（即草圖中的陰影部分）。這已經提示了答案：當 k 很大時，C_2 幾乎完全位於 C_1 之內，所以重疊部分應該差不多就是整個 T。

整個區域的面積可由同樣的積分在 $[0,\pi]$ 上計算得出（$\sin\theta$ 和 $\sin 2\theta$ 項在兩端都給出 0；$-2\cos\theta$ 給出 4）：

$$T=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi (k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi(2k^2+1)}{4},\qquad S=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{k^2(3\pi+8)}{4}.$$

當 $k\to\infty$ 時，$\alpha=\arctan\frac{1}{k}\to 0$。與其展開 A，不如為它找一個上界：在 $[0,\alpha]$ 上有 $r=k(1+\sin\theta)\le 2k$，所以 A 位於一個半徑為 $2k$、圓心角為 α 的扇形（sector）之內；又因為 $\alpha<\tan\alpha=\frac{1}{k}$，

$$0<\text{A 的面積}\le\tfrac{1}{2}(2k)^2\alpha<2k.$$

因此 $\dfrac{\text{A}}{T}<\dfrac{8k}{\pi(2k^2+1)}\to 0$。至於 B，把第 (iii) 部分的結果除以 T，

$$\frac{\text{B}}{T}=\frac{\pi-\alpha}{\pi}-\frac{4\left(k\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha\right)}{\pi(2k^2+1)}\to 1-0=1,$$

因為 $\alpha\to 0$，而且 $0<k\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha<k+1$，與 $2k^2+1$ 相比微不足道。因此

$$\frac{R}{T}=\frac{\text{A}}{T}+\frac{\text{B}}{T}\to 1.$$

最後

$$\frac{R}{S}=\frac{R}{T}\cdot\frac{T}{S}=\frac{R}{T}\cdot\frac{\pi(2k^2+1)}{k^2(3\pi+8)}\to 1\cdot\frac{2\pi}{3\pi+8}=\frac{2\pi}{3\pi+8}.$$

驗算

- 在 $\theta=0$ 處，C_2（$r=k+1$）在 C_1（$r=k$）之外；在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 處則在其內（$k<2k$），所以兩條曲線必定在兩者之間相交，與 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ 一致。
- 取 $k=2$：$\alpha=\arctan\frac{1}{2}\approx 0.4636$，A ≈ 1.4132，B ≈ 5.0309，$T=\frac{9}{4}\pi\approx 7.0686$，所以 $R/T\approx 0.912$。直接對 $\frac{1}{2}r^2$ 作數值積分，結果與兩條公式都吻合。
- 取 $k=50$，$R/T\approx 0.99987$，$R/S\approx 0.36061$，接近 $\frac{2\pi}{3\pi+8}\approx 0.36059$。
- 對極限作一個合理性檢查：當 k 極大時，C_2 近似一個半徑為 k 的半圓（面積 $\frac{1}{2}\pi k^2$），而 C_1 是一個固定的半心臟線放大 k 倍，該半心臟線的面積為 $\frac{3\pi}{4}+2$；兩者之比為 $\frac{2\pi}{3\pi+8}$。

常見錯誤

- 忘記極坐標面積公式中的因子 $\frac{1}{2}$，或把 $1+\sin\theta$ 的平方誤寫成 $1+\sin^2\theta$。
- 在第 (iv) 部分中，聲稱 $k^2(1-\cos\alpha)$「因為 $\alpha\to 0$ 所以趨於 0」：它乘了 k^2，事實上它趨於 $\frac{1}{2}$。真正重要的只是它相對於 T 的大小。

STEP 之外

求兩個以極坐標形式給出的區域的重疊面積，是初嘗大學一年級多變數微積分（multivariable calculus）中面積積分 $\iint r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ 的滋味；在那裏，最難的部分總是描述區域本身，正如本題一樣。第 (iv) 部分的極限論證（為某一項找上界，而不是精確計算它）正是實分析（real analysis）的風格；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是觀摩這種風格如何被細緻發展的好地方。

詳細解答

STEP III 2023，第 3 題

純數學 • 三次方程的複數根

STEP III 2023，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

以 a 為基準點量度，三點分別是 $sb\mathrm{i}$、$-sb\mathrm{i}$ 和 b。乘以 i 會把向量（vector）轉一個直角，所以 a 是底邊的中點，而 b 沿着對稱軸方向。有了這個圖像，第 (ii) 部分只需運用韋達定理（Vieta's formulas）：各根之和為零，由此可用 a 表示 b，然後 a 在 p^3/q^2 中消去。第 (iii) 及 (iv) 部分把結果化為關於 $x = s^2 > 0$ 的單變量函數（function），從其圖像可看出它最小可以是多少。

解答

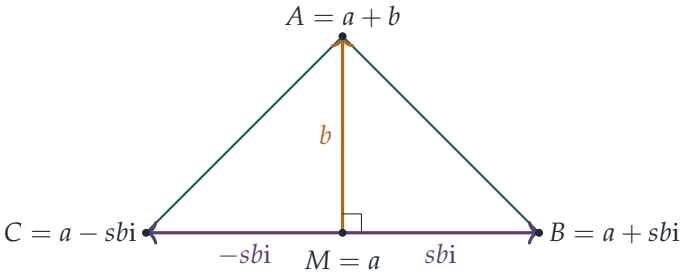
第 (i) 部分

由 $a + b$ 到另外兩點的距離為

$$\big|(a + sb\mathrm{i}) - (a + b)\big| = |b|\,|s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1},$$
$$\big|(a - sb\mathrm{i}) - (a + b)\big| = |b|\,|-s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1}.$$

兩者相等。我們還需要確認三點確實構成一個三角形。相對於 a，三點是 $sb\mathrm{i}$、$-sb\mathrm{i}$ 和 b。前兩點互不相同（因為 $s > 0$ 且 $b \neq 0$），並且位於經過 a、方向為 $b\mathrm{i}$ 的直線上。由於 $b\mathrm{i}$ 是 b 轉了一個直角，而 $b \neq 0$，所以第三點 $a + b$ 不在該直線上。因此這三點構成一個等腰三角形（isosceles triangle），頂點為 $a + b$，底邊由 $a - sb\mathrm{i}$ 到 $a + sb\mathrm{i}$，底邊中點為 a。

還原 a、b、s。設三角形的頂點為 A（即兩條等邊相交的頂點；若是等邊三角形，任取一個頂點即可），其餘兩個頂點為 B、C。設 M 為 BC 的中點。



- 取 $a = M = \frac{1}{2}(B + C)$。
- 取 $b = A - M$。由於 A 不在 BC 上，這不等於零。
- 由於 $AB = AC$，A 位於 BC 的垂直平分線（perpendicular bisector）上，所以 $MB \perp MA$。因此 $B - M$ 是把 b 轉一個直角再伸縮所得：對某個實數 $\lambda \neq 0$，有 $B - M = \lambda b\mathrm{i}$。若 $\lambda < 0$，就把 B 和 C 的標記互換，這會改變 λ 的正負號。於是 $s = \lambda > 0$ 為

$$s = \frac{MB}{MA} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\text{三角形的高}}.$$

於是 $a + b = A$、$a + sb\mathrm{i} = B$ 及 $a - sb\mathrm{i} = M - (B - M) = C$，符合所求。

第 (ii) 部分

由第 (i) 部分，可把各根記為 $a + sb\mathrm{i}$、$a - sb\mathrm{i}$、$a + b$，其中 $b \neq 0$、$s > 0$。這個三次方程沒有 z^2 項，所以各根之和為零：

$$3a + b = 0, \qquad \text{所以} b = -3a,$$

而因為 $b \neq 0$，所以 $a \neq 0$。因此各根為

$$a(1 - 3s\mathrm{i}), \qquad a(1 + 3s\mathrm{i}), \qquad -2a.$$

前兩個根之積為 $a^2(1 + 9s^2)$，和為 $2a$。所以由韋達定理，

$$p = a^2(1 + 9s^2) + (-2a)(2a) = a^2(9s^2 - 3) = 3a^2(3s^2 - 1),$$
$$q = -(\text{各根之積}) = -(-2a)\,a^2(1 + 9s^2) = 2a^3(9s^2 + 1).$$

由於 $a \neq 0$，所以 $q \neq 0$，可以相除：

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27a^6(3s^2 - 1)^3}{4a^6(9s^2 + 1)^2} = \frac{27(3s^2 - 1)^3}{4(9s^2 + 1)^2},$$

其中 s 是非零（事實上是正的）實數，符合所求。

第 (iii) 部分

設 $y = \dfrac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}$，定義域為 $x \neq -\frac{1}{9}$。由商法則（quotient rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{9(3x-1)^2(9x+1)^2 - (3x-1)^3 \cdot 18(9x+1)}{(9x+1)^4} \\ &= \frac{9(3x-1)^2\big[(9x+1) - 2(3x-1)\big]}{(9x+1)^3} = \frac{27(3x-1)^2(x+1)}{(9x+1)^3}.\end{aligned}$$

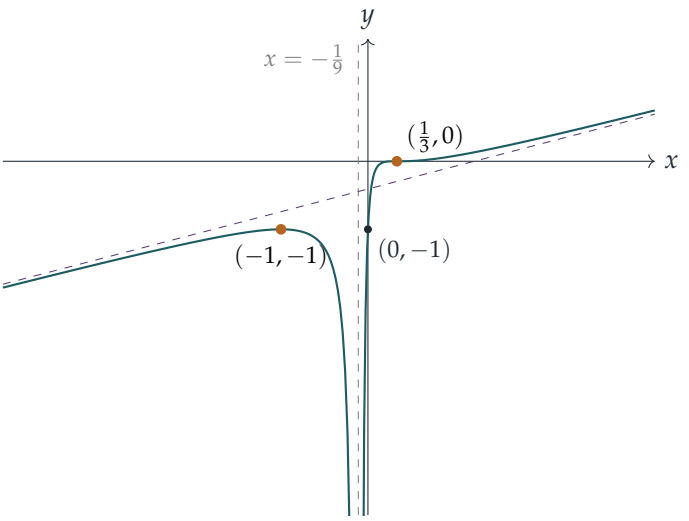
所以駐點（stationary point）位於 $x = -1$ 及 $x = \frac{1}{3}$。

- 在 $x = -1$：$y = (-4)^3/(-8)^2 = -1$。當 $x < -1$ 時，因子 $x+1$ 和 $(9x+1)^3$ 皆為負，所以 $y' > 0$。當 $-1 < x < -\frac{1}{9}$ 時，只有 $(9x+1)^3$ 為負，所以 $y' < 0$。因此 $(-1,-1)$ 是**局部極大點**（local maximum）。
- 在 $x = \frac{1}{3}$：$y = 0$。在其兩側（對 $x > -\frac{1}{9}$），除 $(3x-1)^2$ 外每個因子皆為正，而當 $x \neq \frac{1}{3}$ 時 $(3x-1)^2 > 0$。所以兩側皆有 $y' > 0$，因此 $(\frac{1}{3}, 0)$ 是**駐拐點**（stationary point of inflection）。

特別地，y 在 $x > -\frac{1}{9}$ 上嚴格遞增（strictly increasing），因為除單一點 $x = \frac{1}{3}$ 外，該處皆有 $y' > 0$。

其他特徵：

- 垂直漸近線（vertical asymptote）$x = -\frac{1}{9}$。在該處分子趨向 $(-\frac{4}{3})^3 < 0$，分母趨向 0^+，所以從兩側皆有 $y \to -\infty$。
- 把 $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$ 除以 $81x^2 + 18x + 1$，得商式 $\frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$，所以當 $x \to \pm\infty$ 時，$y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$ 是一條斜漸近線（oblique asymptote）。
- 曲線與坐標軸相交於 $(0,-1)$ 及 $(\frac{1}{3}, 0)$。



虛線是斜漸近線 $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$。左支永不高於 -1。右支由 $-\infty$ 遞增，經過每一個實數值。

第 (iv) 部分

由第 (ii) 部分，取該部分所得的實數 $s \neq 0$，並設 $x = s^2$，

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27}{4} \cdot \frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}.$$

由於 s 是實數，右方是實數，因此 p^3/q^2 亦是實數。

想一想 圖像向下伸延至 $-\infty$，那麼為甚麼 p^3/q^2 不能是很大的負數？

因為 $x = s^2$ 並非任意實數：s 是非零實數，所以 $x > 0$。因此我們關心的 x 值都位於右支上，而（由第 (iii) 部分）y 在右支上嚴格遞增。所以對 $x > 0$，

$$\frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2} > \frac{(0-1)^3}{(0+1)^2} = -1,$$

因此

$$\frac{p^3}{q^2} > -\frac{27}{4}.$$

這個不等式（inequality）是嚴格的，因為 $x = 0$（即 $s = 0$）被排除了：那會使三角形退化成一條線段。

驗算

- 等邊三角形：$z^3 - 1 = 0$ 的根構成一個等邊三角形(equilateral triangle)。此時 $p = 0$，而公式給出 $p = 0$ 當且僅當 $s^2 = \frac{1}{3}$，即底邊的一半等於高的 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍，這正是等邊三角形的形狀。
- 一個具體例子：$a = 1$、$s = 1$ 給出根 $1 \pm 3\mathrm{i}$ 及 -2，所以方程為 $z^3 + 6z + 20 = 0$。於是 $p^3/q^2 = 216/400 = \frac{27}{50}$，而公式給出 $\frac{27 \cdot 8}{4 \cdot 100} = \frac{27}{50}$。
- 當 $s \to 0$ 時，三角形壓扁，趨向在 a 處的二重根，而 $p^3/q^2 \to -\frac{27}{4}$：$4p^3 + 27q^2 = 0$ 正是有重根（repeated root）的條件。當 $s = 10^{-4}$ 時，其值約為 -6.749998。
- 以電腦檢驗了隨機生成、形心（centroid）在原點的等腰三角形：p^3/q^2 總是實數，且大於 -6.75。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分把 a 和 b 當作實數。它們是複數，所以三角形可以朝任何角度擺放。
- 弄錯 q 的正負號：對首一三次多項式（monic cubic）而言，q 是各根之積的負數。
- 在第 (iv) 部分使用整個圖像，忘記了 $x = s^2 > 0$，而正是這一點使我們停留在右支上。

STEP 之外

量 $-(4p^3 + 27q^2)$ 是這個三次多項式的判別式（discriminant），而 p^3/q^2 是一個形狀不變量（invariant）：當各根繞其形心旋轉或伸縮時，它保持不變（把 z 換成 kz，會使 p 乘以 k^2、q 乘以 k^3），所以它只記錄了根所構成三角形的形狀。這類不變量是在變數變換下對多項式進行分類的起點。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是一本出色的指南，教你像本題所要求那樣，以幾何方式思考複數。

詳細解答

STEP III 2023，第 4 題

純數學 • 切比雪夫多項式的係數

STEP III 2023，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

把 $\cos\big((2n+1)\theta\big)$ 寫成 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1}$ 的實部，就能把 p 化成一個明確的和式，而 p 的每個係數都變成二項式係數(binomial coefficient)之和。形如 $\sum\binom{N}{2r}$ 或 $\sum r\binom{N}{2r}$、只取偶數下標的和，可以把 $t=1$ 和 $t=-1$ 代入 $(1+t)^N$（或其導數（derivative)），再相加或相減求得，因為這樣奇數下標的項會互相抵消。最後一部分則比較因式分解(factorisation)兩邊最高的幾個係數。

解答

全文中記 $c=\cos\theta$ 及 $s=\sin\theta$。

第 (i) 部分

由棣美弗定理（de Moivre's theorem）及二項式定理（binomial theorem），

$$\cos\big((2n+1)\theta\big)+\mathrm{i}\sin\big((2n+1)\theta\big)=(c+\mathrm{i}s)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}c^{2n+1-k}(\mathrm{i}s)^k.$$

由於 c 和 s 是實數，實數項恰好是 k 為偶數的那些項，設 $k=2r$，其中 $0\le r\le n$，此時 $(\mathrm{i}s)^{2r}=(-1)^r s^{2r}=(-s^2)^r=(c^2-1)^r$。取實部，得

$$\cos\big((2n+1)\theta\big)=\sum_{r=0}^{n}\binom{2n+1}{2r}\cos^{2n+1-2r}\theta\,(\cos^2\theta-1)^r,$$

即為所求。

第 (ii) 部分

由第 (i) 部分可知，對每個 $x = \cos\theta \in [-1,1]$，都有

$$\mathrm{p}(x) = 1 + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r} x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$$

兩邊都是多項式（polynomial），且在無限多個點上相等，所以它們是同一個多項式。

第 r 項的次數是 $(2n+1-2r)+2r = 2n+1$，首項係數（leading coefficient）為 $\binom{2n+1}{2r}$，而常數 1 不影響 x^{2n+1}。所以 p 中 x^{2n+1} 的係數是

$$S_0 = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r},$$

即偶數下標二項式係數之和。把 $t=1$ 和 $t=-1$ 代入 $(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$，得

$$2^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k}, \qquad 0 = \sum_k (-1)^k \binom{2n+1}{k}.$$

兩式相加，k 為奇數的項互相抵消，k 為偶數的項則加倍：$2S_0 = 2^{2n+1}$。因此 $\mathrm{p}(x)$ 中 x^{2n+1} 的係數是 $S_0 = 2^{2n}$。

第 (iii) 部分

在第 r 項 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$ 中，要得到 x^{2n-1}，需要取 $(x^2-1)^r$ 的 x^{2r-2} 項。該項是 $\binom{r}{1}(x^2)^{r-1}(-1) = -rx^{2r-2}$（當 $r=0$ 時此項不存在，與 $-r=0$ 一致）。由於 $n \geq 1$，有 $2n-1 \geq 1$，所以 p 中的常數 1 不起作用。因此 x^{2n-1} 的係數是

$$-\sum_{r=0}^{n} r \binom{2n+1}{2r}.$$

想一想 當每個偶數下標項都以 r 加權時，怎樣才能把它們挑出來？

微分會把下標作為因子拉下來。由 $(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$，得

$$(2n+1)(1+t)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} k \binom{2n+1}{k} t^{k-1}.$$

在 $t=1$ 時，得 $\sum_k k\binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n}$。在 $t=-1$ 時，左邊為 0（因為 $2n \geq 1$），所以

$$0 = \sum_k (-1)^{k-1} k \binom{2n+1}{k} = \sum_{k\text{ 奇數}} k \binom{2n+1}{k} - \sum_{k\text{ 偶數}} k \binom{2n+1}{k}.$$

所以 k 為偶數和 k 為奇數的兩部分相等，各佔總和的一半：

$$\sum_{k\text{ 偶數}} k \binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n-1}.$$

令 $k=2r$，這即是 $\sum_r 2r\binom{2n+1}{2r}=(2n+1)2^{2n-1}$，亦即 $\sum_r r\binom{2n+1}{2r}=(2n+1)2^{2n-2}$。因此 $\mathrm{p}(x)$ 中 x^{2n-1} 的係數是 $-(2n+1)2^{2n-2}$，即為所求。

第 (iv) 部分

首項係數。由 (ii)，p 的次數是 $2n+1$，首項係數為 2^{2n}。若 q 的次數是 m、首項係數是 a，則 $(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$ 的次數是 $2m+1$，首項係數是 a^2。所以 $m=n$ 及 $a^2=2^{2n}$，又因 $a>0$，q 中 x^n 的係數是 2^n。

關於 p 的另一個事實。每一項 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$ 都只含 x 的奇次冪，因為 $x^{2n+1-2r}$ 是奇次冪，而 $(x^2-1)^r$ 只有偶次冪。p 中唯一的偶次冪是常數 1。由於 $2n\geq 2$，p 中 x^{2n} 的係數是 0。

比較係數。現設 $n\geq 2$，並寫

$$\mathrm{q}(x)=2^n x^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots,$$

於是

$$[\mathrm{q}(x)]^2=2^{2n}x^{2n}+2^{n+1}b\,x^{2n-1}+\left(b^2+2^{n+1}c\right)x^{2n-2}+\cdots.$$

乘以 $x+1$ 後，$(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$ 中 x^{2n} 和 x^{2n-1} 的係數分別是

$$2^{n+1}b+2^{2n}\qquad 及\qquad \left(b^2+2^{n+1}c\right)+2^{n+1}b.$$

p 中 x^{2n} 的係數是 0，所以 $b=-2^{2n}/2^{n+1}=-2^{n-1}$。於是 $b^2=2^{2n-2}$ 及 $2^{n+1}b=-2^{2n}$，再把 x^{2n-1} 的係數與第 (iii) 部分的結果比較，得

$$2^{2n-2}+2^{n+1}c-2^{2n}=-(2n+1)2^{2n-2}.$$

整理得

$$2^{n+1}c=2^{2n-2}\big(-(2n+1)-1+4\big)=2^{2n-2}(2-2n)=2^{2n-1}(1-n),$$

所以 q 中 x^{n-2} 的係數是

$$c=2^{n-2}(1-n),$$

即為所求。

驗算

- 當 $n=1$：$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，所以 $\mathrm{p}(x)=4x^3-3x+1=(x+1)(2x-1)^2$。首項係數是 2^2，x 的係數是 $-3=-3\cdot 2^0$，而 q 的首項係數是 2^1。
- 當 $n=2$：$\mathrm{p}(x)=16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)(4x^2-2x-1)^2$。$x^3$ 的係數是 $-20=-5\cdot 2^2$，而 q 的常數項是 $-1=2^0(1-2)$。

- 當 $n = 3$，我們求得 $\mathrm{q}(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$，其中 x 的係數等於 $-4 = 2^1(1 - 3)$。我們亦用電腦驗證過：對 $n = 1, \ldots, 12$，精確展開 $\cos\big((2n+1)\theta\big) + 1$，再求 $\mathrm{p}(x)/(x+1)$ 的平方根，每條係數公式都成立。

常見錯誤

- 忘記 p 的 x^{2n} 係數。它是 0，而正是這一點確定了 q 的 x^{n-1} 係數 b，要求 c 必須先知道它。
- 寫成 $(\mathrm{i}s)^{2r} = s^{2r}$，漏掉了符號 $(-1)^r$。正是這個符號令結果是 $\cos^2\theta - 1$ 而不是 $1 - \cos^2\theta$。
- 在 (iii) 中只把 $t = 1$ 代入導數，這樣得到的是對所有 k 的和，而不只是偶數項的和。

STEP 之外

滿足 $T_N(\cos\theta) = \cos N\theta$ 的多項式 T_N 就是 N 次的切比雪夫多項式（Chebyshev polynomial），而第 (ii) 和 (iii) 部分求出了它最高的兩個係數。(iv) 中的因式分解反映了一個事實：$T_{2n+1}(x) + 1$ 在 $x = -1$ 處有一個單根（simple root），而在其他每個使 $\cos\big((2n+1)\theta\big) = -1$ 的點處都有一個重根（double root）。切比雪夫多項式在逼近理論（approximation theory）中處於核心地位：在所有 N 次首一多項式（monic polynomial）之中，$2^{1-N}T_N$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大絕對值最小。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）有更多同類題目。

詳細解答

STEP III 2023，第 5 題

純數學 • 數論

STEP III 2023，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

每一部分都把一條整數方程化為一個乘積（product），令它等於一個我們完全清楚其因數（factor）的數：先是 49，然後是 pq，再然後是 $3p^2q$。一旦方程的一邊是兩個整數的乘積，每個因數的大小（哪一個較大、哪一個小於 p）就能把可能情況縮減至一兩種。在第 (iii) 部分，我們能控制的因數是 $p+q-n$，而題目要求證明的不等式（inequality），正正就是阻止它與 p 或 q 有公因數的條件。

解答

第 (i) 部分

兩邊乘以 $7xy$（兩者皆非零），得

$$7y+14x=2xy \quad \Longleftrightarrow \quad 2xy-14x-7y=0.$$

由於 $(2x-7)(y-7)=2xy-14x-7y+49$，兩邊加上 49 便得 $(2x-7)(y-7)=49$，此即所求。

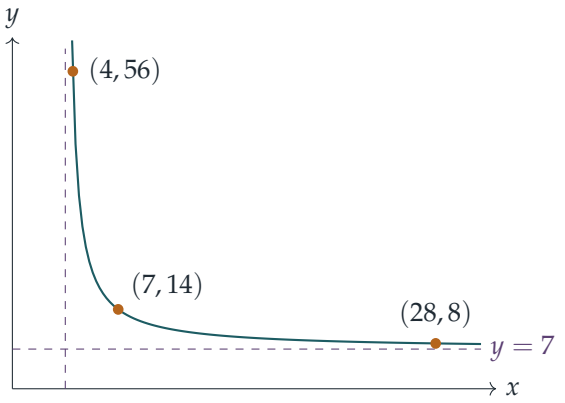
現設 x 和 y 為正整數。那麼 $2x-7$ 和 $y-7$ 是乘積為 49 的整數，所以它們是 49 的一組因數對（factor pair）：

$$(2x-7,\ y-7)\in\{(1,49),\,(7,7),\,(49,1),\,(-1,-49),\,(-7,-7),\,(-49,-1)\}.$$

正數條件排除了負數的因數對：$x\geq 1$ 迫使 $2x-7\geq -5$，而 $y\geq 1$ 迫使 $y-7\geq -6$，所以兩個因數都不可能是 -7 或 -49，而每一組負數因數對都含有其中之一。正數的因數對給出

$$(x,y)=(4,56),\quad (7,14),\quad (28,8),$$

而每一組都確實滿足原方程，例如 $\frac{1}{4}+\frac{2}{56}=\frac{7}{28}+\frac{1}{28}=\frac{2}{7}$。



這條曲線是一條直角雙曲線（rectangular hyperbola），漸近線（asymptote）為 $x=\frac{7}{2}$ 和 $y=7$；三個解就是它正分支上的格點（lattice point）。

第 (ii) 部分

展開得 $(p+q)^2=p^2+2pq+q^2=n^2+pq$，所以

$$(p+q+n)(p+q-n)=(p+q)^2-n^2=pq.$$

右方為正數，而 $p+q+n>0$，所以 $p+q-n$ 是一個正整數。pq 的正因數是 $1,p,q,pq$（若 $p=q$ 則只有 $1,p,p^2$），而 $p+q+n$ 是其中之一。但 $n>0$ 表示 $p+q+n>p$ 及 $p+q+n>q$，所以 $p+q+n$ 既不是 p 也不是 q；剩下的因數只有 pq。因此 $p+q+n=pq$，而另一個因數（co-factor）是

$$p+q-n=1, \qquad \text{即} \qquad p+q=n+1.$$

把 $n=p+q-1$ 代入 $p+q+n=pq$，得 $2p+2q-1=pq$，整理後得

$$pq-2p-2q+4=3 \quad\Longleftrightarrow\quad (p-2)(q-2)=3.$$

質數（prime）滿足 $p-2\geq 0$，所以兩個因數皆非負，而乘積為 3，故 $\{p-2,q-2\}=\{1,3\}$。因此

$$(p,q)=(3,5) \quad \text{或} \quad (5,3),$$

而事實上 $9+15+25=49=7^2$，且 $n=7=3+5-1$。

第 (iii) 部分

這裏 n 是 $p^3+q^3+3pq^2$ 的正實數立方根（cube root）。

不等式。由於 $p,q>0$，

$$n^3=q^3+\left(p^3+3pq^2\right)>q^3,\qquad n^3=p^3+\left(q^3+3pq^2\right)>p^3,$$

而立方函數是嚴格遞增（strictly increasing）的，所以 $n>q$ 及 $n>p$。整理後分別得 $p+q-n<p$ 及 $p+q-n<q$。我們亦需要下界（lower bound）：

$$(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=n^3+3p^2q>n^3,$$

所以 $p+q>n$，即 $p+q-n>0$。

*沒有質數解。*假設 p 和 q 是質數，而 n 是整數。設 $d=p+q-n$，這是一個整數，且

$$0<d<p,\qquad 0<d<q.$$

由上面的展開式，$(p+q)^3-n^3=3p^2q$，再用立方差（difference of cubes）因式分解，

$$d\left((p+q)^2+(p+q)n+n^2\right)=3p^2q,$$

所以 d 整除 $3p^2q$。

想一想 為甚麼 d 不能與 p 或 q 有公因數？

因為 p 是質數，d 與 p 有公因數的唯一可能，是 p 整除 d，而這需要 $d\geq p$。但 $d<p$。同理，$d<q$ 表示 q 不整除 d。所以 d 與 p^2q 互質（coprime），而 $d\mid 3p^2q$ 便迫使 $d\mid 3$。這正是那些不等式的用處。因此 $d=1$ 或 $d=3$。設 $s=p+q$。

*情況 $d=1$。*此時 $n=s-1$，且

$$3p^2q=s^3-(s-1)^3=3s^2-3s+1,$$

這是不可能的：左方是 3 的倍數，而右方除以 3 的餘數是 1。

*情況 $d=3$。*此時 $3=d<p$ 及 $3<q$，所以 p 和 q 都不是 3。這裏 $n=s-3$，且

$$3p^2q=s^3-(s-3)^3=9s^2-27s+27,\qquad \text{所以}\qquad p^2q=3(s^2-3s+3).$$

因此 $3\mid p^2q$，而由於 3 是質數，它整除 p 或 q，使其中一個等於 3。這與 $p,q>3$ 矛盾。

兩種情況都不可能，所以不存在質數 p 和 q 使得 $p^3+q^3+3pq^2$ 是某整數的立方。 ■

驗算

對所有正整數 $x,y<2000$ 進行窮舉搜尋（brute-force search），恰好找到第 (i) 部分的三組解。在所有質數 $p,q<1500$ 之中，p^2+pq+q^2 只在 $\{p,q\}=\{3,5\}$ 時才是完全平方數（perfect square）（得 49），而 $p^3+q^3+3pq^2$ 從來不是完全立方數。隨機抽取的正實數確認了第 (iii) 部分中的 $0<p+q-n<\min(p,q)$。第 (ii) 部分的快速人手驗算：$(3+5+7)(3+5-7)=15\times 1=15=pq$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分忘記 49 的負數因數對。它們在這裏不產生任何解，但必須把它們排除，而不是置之不理。
- 在第 (ii) 部分，未經論證便假設 $p+q-n$ 是較小的因數且為正數：兩者都由 $n>0$ 及 $pq>0$ 推出，而且需要寫明。
- 在第 (iii) 部分，停在 $d \mid 3$。$d=1$ 和 $d=3$ 兩種情況仍然要排除，而第二種情況需要再次用到 $d<p,q$ 這個事實。

STEP 之外

每一部分都用了同一個技巧：把一條丟番圖方程（Diophantine equation）改寫成若干整數的乘積，令它等於一個已知其因數分解的數，然後利用大小和互質性確定各個因數。第 (i) 部分屬於埃及分數（Egyptian fraction）方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ 這一類，而第 (ii) 部分則關於含有一個 120° 角的整數邊三角形，因為 $p^2+pq+q^2=n^2$ 正是該角的餘弦定律（cosine rule）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是這類初等數論（elementary number theory）的一本絕佳入門書。

詳細解答

STEP III 2023，第 6 題

純數學 • 雙曲函數與單調性

STEP III 2023，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

兩個函數(function)都是 $\tan^{-1} x$ 與 $\tanh x$ 的某個倍數之差，所以它們的導數(derivative)都是 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 與 $\operatorname{sech}^2 x$ 的某個倍數之差。因此一切都歸結為比較 $\cosh^2 x$ 與 $1+x^2$：(i) 中的不等式（inequality）決定了 f′ 的正負號；而證明比值 $\cosh^2 x/(1+x^2)$ 是遞增的，就能準確告訴我們它可以等於 $\frac{1}{2}\pi$ 多少次，而這正是 g′ 等於零的地方。

解答

第 (i) 部分

利用 $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1+\cosh 2x)$ 及 $\cosh 2x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x})$，由 e^x 的麥克勞林級數（Maclaurin series）可得（奇次冪互相抵消）

$$\cosh 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots.$$

每一項都是非負的，所以 $\cosh 2x \geq 1 + 2x^2$，因此

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2x) \geq \tfrac{1}{2}(2+2x^2) = 1+x^2,$$

等號只在 $x = 0$ 時成立（當 $x \neq 0$ 時，x^4 項嚴格為正）。

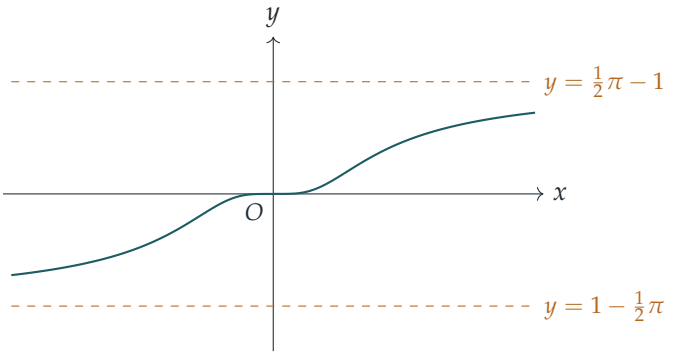
現在求導：

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

由於 $\cosh^2 x \geq 1+x^2 > 0$，取倒數得 $\dfrac{1}{\cosh^2 x} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$，所以對所有 x 都有 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$，等號只在 $x = 0$ 處成立。一個除單一點外導數皆為正的函數是（嚴格）遞增（increasing）的，得證。

草圖。圖像上應標示的一些特徵：

- f 是奇函數（odd function），因為 $\tan^{-1}$ 和 tanh 都是奇函數；而且 $f(0) = 0$。
- $f'(0) = 0$ 但 f 是遞增的，所以原點是一個屬於拐點(point of inflection)的駐點(stationary point)。事實上 $\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$ 而 $\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \cdots$，所以在 0 附近 $f(x) \approx \frac{1}{15}x^5$：圖像在那裏非常平坦。
- 當 $x \to \infty$ 時，$\tan^{-1} x \to \frac{1}{2}\pi$ 而 $\tanh x \to 1$，所以 $f(x) \to \frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.571$，且從下方趨近；由奇性，當 $x \to -\infty$ 時 $f(x) \to 1 - \frac{1}{2}\pi$。



第 (ii)(a) 部分

此時

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2\cosh^2 x},$$

它是連續（continuous）的偶函數（even function）。在 $x = 0$ 處，$g'(0) = 1 - \frac{1}{2}\pi < 0$。在 $x = 2$ 處，

$$g'(2) = \tfrac{1}{5} - \frac{\pi}{2\cosh^2 2},$$

而 $\cosh 2 > \frac{1}{2}e^2 > 3.6$，所以 $\cosh^2 2 > 12.9$ 及 $\dfrac{\pi}{2\cosh^2 2} < \dfrac{1.6}{12.9} < \frac{1}{5}$；因此 $g'(2) > 0$。由介值定理（intermediate value theorem），g' 在 $(0,2)$ 內有一個零點；又因 g' 是偶函數，它在 $(-2,0)$ 內還有另一個零點。所以 g 至少有兩個駐點。

第 (ii)(b) 部分

設 $h(x) = (1+x^2)\sinh x - x\cosh x$。則

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x\sinh x + (1+x^2)\cosh x - \cosh x - x\sinh x \\ &= x\sinh x + x^2\cosh x. \end{aligned}$$

當 $x \geq 0$ 時，$x\sinh x$ 和 $x^2\cosh x$ 都是非負的（當 $x > 0$ 時更是正的），所以 h 在 $[0,\infty)$ 上遞增。由於 $h(0) = 0$，對 $x \geq 0$ 得 $h(x) \geq 0$；事實上，對 $x > 0$ 有 $h(x) > 0$。

第 (ii)(c) 部分

由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh^2 x}{1+x^2}\right) = \frac{2\cosh x \sinh x\,(1+x^2) - 2x\cosh^2 x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\cosh x\, h(x)}{(1+x^2)^2}.$$

當 $x \geq 0$ 時，$\cosh x > 0$，而由 (b) 得 $h(x) \geq 0$，所以導數非負；它只在 $x = 0$ 處為零。因此當 $x \geq 0$ 時，$\cosh^2 x/(1+x^2)$ 是（嚴格）遞增的。

第 (ii)(d) 部分

> **想一想** 關於 $\cosh^2 x/(1+x^2)$ 的命題，怎樣可以用來數出 g' 的零點個數？

將 $\mathrm{g}'(x) = 0$ 兩邊乘以正數 $(1+x^2)\cosh^2 x$，可見

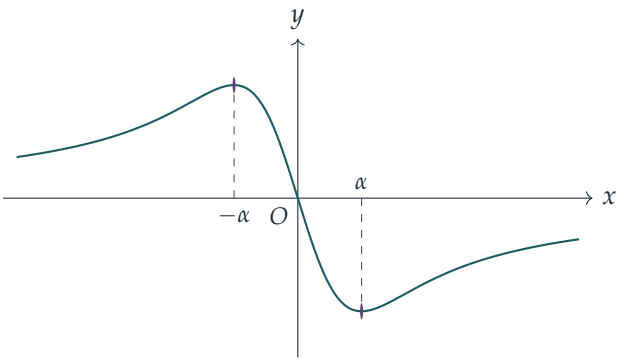
$$\mathrm{g}'(x) = 0 \iff \frac{\cosh^2 x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

記 $R(x) = \cosh^2 x/(1+x^2)$。在 $[0,\infty)$ 上，R 連續，且由 (c) 知其嚴格遞增，又 $R(0) = 1 < \frac{1}{2}\pi$，所以 R 在該區間上最多只取值 $\frac{1}{2}\pi$ 一次；由 (a)，它確實取到此值，取值點為某個 α，其中 $0 < \alpha < 2$。所以 g' 在 $[0,\infty)$ 內恰有一個零點。由於 R 是偶函數，$x < 0$ 時的零點正是 $x > 0$ 時零點的相反數，因此恰好還有一個零點，位於 $-\alpha$。所以 g 恰有兩個駐點，位於 $x = \pm\alpha$（數值上 $\alpha \approx 1.406$）。

第 (ii)(e) 部分

綜合已知事實：

- g 是奇函數，$\mathrm{g}(0) = 0$，且 $\mathrm{g}'(0) = 1 - \frac{1}{2}\pi < 0$。
- 由 (d)，在 $(-\alpha,\alpha)$ 上 $\mathrm{g}' < 0$（因為那裏 $R < \frac{1}{2}\pi$），而當 $|x| > \alpha$ 時 $\mathrm{g}' > 0$。所以在 $x = -\alpha$ 處有局部極大值（local maximum），在 $x = \alpha$ 處有局部極小值（local minimum），且 $\mathrm{g}(\alpha) = -\mathrm{g}(-\alpha) < 0$（約為 -0.44）。
- 當 $x \to \infty$ 時，$\mathrm{g}(x) \to \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi \cdot 1 = 0$。由於 g 在 (α,∞) 上遞增並趨向極限 0，它在那裏保持為負：圖像從下方趨近 x 軸。由奇性，當 $x \to -\infty$ 時 $\mathrm{g}(x) \to 0$，且從上方趨近。
- 所以 g 唯一的零點在原點：當 $x < 0$ 時 $\mathrm{g} > 0$，當 $x > 0$ 時 $\mathrm{g} < 0$。



驗算

- 在 $x = 1$ 處：$\cosh^2 1 \approx 2.381 \geq 2$，與 (i) 一致。
- $f(30) \approx 0.537$，從下方趨近 $\frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.571$；而 $f(0.1) \approx 6.6 \times 10^{-7}$，接近 $\frac{1}{15}(0.1)^5$。
- 數值求解 $\cosh^2 x = \frac{1}{2}\pi(1 + x^2)$ 得 $\alpha \approx 1.406$，正如 (a) 所預測般位於 $(0, 2)$ 內，且 $g(\alpha) \approx -0.440$。在 $[-20, 20]$ 上對 g' 作精細掃描，恰好找到兩次變號；而 $g(20) \approx -0.050$ 是一個很小的負數，與草圖相符。

常見錯誤

- 忘記 $\cosh^2 x \geq 1 + x^2$ 必須反轉為 $\operatorname{sech}^2 x \leq \dfrac{1}{1 + x^2}$；這樣做之所以成立，是因為兩邊都是正數。
- 在 (d) 中只證明了有一個正根，卻忘記利用偶性（或指出 $x = 0$ 不是根）來數出那個負根。
- 畫 g 的草圖時，用了 $y = 0$ 以外的漸近線（asymptote），或在 x 很大時再次穿過坐標軸；(α, ∞) 上的單調性（monotonicity）排除了這種情況。

STEP 之外

(ii) 中的方法（把「$g' = 0$ 有多少個解？」轉化為「一個單調函數取某個值多少次？」）是分析學家數根的基本方法：連續性加上介值定理給出存在性，嚴格單調性則給出唯一性。這些想法會在第一門分析（analysis）課程中得到嚴謹處理；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是觀看這些論證被仔細展開的絕佳之選。

詳細解答

STEP III 2023，第 7 題

純數學 • 積分不等式

> **STEP III 2023，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

連續函數（continuous function）的平方的積分永不為負，而且只有當該函數恆等於零（identically zero）時，積分才等於零。每一部分都給我們一條涉及 $\int(\text{某式})^2$ 的等式，稍作整理後，就會變成「一個完全平方的積分等於零」。第 (i) 部分為第 (ii) 部分提供工具，第 (iii) 部分由分部積分（integration by parts）擔當同樣角色，而在第 (iv) 部分，我們要自己透過配方（completing the square）把平方找出來。

解答

第 (i) 部分

在左邊的積分中代入 $x = u^2$，於是 $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$。當 x 由 0 變到 1 時，$u \geq 0$ 同樣由 0 變到 1，而且 $\sqrt{x} = u$。因此

$$\int_0^1 \mathrm{f}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{f}(u)\,2u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^1 x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x,$$

最後一步只是把啞變量（dummy variable）改名。這正是所求的結果。

第 (ii) 部分

在第 (i) 部分中取 $\mathrm{f} = \mathrm{g}$，已知條件就變成

$$\int_0^1 \big(\mathrm{g}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

現在展開目標積分，並利用 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big(\mathrm{g}(x)-x\big)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \big(\mathrm{g}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0,\end{aligned}$$

得證。

想一想 為甚麼積分為零就能迫使 $\mathrm{g}(x)=x$ 處處成立，而不只是「大致上」成立？

設 $\phi(x)=\big(\mathrm{g}(x)-x\big)^2$。它是連續的(因為 g 連續)，而且 $\phi(x)\ge 0$。假設對某個 $c\in[0,1]$ 有 $\phi(c)>0$。由連續性，存在一個包含 c、長度為某正數 δ 的區間 $I\subseteq[0,1]$，在其上 $\phi(x)>\frac{1}{2}\phi(c)$。由於在其他地方 $\phi\ge 0$，

$$\int_0^1 \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\ge\; \int_I \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\ge\; \tfrac{1}{2}\phi(c)\,\delta > 0,$$

這是矛盾。所以對 $0\le x\le 1$ 中的每一個 x，都有 $\phi(x)=0$，即 $\mathrm{g}(x)=x$。(連續性確實重要：一個只在單一點與 x 不同的函數，積分仍然會是零。)

第 (iii) 部分

$2\mathrm{h}(1)-2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x$ 這一項應該令我們想起分部積分。把 $1\cdot\mathrm{h}(x)$ 分部積分，取 x 為 1 的原函數（antiderivative），

$$\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{h}(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{h}(1) - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x.$$

所以 $2\mathrm{h}(1)-2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x$，條件變為

$$\int_0^1 \big(\mathrm{h}'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

這恰好就是第 (ii) 部分的條件（即我們經第 (i) 部分得到的形式），只是以 h' 代替 g。重複同一論證（這需要 h' 連續，正如題目的本意），

$$\int_0^1 \big(\mathrm{h}'(x)-x\big)^2\,\mathrm{d}x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{h}'(x)=x \text{ 對於} 0\le x\le 1.$$

積分得 $\mathrm{h}(x)=\frac{1}{2}x^2+C$，而 $\mathrm{h}(0)=0$ 給出 $C=0$。因此

$$\mathrm{h}(x)=\tfrac{1}{2}x^2.$$

第 (iv) 部分

首先留意 $a\neq 0$，因為條件中含有 $1/a$。對照前面各部分，我們尋找一個形如 $\mathrm{e}^{ax}\big(\mathrm{k}(x)-\mathrm{p}(x)\big)^2$ 的平方，使其交叉項（cross term）為 $-2\mathrm{k}(x)$。展開後交叉項為 $-2\mathrm{e}^{ax}\mathrm{p}(x)\mathrm{k}(x)$，

所以需要 $\mathrm{p}(x)=\mathrm{e}^{-ax}$：

$$\mathrm{e}^{ax}\bigl(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-ax}\bigr)^2=\mathrm{e}^{ax}\bigl(\mathrm{k}(x)\bigr)^2-2\mathrm{k}(x)+\mathrm{e}^{-ax}.$$

在 $[0,1]$ 上積分，前兩項用已知條件，最後一項用 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a}$：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{ax}\bigl(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-ax}\bigr)^2\,\mathrm{d}x&=\frac{\mathrm{e}^{-a}}{a}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{4}+\frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a}\\&=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{4}=-\Bigl(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\Bigr)^2=-\frac{(a-2)^2}{4a^2}.\end{aligned}$$

左邊是一個非負連續函數的積分，所以 ≥ 0；右邊則 ≤ 0。因此兩邊都必須為零，迫使 $(a-2)^2=0$，所以 $a=2$。

當 $a=2$ 時，連續非負函數 $\mathrm{e}^{2x}\bigl(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-2x}\bigr)^2$ 的積分為零，所以按第 (ii) 部分的論證，它在 $[0,1]$ 上處處為零。由於 $\mathrm{e}^{2x}>0$，得

$$\mathrm{k}(x)=\mathrm{e}^{-2x},\qquad 0\leq x\leq 1.$$

驗算

- 第 (i) 部分取 $\mathrm{f}(x)=x$：左邊為 $\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$，右邊為 $2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$。
- 第 (iii) 部分：取 $\mathrm{h}=\frac{1}{2}x^2$，則 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$，而 $2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$。兩者相符。
- 第 (iv) 部分：取 $a=2$ 及 $\mathrm{k}=\mathrm{e}^{-2x}$，左邊為 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2})\approx 0.43233$，右邊為 $(1-\mathrm{e}^{-2})+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$，兩者相同。另外以電腦對隨機的 a 及隨機多項式 k 驗證恆等式「左減右 $=\int \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}-\mathrm{e}^{-ax})^2+(a-2)^2/(4a^2)$」，結果亦相符。

常見錯誤

- 單憑積分為零就斷定 $\mathrm{g}(x)=x$，而沒有用到連續性和非負性：單是積分為零，甚麼也說明不了。
- 在第 (iv) 部分，忘記說明 $a\neq 0$，或在配方之前就嘗試估猜 k。

STEP 之外

$\int_0^1 \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ 這個量的表現就像「向量」f 與 g 的點積（dot product），而 $\int_0^1(\mathrm{g}-x)^2\,\mathrm{d}x$ 則是 g 與 x 之間距離的平方。每一部分都在說「這個距離是零」，而第 (iv) 部分中的權 e^{ax} 則給出一個加權內積（weighted inner product）。這個觀點（內積空間（inner product space），以及範數（norm）為零的連續函數必為零這一事實）是大學一年級線

性代數（linear algebra）和分析（analysis）的核心內容；可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》），以及 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2023，第 8 題

純數學 • 分段微分方程

STEP III 2023，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

絕對值（modulus）令這條方程變成非線性（non-linear），但只是輕微的非線性：在任何一段 y' 保持同一正負號的區間上，$|y'|$ 不過就是 y' 或 $-y'$，方程於是變成一條普通的常係數（constant-coefficient）方程。因此我們沿著解一直走，直到 y' 變為零，然後轉用另一條線性方程，並在接合點令 y 和 y' 相配。第 (iv) 部分是省力的竅門：把解反射（reflection），即 $x \mapsto c - x$，會令一階導數項變號，而這正好就是兩條線性方程之間的切換。

解答

第 (i) 部分

設 $\mathrm{f}(x) = x\mathrm{e}^{-x}$，則

$$\mathrm{f}'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}, \qquad \mathrm{f}''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

因此對每個實數 x，

$$\mathrm{f}'' + 2\mathrm{f}' + \mathrm{f} = \big[(x-2) + 2(1-x) + x\big]\mathrm{e}^{-x} = 0$$

都成立。此外 $\mathrm{f}(0) = 0$ 及 $\mathrm{f}'(0) = 1 \cdot \mathrm{e}^{0} = 1$，符合要求。

由於 $\mathrm{e}^{-x} > 0$，$\mathrm{f}'(x)$ 的正負號與 $1 - x$ 的正負號相同，而當 $x \le 1$ 時，$1 - x$ 為 ≥ 0。所以當 $x \le 1$ 時，$\mathrm{f}'(x) \ge 0$。

第 (ii) 部分

在 $x \le 1$ 上，我們有 $\mathrm{f}' \ge 0$，所以 $|\mathrm{f}'| = \mathrm{f}'$，而 (ii) 的方程與 (i) 的方程相同。於是 f 在 $x \le 1$ 上滿足新方程及其初始條件，故

$$\mathrm{g}_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

在接合點，$\mathrm{g}_1(1) = \mathrm{e}^{-1}$ 及 $\mathrm{g}_1'(1) = 0$。連續可微（continuously differentiable）意味著 g_2 必須以相同的值開始：$\mathrm{g}_2(1) = \mathrm{e}^{-1}$，$\mathrm{g}_2'(1) = 0$。

想一想 緊接 $x = 1$ 之後，y' 取甚麼正負號？

在 $x = 1$ 處，方程給出 $y'' = -2|y'| - y = -\mathrm{e}^{-1} < 0$，所以 y' 在經過 0 時遞減，並在稍為越過 $x = 1$ 之處為負。在那裏 $|y'| = -y'$，方程變成

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0.$$

輔助方程（auxiliary equation）$m^2 - 2m + 1 = 0$ 有重根（repeated root）$m = 1$，所以 $\mathrm{g}_2(x) = (A + Bx)\mathrm{e}^x$ 及 $\mathrm{g}_2'(x) = (A + B + Bx)\mathrm{e}^x$。在 $x = 1$ 處的條件給出

$$(A + B)\mathrm{e} = \mathrm{e}^{-1}, \qquad (A + 2B)\mathrm{e} = 0,$$

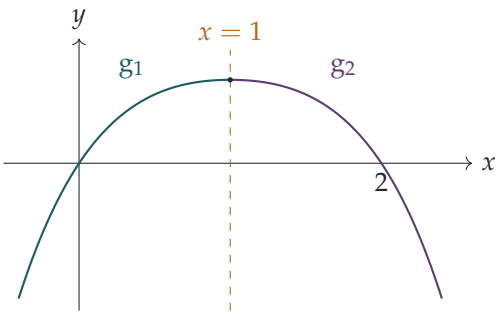
所以 $B = -\mathrm{e}^{-2}$ 及 $A = 2\mathrm{e}^{-2}$。因此

$$\mathrm{g}_2(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{x-2}.$$

我們必須驗證這與假設 $y' \le 0$ 一致：對所有 $x \ge 1$，$\mathrm{g}_2'(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{x-2} \le 0$。所以在整個 $x \ge 1$ 上都有 $|\mathrm{g}_2'| = -\mathrm{g}_2'$，而 g_2 確實在整個 $x \ge 1$ 上滿足這條含絕對值的方程。

第 (iii) 部分

在 g_1 中以 $2 - x$ 代替 x，得到 $(2 - x)\mathrm{e}^{-(2-x)} = (2 - x)\mathrm{e}^{x-2} = \mathrm{g}_2(x)$。所以 $\mathrm{g}_2(x) = \mathrm{g}_1(2 - x)$：曲線 $y = \mathrm{g}_2(x)$ 是 $y = \mathrm{g}_1(x)$ 關於直線 $x = 1$ 的反射。



第 (iv) 部分

設 $Y(x) = \mathrm{k}(c-x)$，並記 $u = c - x$。由鏈式法則（chain rule），配合 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = -1$，

$$Y'(x) = -\mathrm{k}'(u), \qquad Y''(x) = \mathrm{k}''(u).$$

因此

$$Y'' - pY' + qY = \mathrm{k}''(u) + p\,\mathrm{k}'(u) + q\,\mathrm{k}(u),$$

而只要 $r \le u \le s$，右邊便等於零，因為 k 在那裏是原方程的解。而 $r \le c - x \le s$ 等價於

$$c - s \le x \le c - r,$$

所以 $y = \mathrm{k}(c-x)$ 在區間 $[c-s, c-r]$ 上滿足 $y'' - py' + qy = 0$。

這解釋了 (iii)：取 $p = 2$、$q = 1$、在 $(-\infty, 1]$ 上 $\mathrm{k} = \mathrm{g}_1$ 及 $c = 2$，反射後的函數 $\mathrm{g}_1(2-x)$ 在 $[1, \infty)$ 上是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解。

第 (v) 部分

設 $\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$，則

$$\mathrm{h}'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

所以 $\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}\cos\frac{1}{2}\pi = 0$。（第二種形式亦顯示，如題目所給，在 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 上 $\mathrm{h}' \ge 0$，以及 $\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$，這一點稍後會用到。）

計劃與第 (ii) 部分如出一轍。在 $y' \le 0$ 的區間上，方程是 $y'' - 2y' + 2y = 0$；在 $y' \ge 0$ 之處，方程是 $y'' + 2y' + 2y = 0$，而 h 滿足這條方程。

(a) 在 $x = \frac{1}{4}\pi$ 處，我們有 $y = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\pi/4} > 0$ 及 $y' = 0$，所以 $y'' = -2y < 0$，而 y' 轉為負。因此我們需要 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的一個解，而取 $p = q = 2$ 的第 (iv) 部分正好提供了一個：$y = \mathrm{h}(c-x)$ 在 $c - \frac{1}{4}\pi \le x \le c + \frac{3}{4}\pi$ 上成立。選取 $c = \frac{1}{2}\pi$，這個區間就恰好是 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$，並且

$$y = \mathrm{h}\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

? **想一想** 我們怎樣知道這是那個正確的解，而不只是某一個解？

它在接合點相配：$\mathrm{h}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi) = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$，而它的導數 $-\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x)$ 在 $x = \frac{1}{4}\pi$ 處等於 $-\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = 0$。所以 y 和 y' 在那裏連續。它亦是自洽的：對 $x \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$，我們有 $\frac{1}{2}\pi - x \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$，而在那裏 $\mathrm{h}' \ge 0$，所以 $y' = -\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x) \le 0$，並且處處 $|y'| = -y'$。由於一條線性方程在某點給定 y 和 y' 後只有一個解，這就是解的延續。所以在 $\frac{1}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$ 上，

$$y = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

(b) 在 $x = \frac{5}{4}\pi$ 處：$y = \mathrm{e}^{3\pi/4}\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} < 0$，以及 $y' = -\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$。此時 $y'' = -2y > 0$，所以 y' 轉為正，方程變回 $y'' + 2y' + 2y = 0$。

這條方程是常係數的，所以把解平移後仍然是解。由於 $\sin(x - 2\pi) = \sin x$，函數 $\mathrm{h}(x - 2\pi) = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x$ 是它的解；而在 $[\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi]$ 上，它的自變量 $x - 2\pi$ 取遍 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$，在那裏 $\mathrm{h}' \geq 0$，所以它與 $y' \geq 0$ 一致。驗證在 $x = \frac{5}{4}\pi$ 處的接合：

$$\mathrm{e}^{2\pi - 5\pi/4}\sin\tfrac{5}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}, \qquad \mathrm{h}'(\tfrac{5}{4}\pi - 2\pi) = \mathrm{h}'(-\tfrac{3}{4}\pi) = 0,$$

兩者都相配。所以在 $\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{9}{4}\pi$ 上，

$$y = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x.$$

在 $x = \frac{9}{4}\pi$ 處，這等於 $\mathrm{e}^{-\pi/4}\sin\frac{1}{4}\pi = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$，且導數為零：解回到了它在 $\frac{1}{4}\pi$ 處的狀態，所以對 $x \geq \frac{1}{4}\pi$，解是週期（periodic）為 2π 的週期函數。

驗算

- 各段按構造是光滑地接合的，但直接看一看也是值得的：在 $x = \frac{5}{4}\pi$ 處，(a) 和 (b) 都給出 $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} \approx -7.4605$，斜率為零。
- 從 $y(0) = 0$、$y'(0) = 1$ 開始，以數值方法逐步推進這些含絕對值的方程，可在 $[0, 4]$ 上重現 $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2$，並在 $[0, \frac{9}{4}\pi]$ 上重現 (v) 的三段，誤差在 10^{-9} 以內。
- 直接對 (a) 求導：$y' = \mathrm{e}^{x-\pi/2}(\cos x - \sin x)$，$y'' = -2\mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin x$，而 $y'' - 2y' + 2y = 0$，符合要求。

常見錯誤

- 過了轉向點（turning point）後仍然保留 $|y'| = y'$：在 $x = 1$ 之後，f 本身並不是解。
- 忘記驗證新的一段在整個區間上都令 y' 保持所假設的正負號。
- 在 (iv) 中把區間寫成 $[r, s]$；反射會把它映射到 $[c - s, c - r]$。

STEP 之外

像這樣的方程，其右邊除了在一個切換曲面（這裏是 $y' = 0$）兩側之外都是光滑的，稱為分段光滑系統（piecewise-smooth systems）或切換系統（switching systems）；解是由線性的片段黏合而成的，而由於 $|y'|$ 是利普希茨（Lipschitz）連續的，存在性與唯一性（existence and uniqueness）仍然可由皮卡－林德洛夫定理（Picard–Lindelöf theorem）得出。(v) 中的 2π 週期性是線性阻尼方程永遠不可能產生的：取 $E = \frac{1}{2}y'^2 + y^2$，我們

得到 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x = -2y'|y'|$，所以這個「阻尼」項在 y 上升時移走能量，在 y 下降時又把能量歸還。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵蓋線性理論及唯一性。

詳細解答

STEP III 2023，第 9 題

力學 • 以繩連接的兩質點運動

STEP III 2023，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

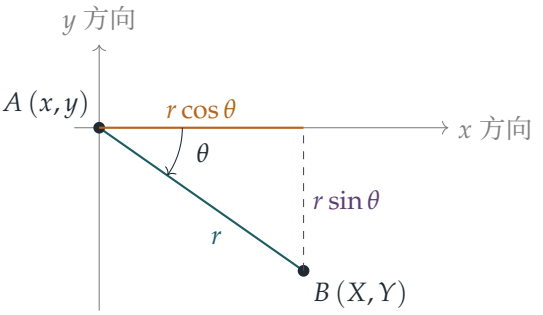
用 A 的位置和繩子的方向 θ 來描述整個系統。張力（tension）只沿繩子方向作用，所以每個質點的加速度在垂直於繩子的方向上都沒有分量。比較兩個質點的垂直加速度，便可推出 $\ddot{\theta} = 0$：繩子以恆定的速率轉動。之後再用動量守恆（conservation of momentum）就能完成解題。

解答

全題中，兩個質點在光滑水平面上運動，繩子輕而不可伸長（inextensible），而且（按題意可假設）繩子一直保持拉緊，所以任何時刻都有 $AB = r$。

第 (i) 部分

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的長度是 r。由於 θ 是從正 x 軸順時針量度的，當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時，這個向量指向 x 方向的下方，如圖所示。



從 A 走到 B，我們在 x 方向移動 $r\cos\theta$，在 y 的負方向移動 $r\sin\theta$，所以

$$X = x + r\cos\theta, \qquad Y = y - r\sin\theta.$$

這兩條式子對所有 θ 都成立，因為 $(\cos\theta, -\sin\theta)$ 正是從 x 軸順時針轉 θ 角的單位向量（unit vector）。

第 (ii) 部分

對 t 求導（r 是常數，θ 是 t 的函數）：

$$\dot{X} = \dot{x} - r\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{Y} = \dot{y} - r\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$\ddot{X} = \ddot{x} - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta, \qquad \ddot{Y} = \ddot{y} - r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta.$$

第 (iii) 部分

張力 T 沿單位向量 $(\cos\theta, -\sin\theta)$ 把 A 拉向 B，又沿 $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 把 B 拉向 A。根據牛頓第二定律（Newton's second law），

$$m\ddot{x} = T\cos\theta, \quad m\ddot{y} = -T\sin\theta, \qquad M\ddot{X} = -T\cos\theta, \quad M\ddot{Y} = T\sin\theta.$$

因此

$$m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) = T\cos\theta\sin\theta - T\sin\theta\cos\theta = 0,$$

用完全相同的方法可得 $M(\ddot{X}\sin\theta + \ddot{Y}\cos\theta) = 0$。分別除以 m 和 M，便得到所要求的兩個結果。（從幾何角度看：$(\sin\theta, \cos\theta)$ 垂直於繩子，而兩個質點在這個方向上都沒有加速度。）

> ? **想一想** 我們有兩條方程，都是說「沒有垂直方向的加速度」。它們怎樣告訴我們關於 θ 的資訊？

把第二條減去第一條，再把第 (ii) 部分中 $\ddot{X} - \ddot{x}$ 和 $\ddot{Y} - \ddot{y}$ 的表達式代入：

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{X} - \ddot{x})\sin\theta + (\ddot{Y} - \ddot{y})\cos\theta \\ &= \left(-r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\sin\theta + \left(-r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\cos\theta \\ &= -r\ddot{\theta}\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = -r\ddot{\theta}. \end{aligned}$$

由於 $r \neq 0$，所以 $\ddot{\theta} = 0$，即 $\dot{\theta}$ 是常數。

要求出這個常數，可用初始條件。在 $t = 0$ 時，B 相對於 A 位於 $(r, 0)$，所以 $\theta(0) = 0$。此外 $\dot{y}(0) = u$ 而 $\dot{Y}(0) = 0$，於是第 (ii) 部分中 $\dot{Y}$ 的表達式給出

$$0 = u - r\dot{\theta}(0)\cos 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta}(0) = \frac{u}{r}.$$

（$\dot{X}$ 的方程與此一致：$0 = 0 - r\dot{\theta}(0)\sin 0$。）所以對所有 t 都有 $\dot{\theta} = u/r$；利用 $\theta(0) = 0$ 積分，得

$$\theta = \frac{ut}{r},$$

此即所求。

第 (iv) 部分

把第 (iii) 部分的運動方程兩兩相加，

$$m\ddot{x} + M\ddot{X} = T\cos\theta - T\cos\theta = 0, \qquad m\ddot{y} + M\ddot{Y} = -T\sin\theta + T\sin\theta = 0.$$

這就是動量守恆：張力是系統的內力。把第二條方程積分一次，可知 $m\dot{y} + M\dot{Y}$ 是常數，等於其初始值 $mu + M\cdot 0 = mu$。再積分一次，並利用 $y(0) = Y(0) = 0$，得

$$my + MY = mut.$$

第 (v) 部分

代入第 (i) 部分的 $Y = y - r\sin\theta$ 和第 (iii) 部分的 $\theta = ut/r$：

$$my + M\Big(y - r\sin\frac{ut}{r}\Big) = mut \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{1}{m+M}\Big(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\Big),$$

此即所求結果。

第 (vi) 部分

把第 (v) 部分的結果求導，

$$\dot{y} = \frac{1}{m+M}\Big(mu + Mu\cos\frac{ut}{r}\Big) = \frac{u}{m+M}\Big(m + M\cos\frac{ut}{r}\Big).$$

在時刻 $t = \pi r/u$，即繩子轉了半圈時，$\cos(ut/r) = -1$，而

$$\dot{y} = \frac{u(m-M)}{m+M},$$

當 $M > m$ 時這是負數（因為 $u > 0$）。所以在那一刻，A 的速度的 y 分量是負的；由連續性（continuity）可知，在該時刻附近的一段時間區間內亦然。

驗算

- 在 $t = 0$ 時，由第 (v) 部分的公式得 $\dot{y} = u(m+M)/(m+M) = u$，與 A 的初速度相符。

- 在 x 方向用同樣方法可得 $mx + MX = Mr$，所以 $x = \dfrac{Mr}{m+M}(1-\cos\theta)$。結合第 (v) 部分，質心（centre of mass）在 y 方向以速率 $mu/(m+M)$ 作直線運動，而兩個質點以角速度（angular speed）u/r 繞質心轉動，這正是我們熟悉的圖像。於是張力是常數 $\dfrac{mM}{m+M}\dfrac{u^2}{r} > 0$，所以繩子確實一直保持拉緊。
- 若 $M \to \infty$，B 保持不動，第 (v) 部分給出 $y = r\sin(ut/r)$：A 繞 B 作半徑為 r 的圓周運動，理應如此。
- 取 $m = 1$、$M = 3$、$u = r = 1$，用電腦模擬兩個以極硬彈簧相連的質點，在 $t = \pi$ 時得到 $y \approx 0.7854$ 和 $\dot{y} \approx -0.5000$，與 $\frac{\pi}{4}$ 及 $\frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$ 吻合。

常見錯誤

- 因順時針的約定而弄錯正負號：$Y = y - r\sin\theta$，所以 $\dot{Y}$ 中的項是 $-r\dot{\theta}\cos\theta$，而不是 $+$。
- 忘記交代常數 u/r 的來由：它來自 $\dot{Y}(0) = 0$，而不單單來自 A 的速率。
- 在第 (vi) 部分中只聲稱 $\dot{y} < 0$「最終」會成立，卻沒有給出具體時刻；$t = \pi r/u$ 便是一個確定的時刻。

STEP 之外

這是二體問題（two-body problem）最簡單的形式：運動分解為質心的勻速運動，加上相對於質心的運動，而後者由約化質量（reduced mass）$mM/(m+M)$ 支配。同樣的分解方法是行星軌道和雙原子分子（diatomic molecule）振動的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）仔細地發展了質心坐標和約化質量的理論。

詳細解答

STEP III 2023，第 10 題

力學 • 樑的平衡

STEP III 2023，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

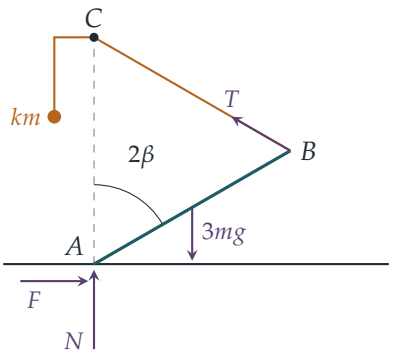
www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

滑輪（pulley）恰好位於 A 正上方一條橫樑長度之處，因此 A、B、C 組成一個等腰三角形（isosceles triangle），其中 $AB = AC = 2h$。這個幾何關係讓我們不費吹灰之力便得到繩子的方向，以及繩子與 A 的垂直距離。之後，一切都按處理平衡（equilibrium）中的桿的慣常步驟進行：對 A 取力矩（moments）（這樣便同時消去兩個未知的接觸力），分解（resolve）各力，再加上條件 $F \leq \mu N$。

解答

我們把橫樑視為均勻桿（uniform rod），兩個質點（particle）視為點質量，繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible），並跨過一個光滑（smooth）滑輪，因此整條繩的張力（tension）相同。由於懸掛的質點處於平衡，張力為 $T = kmg$。



設 A 為原點，x 軸水平（指向 B 所在的一側），y 軸鉛垂向上。於是 $C = (0, 2h)$，而

$B = 2h(\sin 2\beta, \cos 2\beta)$。

繩子的方向。由 B 指向 C 的向量（vector）為

$$2h\big(-\sin 2\beta,\ 1-\cos 2\beta\big) = 4h\sin\beta\,(-\cos\beta,\ \sin\beta),$$

這裏用了 $1-\cos 2\beta = 2\sin^2\beta$。因此，作用於橫樑的張力有沿 $-x$ 方向（即指回直線 AC）的水平分量 $T\cos\beta$，以及向上的鉛垂分量 $T\sin\beta$。從幾何角度看：在等腰三角形 ABC 中，兩個底角均為 $90^\circ - \beta$，所以 BC 與水平線所成的角為 β。

力臂（*moment arm*）。由 A 到 BC 的垂線平分等腰三角形的頂角 2β，所以其長度為 $2h\cos\beta$。

第 (i) 部分

對 A 取力矩。重量 $3mg$ 作用於 AB 的中點，與 A 的水平距離為 $h\sin 2\beta$。令它與張力的力矩相等：

$$kmg\cdot 2h\cos\beta = 3mg\cdot h\sin 2\beta = 6mgh\sin\beta\cos\beta.$$

由於 $0 < 2\beta < 180^\circ$，故 $\cos\beta \neq 0$，可以兩邊除以它：

$$\boxed{k = 3\sin\beta.}$$

（這與 $k < 3$ 一致。）

分解各力。鉛垂方向：$N + T\sin\beta = 3mg$，所以

$$N = 3mg - 3mg\sin^2\beta = 3mg\cos^2\beta.$$

水平方向：摩擦力（friction）必須抵消繩子的水平拉力，因此它沿 $+x$ 方向作用，且

$$F = T\cos\beta = 3mg\sin\beta\cos\beta.$$

故 $F/N = \tan\beta$。

摩擦條件。平衡要求 $F \le \mu N$，即 $\tan\beta \le \mu$。而

$$k^2 = 9\sin^2\beta = \frac{9\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}.$$

函數（function）$t \mapsto \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$ 在 $t \ge 0$ 時遞增，且 $0 \le \tan^2\beta \le \mu^2$，所以

$$k^2 \le \frac{9\mu^2}{\mu^2+1},$$

此即所求。

第 (ii) 部分

現在 $T = 2mg$，而附加的質量為 m 的質點與 A 的水平距離為 $xh\sin 2\beta$。繩子的幾何關係不變。

對 A 取力矩：

$$2mg \cdot 2h\cos\beta = 3mg\,h\sin 2\beta + mg\,xh\sin 2\beta = 2mgh(3+x)\sin\beta\cos\beta,$$

兩邊除以 $2mgh\cos\beta \neq 0$，得

$$\sin\beta = \frac{2}{3+x}.$$

當 $0 \le x \le 2$ 時，此值介乎 $\frac{2}{5}$ 與 $\frac{2}{3}$ 之間，所以這樣的 β 存在。

分解各力：

$$N = 4mg - 2mg\sin\beta, \qquad F = 2mg\cos\beta,$$

所以

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{4\cos^2\beta}{(4-2\sin\beta)^2} = \frac{\cos^2\beta}{(2-\sin\beta)^2}.$$

代入 $\sin\beta = 2/(3+x)$：

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{4}{(3+x)^2} = \frac{(3+x-2)(3+x+2)}{(3+x)^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(3+x)^2},$$

$$2-\sin\beta = \frac{2(3+x)-2}{3+x} = \frac{2(x+2)}{3+x}.$$

$(3+x)^2$ 的因子互相消去，剩下

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{4(x+2)^2} = \frac{x^2+6x+5}{4(x+2)^2},$$

此即所求結果。

> **想一想** 怎樣把「無論 x 取何值」轉化為關於 μ 的條件？

對每個 x，我們都需要 $F \le \mu N$，即 $\mu \ge F/N$。要涵蓋所有 $x \in [0,2]$，μ 必須至少等於 F/N 在該區間上的最大值。因此我們要求 F^2/N^2 的最大值。

按照提示，

$$\frac{1}{3} - \frac{F^2}{N^2} = \frac{4(x+2)^2 - 3(x^2+6x+5)}{12(x+2)^2} = \frac{x^2-2x+1}{12(x+2)^2} = \frac{(x-1)^2}{12(x+2)^2} \ge 0,$$

等號當且僅當 $x = 1$ 時成立，而這個值在容許範圍之內。所以對所有 $x \in [0,2]$，$F^2/N^2 \le \frac{1}{3}$，且此界在 $x=1$ 時達到。因此 F/N 的最大值為 $1/\sqrt{3}$，而橫樑對每個 x 都能保持平衡，當且僅當 $\mu \ge 1/\sqrt{3}$。所求的最小值為

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

驗算

- 在第 (i) 部分，試考慮橫樑水平放置的情況，即 $2\beta = 90°$。此時 $B = (2h, 0)$，繩子 BC 與水平成 $45°$，它與 A 的距離為 $\sqrt{2}\,h$。取力矩得 $T\sqrt{2}\,h = 3mgh$，所以 $T = 3mg/\sqrt{2}$，與 $k = 3\sin 45°$ 吻合。此外 $N = F = \frac{3}{2}mg$，所以 $F/N = 1 = \tan 45°$。
- 在第 (ii) 部分取 $x = 0$，公式給出 $5/16$；直接計算則有 $\sin\beta = \frac{2}{3}$、$\cos^2\beta = \frac{5}{9}$、$(2 - \frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9}$，同樣得到 $\frac{5}{16}$。
- 取 $x = 1$：$\sin\beta = \frac{1}{2}$，所以 $\beta = 30°$，橫樑與鉛垂線成 $60°$；$F/N = \cos 30°/(2 - \frac{1}{2}) = 1/\sqrt{3} \approx 0.5774$。以電腦對 x 在 $[0, 2]$ 範圍內的力矩及分解後的力進行驗算，確認了公式及這個最大值。

常見錯誤

- 忘記繩子是沿 BC 拉，而不是鉛垂地拉：滑輪在 C，所以張力有水平分量，而摩擦力要抵抗的正是這個分量。
- 取了 F/N 的最小值（或其在端點的值），而不是它在 $0 \le x \le 2$ 上的最大值。最壞情況出現在區間內部，即 $x = 1$ 處。
- 混淆力臂：重量的力臂是水平距離（$h\sin 2\beta$），而張力的力臂是到 BC 的垂直距離（$2h\cos\beta$）。

STEP 之外

取力矩與分解各力，正是剛體（rigid body）平衡條件的兩半：合力為零，以及合力矩（torque）為零。到了大學，這些條件會寫成向量形式 $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 及 $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$；而第 (ii) 部分那種「對參數取最壞情況」的推理，正好讓你初嘗工程師如何為安全餘量作設計。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以這種向量語言，細緻地發展了靜力學（statics）與力矩的理論。

詳細解答

STEP III 2023，第 11 題

概率與統計 • 條件期望值

STEP III 2023，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

只要把 $k+1=k+1$ 寫開，並把 k 與 $k!$ 約去，開首的級數（series）便分拆成兩個熟悉的指數級數（exponential series）。在第 (i) 部分，D 的分佈（distribution）涉及一個求和，遍及所有可能產生 $D=d$ 的 Y 值；交換二重和（double sum）的求和次序後，內層的和就變成簡單的 $1+2+\cdots+k$，而隨之出現的因子 $\frac{1}{2}(k+1)$ 正好可以用開首的級數處理。第 (ii) 部分則只需以骰子的結果作條件（conditioning）。

解答

級數

當 $k \geq 1$ 時，$\dfrac{k}{k!}=\dfrac{1}{(k-1)!}$，因此把分子拆開，得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k!}x^k &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\\ &= x\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}-1\right)\\ &= xe^x+e^x-1=(x+1)e^x-1,\end{aligned}$$

其中第一個和用了 $j=k-1$。兩個級數對每個實數 x 都收斂（converge），所以這樣拆開是合理的。這就是所求的恆等式。

第 (i)(a) 部分

$D=0$ 當且僅當 $Y=0$（若 $Y=k\geq 1$，骰子顯示的數至少是 1），所以

$$\mathrm{P}(D=0)=\mathrm{P}(Y=0)=\mathrm{e}^{-n}.$$

第 (i)(b) 部分

固定 $d\geq 1$。骰子只有在至少有 d 面時才可能顯示 d，即只有當 $Y=k$ 且 $k\geq d$ 時才可能；而在 $Y=k\geq d$ 的條件下，公正的骰子顯示 d 的概率是 $\frac{1}{k}$。根據全概率定律（law of total probability），

$$\mathrm{P}(D=d)=\sum_{k=d}^{\infty}\mathrm{P}(D=d\mid Y=k)\,\mathrm{P}(Y=k)=\sum_{k=d}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}.$$

按定義，$\mathrm{E}(D)=\sum_{d=0}^{\infty}d\,\mathrm{P}(D=d)$，而 $d=0$ 的項為零，所以

$$\mathrm{E}(D)=\sum_{d=1}^{\infty}\left[d\sum_{k=d}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}\right)\right],$$

正如所求。

> **想一想** 一個外層對 d 求和、內層對 $k\geq d$ 求和的式子，怎樣才能變成外層對 k 求和？

這個二重和遍及所有滿足 $1\leq d\leq k$ 的整數對 (d,k)。每一項 $\dfrac{d}{k}\cdot\dfrac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$ 都是非負的，所以我們可以按任何次序把各項相加，總和不變。改為按 k 而不是按 d 分組：對每個 $k\geq 1$，d 由 1 取到 k。因此

$$\mathrm{E}(D)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}\sum_{d=1}^{k}d\right),$$

這就是所求的第二個形式。

第 (i)(c) 部分

利用 $\sum_{d=1}^{k}d=\frac{1}{2}k(k+1)$，因子 $\frac{1}{k}$ 被約去：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(D)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}\cdot\frac{k(k+1)}{2}=\frac{\mathrm{e}^{-n}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k!}n^k\\&=\frac{\mathrm{e}^{-n}}{2}\Big((n+1)\mathrm{e}^{n}-1\Big)=\tfrac{1}{2}\left(n+1-\mathrm{e}^{-n}\right),\end{aligned}$$

這裏用了開首的恆等式，並取 $x=n$。這就是所求的結果。

第 (ii)(a) 部分

設 K 為 n 面骰子顯示的數，則對 $k = 1, \ldots, n$ 有 $\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n}$；而在 $K = k$ 的條件下，$Z = X_k$，它服從均值為 k 的泊松分佈（Poisson distribution）。所以 $\mathrm{P}(Z = 0 \mid K = k) = \mathrm{e}^{-k}$，再根據全概率定律，

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k}.$$

這是首項為 e^{-1}、公比為 e^{-1} 的幾何級數（geometric series）：

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)}{1 - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{n(\mathrm{e} - 1)},$$

最後一步是把分子和分母同乘以 e。

第 (ii)(b) 部分

再次以骰子的結果作條件，$\mathrm{E}(Z \mid K = k) = \mathrm{E}(X_k) = k$，所以

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(Z \mid K = k)\,\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

與第 (i)(c) 部分比較，

$$\mathrm{E}(Z) - \mathrm{E}(D) = \frac{n+1}{2} - \frac{n+1-\mathrm{e}^{-n}}{2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n} > 0,$$

所以 $\mathrm{E}(Z) > \mathrm{E}(D)$，正如所求。

有趣的是，如果沒有零的情況，兩者便會相等：一顆面數 Y 服從泊松分佈的公正骰子，平均顯示 $\frac{1}{2}(Y+1)$，而它的均值是 $\frac{1}{2}(n+1)$。唯一的損失在於 $Y = 0$ 時得到 $D = 0$，而不是公式 $\frac{1}{2}(Y+1)$ 所給出的 $\frac{1}{2}$；這情況發生的概率是 e^{-n}，恰好令期望值（expectation）少了 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n}$。

驗算

- 取 $x = 0$，開首的恆等式變成 $0 = 1 \cdot 1 - 1$；取 $x = 1$，則得 $\sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{k!} = 2\mathrm{e} - 1 \approx 4.4366$，部分和亦證實了這一點。
- 當 $n = 3$ 時：$\mathrm{E}(D) = \frac{1}{2}(4 - \mathrm{e}^{-3}) \approx 1.9751$，$\mathrm{E}(Z) = 2$，以及 $\mathrm{P}(Z = 0) \approx 0.1843$。以電腦把每個實驗各模擬 200 000 次，得到 1.970、2.002 和 0.185。
- 當 $n = 1$ 時，第 (ii) 部分的骰子必定顯示 1，所以 $\mathrm{P}(Z = 0) = \mathrm{e}^{-1}$；公式給出 $\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{-1}$。

常見錯誤

- 在 (i)(b) 中把內層的和由 $k = 1$ 而不是由 $k = d$ 開始：k 面骰子不可能顯示比 k 大的數。
- 忘記開首恆等式中的 -1，它來自 e^x 中缺少的 $k = 0$ 項；正是它產生了 (i)(c) 中的 e^{-n}。

STEP 之外

兩個部分都是塔性質（tower law）$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(Z \mid K)\big)$ 的實例：在第 (i) 部分，它一行便給出 $\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}\big(\frac{1}{2}(Y+1)\mathbf{1}_{Y\geq 1}\big)$，而我們親手完成的交換求和次序，正是這條定律背後所隱藏的步驟。可以自由重排非負項二重級數的次序，是一條定理（其一般形式為 Tonelli 定理），在大學一年級的分析（analysis）課程中會遇到。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）討論了條件期望（conditional expectation）以及由它建構的複合分佈（compound distributions）。

詳細解答

STEP III 2023，第 12 題

概率與統計 • 組合概率

STEP III 2023，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

雖然同一對襪子的兩隻看起來一樣，但抽出的是從 $2n$ 隻*實際存在*的襪子中均勻隨機（uniformly random）選取的 $2k$ 隻所組成的集合，所以我們為每隻襪子編上標號，然後數集合的個數。這樣一來，一切都歸結為分階段構造一個選法：先選出哪些對是完整出現的，再選出哪些其他的對只貢獻一隻襪子，最後選出每一個這樣的對中取哪一隻。第 (iii) 部分用的是熟悉的技巧 $r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$，它把一個加權和轉化為一個概率（probability）之和。

解答

為襪子編上標號，使全部 $2n$ 隻互不相同。共有 $\binom{2n}{2k}$ 種機會均等的選法，而下面每個概率都等於（有利選法的數目）$/\binom{2n}{2k}$。

第 (i) 部分

一個沒有完整一對的選法，從每一對中最多只含一隻襪子，所以它的 $2k$ 隻襪子來自 $2k$ 個不同的對。要構造這樣的選法，先選出有代表出現的 $2k$ 對，有 $\binom{n}{2k}$ 種方法（因為 $2k \leq n$，這是可行的），然後從每一對的兩隻中選一隻，有 2^{2k} 種方法。每一種這樣的選擇都給出不同的集合，而每個沒有成對的集合都以這種方式產生，所以

$$\mathrm{P}(\text{沒有成對}) = \frac{\binom{n}{2k}\,2^{2k}}{\binom{2n}{2k}}.$$

第 (ii) 部分

固定 r，其中 $0 \le r \le k$。一個恰好有 r 對完整襪子的選法由以下部分組成：

- 整對取出的 r 對（共 $2r$ 隻襪子），以及
- 另外 $2k-2r = 2(k-r)$ 隻襪子，全部來自不同的對（否則成對的數目會多於 r），而且都不來自已用的 r 對。

因此，我們以 $\binom{n}{r}$ 種方法選出 r 個完整的對；從餘下的 $n-r$ 對中，以 $\binom{n-r}{2(k-r)}$ 種方法選出貢獻一隻襪子的 $2(k-r)$ 對；再從這些對中各取一隻，有 $2^{2(k-r)}$ 種方法。同樣地，每個恰好有 r 對的集合都恰好被產生一次，所以

$$\mathrm{P}(X_{n,k} = r) = \frac{\binom{n}{r}\binom{n-r}{2(k-r)}\,2^{2(k-r)}}{\binom{2n}{2k}},$$

此即所求。（當 $r = 0$ 時，這就是第 (i) 部分。）

第 (iii) 部分

設 $1 \le r \le k$。由於

$$r\binom{n}{r} = \frac{r \cdot n!}{r!\,(n-r)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} = n\binom{n-1}{r-1},$$

由第 (ii) 部分得

$$r\,\mathrm{P}(X_{n,k} = r) = \frac{n\binom{n-1}{r-1}\binom{n-r}{2(k-r)}\,2^{2(k-r)}}{\binom{2n}{2k}}.$$

現在把第 (ii) 部分應用於 $n-1$ 對襪子、抽出 $2(k-1)$ 隻、找到 $r-1$ 對的情況。這是容許的，因為由 $2k \le n$ 可推出 $2(k-1) \le n-1$，而且 $0 \le r-1 \le k-1$。由於 $(n-1)-(r-1) = n-r$ 及 $(k-1)-(r-1) = k-r$，

$$\mathrm{P}(X_{n-1,k-1} = r-1) = \frac{\binom{n-1}{r-1}\binom{n-r}{2(k-r)}\,2^{2(k-r)}}{\binom{2n-2}{2k-2}}.$$

兩者的分子除了因子 n 之外完全相同，所以

$$\begin{aligned}\frac{r\,\mathrm{P}(X_{n,k} = r)}{\mathrm{P}(X_{n-1,k-1} = r-1)} &= \frac{n\binom{2n-2}{2k-2}}{\binom{2n}{2k}} = n \cdot \frac{(2n-2)!}{(2k-2)!\,(2n-2k)!} \cdot \frac{(2k)!\,(2n-2k)!}{(2n)!} \\ &= n \cdot \frac{2k(2k-1)}{2n(2n-1)} = \frac{k(2k-1)}{2n-1}.\end{aligned}$$

（上面的除法是安全的：$n-r \ge 2k-r \ge 2(k-r)$，所以這裏每個二項式係數（binomial coefficient）都是正數。）兩邊相乘即得所求結果。

想一想 這個恆等式對求 $\mathrm{E}(X_{n,k})$ 有甚麼幫助？

期望值（expectation）正好是左邊各項之和，而右邊各項加起來是一個完整的概率分佈（probability distribution）。期望值中 $r = 0$ 的一項為零，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_{n,k}) = \sum_{r=1}^{k} r\,\mathrm{P}(X_{n,k} = r) &= \frac{k(2k-1)}{2n-1}\sum_{r=1}^{k}\mathrm{P}(X_{n-1,k-1} = r-1)\\ &= \frac{k(2k-1)}{2n-1}\sum_{s=0}^{k-1}\mathrm{P}(X_{n-1,k-1} = s).\end{aligned}$$

變量 $X_{n-1,k-1}$ 數的是 $2(k-1)$ 隻襪子中的對數，所以它只取值 $0, 1, \ldots, k-1$，因此最後的和等於 1。故此

$$\mathrm{E}(X_{n,k}) = \frac{k(2k-1)}{2n-1}.$$

驗算

- 當 $k = 1$（兩隻襪子）時，答案是 $\frac{1}{2n-1}$：無論先抽到哪一隻，餘下的 $2n-1$ 隻中恰好有一隻是它的配對。
- 用指示變量（indicator variables）可以直接求出平均值：第 i 對完整出現的概率是 $\binom{2n-2}{2k-2}/\binom{2n}{2k} = \frac{2k(2k-1)}{2n(2n-1)}$，乘以 n 對，同樣得到 $\frac{k(2k-1)}{2n-1}$。
- 當 $n = 6$、$k = 3$ 時：第 (i) 部分給出 $\frac{64}{924} = \frac{16}{231}$，而平均值是 $\frac{15}{11}$。以電腦對所有 $n \le 8$ 枚舉全部選法，證實了 (ii) 中的分佈、(iii) 中的恆等式以及平均值。

常見錯誤

- 把同一對的兩隻襪子當作真正相同，然後去數「顏色組合」：這些組合並非機會均等，所以必須對有標號的襪子計數。
- 忘記了因子 $2^{2(k-r)}$，它對應每個單隻出現的對中取哪一隻。
- 在 (iii) 中沒有留意到 $\sum_s \mathrm{P}(X_{n-1,k-1} = s) = 1$，而嘗試硬算這個和。

STEP 之外

第二項驗算用的是期望值的線性性（linearity of expectation）配合指示變量，它無需知道分佈就能求出平均值；即使「第 i 對完整出現」這些事件並不獨立，這方法依然成立。(iii) 中的恆等式是一個尺寸偏倚（size-biasing）關係：以 r 為分佈加權，會得到一個較小問題的平移版本；這個技巧同樣可以求出二項分佈（binomial distribution）和超幾何

分佈（hypergeometric distribution）的平均值。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）全書都採用這類指示變量和故事式證明。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2023 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。