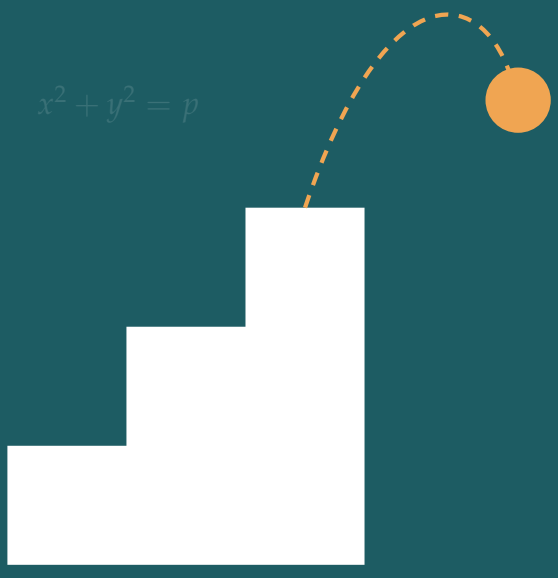
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP II 及 III

2022 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP II 及 III

2022 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2022 年詳細解答

2022 年 STEP 試卷（STEP II 及 III）全部 24 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP II

第 1 題 分部積分法 純數學 . . . 3

第 2 題 遞推關係 純數學 . . . 8

第 3 題 斐波那契級數與小數 純數學 . . . 12

第 4 題 絕對值函數 純數學 . . . 16

第 5 題 三角形中的不等式 純數學 . . . 21

第 6 題 正交軌線 純數學 . . . 25

第 7 題 複係數多項式的根 純數學 . . . 29

第 8 題 矩陣的不變直線 純數學 . . . 33

第 9 題 摩擦力與力矩 力學 . . . 37

第 10 題 鏈面上的拋體 力學 . . . 41

第 11 題 期望損失的最優化 概率與統計 . . . 46

第 12 題 均值、中位數與眾數 概率與統計 . . . 50

STEP III

第 1 題 多項式的根 純數學 . . . 54

第 2 題 無窮遞降法 純數學 . . . 58

第 3 題 隱函數微分法 純數學 . . . 62

第 4 題 無窮乘積 純數學 . . . 66

第 5 題 對稱定積分 純數學 . . . 70

第 6 題 滾動圓與切線 純數學 . . . 74

第 7 題 向量積變換 純數學 . . . 78

第 8 題 康美弗定理與無理性 純數學 . . . 82

第 9 題 碰撞與恢復係數 力學 . . . 86

第 10 題 彈簧的平衡 力學 . . . 90

第 11 題項分佈的平均偏差 概率與統計 94
第 12 題的隨機弦 概率與統計 98

詳細解答

STEP II 2022，第 1 題

純數學 • 分部積分法

> **STEP II 2022，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

每一部分都建基於同一招：分部積分（integration by parts）會產生第二個積分，而這個積分恰好抵消（或幾乎抵消）你手上已有的某一項。在 (i) 和 (ii) 中，這意味着要看出被積函數（integrand）是某個乘積的導數（derivative）。在 (iii) 中，同一招顯示兩個積分之差只不過是 e^x/x 在上下限之間的變化，於是 (a) 的草圖便能完成其餘的工作。

解答

第 (i) 部分

對第一項進行分部積分，取 $u = \sqrt{1+x^3}$ 及 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1$，於是 $v = x$ 及 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$：

$$\begin{aligned}\int 2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= 2x\sqrt{1+x^3} - 2\int x\cdot\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2x\sqrt{1+x^3} - \int \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

最後的積分正是被積函數的第二項，所以把它加上去便會將其抵消：

$$\int\left(2\sqrt{1+x^3} + \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\right)\mathrm{d}x = 2x\sqrt{1+x^3} + c.$$

用乘積法則（product rule）對 $2x\sqrt{1+x^3}$ 求導，會得回 $2\sqrt{1+x^3} + \dfrac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}$，由此印證結果。

第 (ii) 部分

把被積函數拆成 $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{2\sin x}{x^3}$。兩部分各自都沒有初等原函數（elementary antiderivative）（第一部分就是著名的 Si 被積函數），所以它們必須合併處理，正如 (i) 一樣。對第二部分進行分部積分，取 $u = \sin x$ 及 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2x^{-3}$，於是 $v = -x^{-2}$：

$$\int \frac{2\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{x^2} + \int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

接着對 $\dfrac{\cos x}{x^2}$ 進行分部積分，取 $u = \cos x$ 及 $v = -x^{-1}$：

$$\int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 與第一部分互相抵消，剩下

$$\int (x^2+2)\frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} + c = -\frac{\sin x + x\cos x}{x^2} + c.$$

驗證一下：對 $-\dfrac{\sin x}{x^2}$ 求導得 $-\dfrac{\cos x}{x^2} + \dfrac{2\sin x}{x^3}$，對 $-\dfrac{\cos x}{x}$ 求導得 $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\cos x}{x^2}$；$\cos x/x^2$ 項互相抵消，總和正是被積函數。

第 (iii)(a) 部分

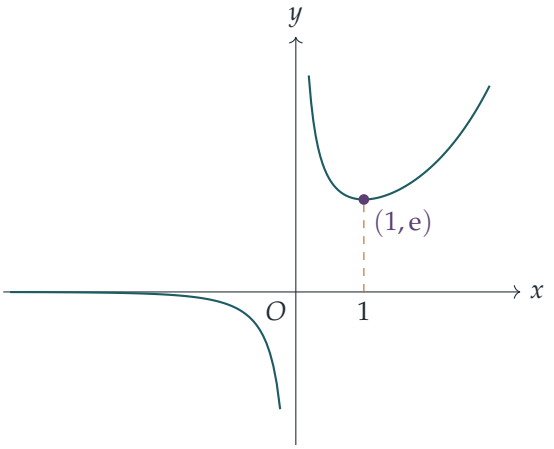
設 $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，定義域為 $x \neq 0$。由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}.$$

它只在 $x = 1$ 時為零，所以唯一的駐點（stationary point）是 $(1, \mathrm{e})$。當 $x < 1$（$x \neq 0$）時導數為負，當 $x > 1$ 時導數為正，所以 $(1, \mathrm{e})$ 是極小點（minimum）。

圖像其餘的形狀：

- 當 $x < 0$ 時，$y < 0$ 且 y 遞減。當 $x \to -\infty$ 時，$y \to 0^-$（指數函數佔上風），所以負 x 軸是一條漸近線（asymptote）。當 $x \to 0^-$ 時，$y \to -\infty$。
- 當 $x > 0$ 時，$y > 0$。當 $x \to 0^+$ 時，$y \to +\infty$；y 下降至 $x = 1$ 處的極小值 e，然後增加至 $+\infty$，增長速度比任何多項式都快。
- y 軸是一條垂直漸近線，而曲線與兩條坐標軸都不相交。



第 (iii)(b) 部分

對 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ 進行分部積分，取 $u=\mathrm{e}^x$ 及 $v=-x^{-1}$：

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^x}{x} + \int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{所以} \qquad \int \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + c.$$

（等價地，$\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$ 正是我們在 (a) 中求得的導數。）

想一想 在 a 與 $2a$ 之間積分，究竟是否合理？

兩個被積函數在 $x=0$ 處都趨向無窮，而在 0 附近 e^x/x^2 的積分發散，所以積分區間必須避開 0。這要求 $a\neq 0$；這樣 a 與 $2a$ 同號，0 永遠不會在兩者之間，積分便是有限的。

兩個積分相等，當且僅當它們的差為零：

$$\left[\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right]_a^{2a} = \frac{\mathrm{e}^{2a}}{2a} - \frac{\mathrm{e}^a}{a} = \frac{\mathrm{e}^a}{2a}\left(\mathrm{e}^a - 2\right) = 0.$$

由於 $\mathrm{e}^a/(2a)\neq 0$，我們需要 $\mathrm{e}^a=2$，所以

$$a = \ln 2.$$

第 (iii)(c) 部分

與 (b) 完全一樣，對於整數 $m\neq n$，兩個積分要是有限的，0 就不能落在 m 與 n 之間的閉區間內，所以 m 和 n 均非零且同號。它們的差是

$$\int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^n}{n} - \frac{\mathrm{e}^m}{m},$$

所以我們需要兩個同號的相異整數，使 $f(x)=\mathrm{e}^x/x$ 在該兩處取相同的值。換句話說，一條水平線必須在兩個整數 x 值處與 (a) 的圖像相交。

想一想 $x > 0$ 部分的曲線並非一一對應（one-to-one），因為它先下降再回升。那麼，為何兩個正整數不能給出相同的高度？

因為轉向點（turning point）位於 $x = 1$，而 1 本身就是最小的正整數。逐一考慮各情況：

- 兩者皆負。由 (a) 可知，f 在 $x < 0$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），所以 $m \neq n$ 推出 $f(m) \neq f(n)$。
- 兩者皆正。這時 $m, n \geq 1$，而當 $x > 1$ 時 $f'(x) > 0$，所以 f 在 $[1, \infty)$ 上嚴格遞增。同樣地，$m \neq n$ 推出 $f(m) \neq f(n)$。

一條水平線可以與正數分支相交兩次，但這時兩個交點之一必定位於 $0 < x < 1$，而該範圍內沒有整數。所以沒有任何一對相異整數符合要求，因此這是不可能的，得證。

驗算

- 對於 (i)，在 $x = 1$ 處原函數的值為 $2\sqrt{2}$，而積分在 $[0, 1]$ 上的數值為 2.8284…，兩者吻合。
- 對於 (ii)，積分在 $[1, 10]$ 上的數值為 1.4711…，與 $-(\sin x + x \cos x)/x^2$ 的變化相同。
- 對於 (iii)(b)，取 $a = \ln 2$ 時兩個積分都約為 1.9224。另請注意 $f(\ln 2) = 2/\ln 2 = f(2 \ln 2)$：兩個積分限位於極小點兩側的同一高度，正如草圖所示必然如此。
- 對於 (iii)(c)，任何兩個整數最接近的情況是 $f(1) = \mathrm{e} \approx 2.718$ 對 $f(2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \approx 3.695$。

常見錯誤

- 在 (b) 和 (c) 中，忘記包含 0 的區間會令積分失去意義，因而看不出為何 m 和 n 必須同號。
- 在 (c) 中，不加限制地斷言「f 是一一對應的」：事實並非如此（例如 $f(\ln 2) = f(2 \ln 2)$）。論證需要用到位於 $x = 1$ 的轉向點。

STEP 之外

第 (i) 和 (ii) 部分是這樣的例子：被積函數的兩部分各自都沒有初等原函數，但它們的和卻有。微分代數（differential algebra）中的劉維爾定理（Liouville's theorem）精確刻

畫了哪些函數具有初等原函數；e^x/x、$\sin x/x$ 和 $\sqrt{1+x^3}$ 都沒有，這正是抵消之所以關鍵的原因。第 (iii)(c) 部分是一個單射性（injectivity）論證，而分析課程會把這類關於單調性（monotonicity）和中值定理（mean value theorem）的推理嚴格化；可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP II 2022，第 2 題

純數學 • 遞推關係

STEP II 2022，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

把關係式兩邊乘以 2，它就變成一個關於二階差分（second differences）的陳述：$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$。在 (i) 中它等於零，所以一階差分（first differences）是常數，數列（sequence）是線性的。在 (ii) 和 (iii) 中，二階差分是一個給定的常數或一個給定的 n 的線性函數，所以技巧是減去一個恰好具有該二階差分的多項式（polynomial），剩下的便是 (i) 中那類數列。

解答

第 (i) 部分

把關係式加倍並移項，對所有 $n \geq 1$ 得

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n.$$

所以每個差分都等於前一個差分，由歸納法（induction）可知每個差分都等於第一個差分 $d = u_2 - u_1$。這就是相鄰兩項之間的固定差。

把 $n - 1$ 個這樣的差分加起來，

$$u_n = u_1 + (n-1)d = dn + (u_1 - d),$$

若 $d \neq 0$，這是 n 的 1 次多項式；若 $d = 0$，則是 0 次多項式（即常數）。無論哪種情況，次數（degree）都不超過 1。

第 (ii) 部分

設 $v_n = t_n + pn^2$。由於

$$\tfrac{1}{2}\big(p(n+2)^2 + pn^2\big) = p(n^2+2n+2) = p(n+1)^2 + p,$$

v_n 的關係式變成

$$t_{n+1} + p(n+1)^2 = \tfrac{1}{2}(t_{n+2} + t_n) + p(n+1)^2 + p - p,$$

即對所有 $n \geq 1$，有 $t_{n+1} = \frac{1}{2}(t_{n+2} + t_n)$。由第 (i) 部分，存在常數 A 和 B 使得 $t_n = A + Bn$，所以

$$v_n = pn^2 + Bn + A.$$

因為 $p \neq 0$，n^2 項不會消失，所以 v_n 的次數恰好是 2。

由 $v_1 = v_2 = 0$：

$$p + B + A = 0, \qquad 4p + 2B + A = 0.$$

兩式相減得 $3p + B = 0$，所以 $B = -3p$，從而 $A = 2p$。因此

$$v_n = p(n^2 - 3n + 2) = p(n-1)(n-2).$$

第 (iii) 部分

這次題目沒有提示代換，所以我們要自己找一個。把關係式加倍，

$$w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 2(an + b).$$

> **想一想** 哪一個 n 的多項式，其二階差分是 n 的線性函數？

每取一次差分，多項式的次數就降一，所以我們需要一個三次多項式（cubic）。記 $\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$。直接展開得

$$\Delta^2 n^3 = (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) - 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n^3 = 6n + 6,$$
$$\Delta^2 n^2 = (n^2 + 4n + 4) - 2(n^2 + 2n + 1) + n^2 = 2.$$

所以 $\Delta^2(cn^3 + en^2) = 6cn + 6c + 2e$，而當

$$c = \frac{a}{3}, \qquad e = b - 3c = b - a.$$

時，它對每個 n 都等於 $2an + 2b$。現在設 $w_n = t_n + \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2$。由於 Δ^2 是線性的，$\Delta^2 w_n = \Delta^2 t_n + 2(an + b)$，於是關係式變成 $\Delta^2 t_n = 0$，這正是第 (i) 部分的關係式。所以 $t_n = A + Bn$，且

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + Bn + A.$$

因為 $a \neq 0$，三次項存在，所以 w_n 的次數是 3。

由 $w_1 = w_2 = 0$：

$$\tfrac{a}{3} + (b-a) + B + A = 0,$$
$$\tfrac{8a}{3} + 4(b-a) + 2B + A = 0.$$

第二式減去第一式得 $\frac{7a}{3} + 3(b-a) + B = 0$，所以 $B = \frac{2a}{3} - 3b$，再由第一式得 $A = 2b$。因此

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + \Big(\frac{2a}{3} - 3b\Big)n + 2b.$$

由於 $w_1 = w_2 = 0$，因式 $n-1$ 和 $n-2$ 必定出現，再比較 n^3 項和常數項，便得到較簡潔的形式

$$w_n = \frac{(n-1)(n-2)(an+3b)}{3}.$$

（展開 $(n-1)(n-2)(an+3b)$ 得 $an^3 + (3b-3a)n^2 + (2a-9b)n + 6b$，與上式一致。）

驗算

- 在 (iii) 中設 $a = 0$、$b = p$ 應該得回 (ii)，結果的確如此：$(n-1)(n-2)\cdot 3p/3 = p(n-1)(n-2)$。
- 直接運行遞推關係（recurrence）。取 $a = 3$、$b = 0$，有 $w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n + 6n$，所以由 $w_1 = w_2 = 0$ 得 $w_3 = 6$、$w_4 = 24$、$w_5 = 60$。公式給出 $(n-1)(n-2)n$，即 $6, 24, 60$。
- 次數為 3 的數列，其三階差分是常數。對 $0, 0, 6, 24, 60$，差分是 $0, 6, 18, 36$，然後是 $6, 12, 18$，再然後是 $6, 6$：是常數，等於 $2a$。

常見錯誤

- 說 (i) 中的數列次數恰好是 1：若 $u_1 = u_2$，它是常數。
- 在 (iii) 中只嘗試 $w_n = t_n + kn^3$。單靠 n^3 項會產生 $6kn + 6k$，所以還需要一個 n^2 項來調整常數。
- 忘記由 $p \neq 0$（或 $a \neq 0$）去證明「次數恰好是 2」（或 3）。

STEP 之外

這是解 $y'' = f(x)$ 的離散類比（discrete analogue）：通解（general solution）等於一個特解（particular solution）加上齊次方程（homogeneous equation）的解，而這裏齊次

方程的解就是線性數列 $A + Bn$。同樣的「餘函數（complementary function）加特解」結構支配着線性微分方程（linear differential equations），而猜測多項式特解的方法幾乎可以原封不動地搬過去。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）講述了連續的版本。

詳細解答

STEP II 2022，第 3 題

純數學 • 斐波那契級數與小數

STEP II 2022，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

遞推關係（recurrence）$F_{r+1} - F_r - F_{r-1} = 0$ 是整道題的核心。把它乘以 $\frac{1}{10}$ 的冪再求和，然後重新編排下標（re-indexing），每一部分都會變成 S_n 的倍數加上幾個邊界項，這正是生成函數（generating function）的技巧。第 (i) 部分是安全網：它說明斐波那契數（Fibonacci numbers）的增長不會快過 2 的冪，所以除以 10（或 100）的冪之後，尾項（tail）非常小，很容易估計上界。

解答

第 (i) 部分

首先，每個 $F_k \geq 0$（用歸納法（induction）證明：因為 $F_0, F_1 \geq 0$，而非負數之和仍是非負數）。其次，這個數列從不遞減：$F_1 \geq F_0$，而對 $k \geq 1$，有 $F_{k+1} - F_k = F_{k-1} \geq 0$。

所以對每個 $k \geq 1$，

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \leq F_k + F_k = 2F_k.$$

現在固定 $n \geq 1$，對 $r \geq n$ 進行歸納。當 $r = n$ 時，命題變成 $F_n \leq F_n$。若對某個 $r \geq n$ 有 $F_r \leq 2^{r-n}F_n$，則由於 $r \geq 1$，

$$F_{r+1} \leq 2F_r \leq 2 \cdot 2^{r-n}F_n = 2^{(r+1)-n}F_n.$$

歸納完成，所以只要 $n \geq 1$ 且 $r \geq n$，便有 $F_r \leq 2^{r-n}F_n$。

第 (ii) 部分

我們把左邊三個和各自用 S_n 表示。

第一個和。設 $k = r+1$：

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r+1}}{10^{r-1}} = 100 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{F_k}{10^k} = 100\Big(S_n - \frac{F_1}{10} + \frac{F_{n+1}}{10^{n+1}}\Big)$$
$$= 100S_n - 10F_1 + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}.$$

第二個和。這就是 $10S_n$。

第三個和。設 $k = r-1$：

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r-1}}{10^{r-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_k}{10^k} = F_0 + S_n - \frac{F_n}{10^n}.$$

從第一個和減去第二和第三個和，得

$$(100-10-1)S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} = 89S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}},$$

這就是所求的結果。

第 (iii) 部分

把 (ii) 左邊的三個和合併成一個。它的第 r 項是 $(F_{r+1} - F_r - F_{r-1})/10^{r-1} = 0$，所以左邊等於零。代入 $F_0 = 0$ 和 $F_1 = 1$，得

$$89S_n = 10 - \frac{F_n}{10^n} - \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}. \qquad (*)$$

? **想一想** 我們怎樣知道當 $n \to \infty$ 時，剩下的兩項會趨於零？

這正是第 (i) 部分發揮作用的地方。在那裏取 $n = 1$，得對所有 $r \geq 1$ 都有 $F_r \leq 2^{r-1}$，所以

$$0 \leq \frac{F_n}{10^n} \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5}\Big)^n, \qquad 0 \leq \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} \leq \frac{2^n}{10^{n-1}} = 10\Big(\frac{1}{5}\Big)^n,$$

而兩個上界都趨於 0。在 $(*)$ 中令 $n \to \infty$，得 $89S_n \to 10$，即

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} = \frac{10}{89}.$$

至於尾項，在第 (i) 部分中取 $n = 7$（注意 $F_7 = 13$）：對 $r \geq 7$，有 $F_r \leq 2^{r-7} \cdot 13$，所以

$$\sum_{r=7}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} \leq \frac{13}{10^7} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{10^j} = \frac{13}{10^7} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{65}{4} \times 10^{-7} = 1.625 \times 10^{-6} < 2 \times 10^{-6}.$$

$\frac{1}{89}$ 的各位數字。首六項之和為

$$S_6 = 0.1 + 0.01 + 0.002 + 0.0003 + 0.00005 + 0.000008 = 0.112358.$$

尾項 $T = \frac{10}{89} - S_6$ 嚴格大於零（因為它的各項都是正數），而且小於 2×10^{-6}，所以

$$0.112358 < \frac{10}{89} < 0.112360, \qquad \text{因此} \qquad 0.0112358 < \frac{1}{89} < 0.0112360.$$

嚴格介於這兩個界之間的每個數都以 $0.011235\ldots$ 開頭，所以 $\frac{1}{89}$ 小數點後的首六位數字是 $0, 1, 1, 2, 3, 5$。嚴格的下界很重要：它排除了展開式是 $0.0112357\ldots$ 的可能。

第 (iv) 部分

把目標數在開頭的 00 之後兩位兩位地讀：

$$0.00\ 01\ 01\ 02\ 03\ 05\ 08\ 13\ 21\ 34\ 55\ldots$$

這些兩位數組正是 $F_1, F_2, \ldots, F_{10}$，每個都寫成兩位數字。所以這個數應該是 $\frac{1}{100}U$，其中

$$U = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{100^r}.$$

求 U 的和。由第 (i) 部分得 $F_r \le 2^{r-1}$，所以這個級數絕對收斂（converges absolutely）。因此我們可以像 (ii) 一樣，逐項平移和合併收斂級數：

$$U - \frac{U}{100} - \frac{U}{100^2} = \frac{F_1}{100} + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{F_r - F_{r-1} - F_{r-2}}{100^r} = \frac{1}{100}.$$

這裏 $r = 1$ 的項是 $F_1/100$（因為 $F_0 = 0$），而之後每個括號都等於零。所以 $U \cdot \frac{9899}{10000} = \frac{1}{100}$，得 $U = \frac{100}{9899}$。因此候選答案是

$$\frac{U}{100} = \frac{1}{9899},$$

其中 $r = 1$、$s = 9899$，兩者都是小於 10000 的正整數。

驗證各位數字。設 U_{10} 為首十項之和。由於 $F_1, \ldots, F_{10}$ 每個都小於 100，各項不會互相重疊，而且

$$U_{10} = 0.01010203050813213455$$

恰好成立，共有 20 位小數。由第 (i) 部分取 $n = 11$（且 $F_{11} = 89$），餘下各項滿足

$$0 < U - U_{10} \le \frac{89}{100^{11}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{100}\right)^j = \frac{89}{10^{22}} \cdot \frac{100}{98} < 10^{-20}.$$

所以 $U_{10} < U < U_{10} + 10^{-20}$，$U$ 的首 20 位小數就是 U_{10} 的那些數字。除以 100 會把這些數字向右移兩位：

$$\frac{1}{9899} = 0.0001010203050813213455\ldots,$$

這正是所要求的開頭。

驗算

- 用長除法（long division）得 $1/89 = 0.011235955\ldots$。數字 011235 吻合，而接下來的數字 9,5,5 顯示斐波那契數一旦達到兩位數，就會互相「進位」。
- (iii) 中 $r = 6$ 之後的尾項實際上是 $10/89 - 0.112358 \approx 1.55 \times 10^{-6}$，穩穩低於我們的上界 1.625×10^{-6}。
- 用電腦把 $1/9899$ 計算到 22 位小數，得 0.0001010203050813213455。下一組兩位數是 90 而不是 $F_{11} = 89$，因為 $F_{12} = 144$ 超出了它的兩位數位置，向前一組進位 1。

常見錯誤

- 在 (ii) 重新編排下標時把邊界項弄錯。把每個平移後的和的首項和末項寫出來，就可以避免。
- 在 (iii) 中沒有證明 $F_n/10^n$ 和 $F_{n+1}/10^{n-1}$ 趨於零。第 (i) 部分正是為此而設的。
- 忘記尾項是嚴格大於零的。單靠一個上界並不能確定第六位數字。

STEP 之外

函數 $G(x) = \sum F_r x^r$ 是斐波那契數的生成函數，而上面的平移論證說明，當 $|x| < \frac{1}{2}$ 時 $G(x) = x/(1 - x - x^2)$。代入 $x = \frac{1}{10}$ 和 $x = \frac{1}{100}$，便得到 $\frac{10}{89}$ 和 $\frac{100}{9899}$。生成函數把遞推關係轉化為代數運算，是組合數學（combinatorics）的核心工具。Herbert Wilf 的 *generatingfunctionology*（《生成函數學》）是一本生動的入門書。要嚴格地處理「重新排列收斂級數」，屬於大學一年級分析（analysis）課程的內容：可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP II 2022，第 4 題

純數學 • 絕對值函數

STEP II 2022，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

絕對值符號（modulus sign）只在其內部式子變號之處才起作用，因此在每兩個這樣的點之間的區間上，每個絕對值都可以換成其內部式子的正號或負號形式。反過來看，一項 $A|x-p|$ 會在 $x=p$ 處造成一個轉角，該處的斜率（gradient）跳變 $2A$。因此，要寫出單一公式，我們先配合斜率的跳變（在最後一部分還要配合 x^2 係數（coefficient）的跳變），然後再定出常數。

解答

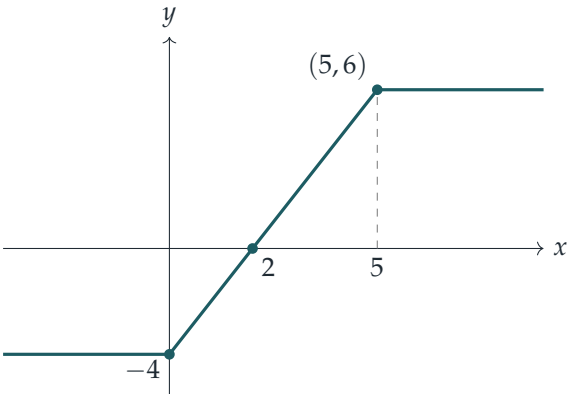
第 (i) 部分

臨界點是 $x=0$（$|x|$ 在此轉換）和 $x=5$（$|x-5|$ 在此轉換）。

- 當 $x \le 0$：$|x| = -x$，而由於 $x-5<0$，$|x-5| = 5-x$。所以 $\mathrm{f}(x) = -x-(5-x)+1 = -4$。
- 當 $0 \le x \le 5$：$|x| = x$ 及 $|x-5| = 5-x$。所以 $\mathrm{f}(x) = x-(5-x)+1 = 2x-4$。
- 當 $x \ge 5$：$|x| = x$ 及 $|x-5| = x-5$。所以 $\mathrm{f}(x) = x-(x-5)+1 = 6$。

在 $x=0$ 和 $x=5$ 處，相關的兩個表達式都成立（每個絕對值在該處要麼為零，要麼符號確定），所以重疊的端點是一致的：$-4 = 2(0)-4$ 及 $2(5)-4 = 6$。這就是所求的分段（piecewise）形式。

圖像先是高度為 -4 的水平線，然後以斜率 2 從 $(0,-4)$ 經 $(2,0)$ 上升至 $(5,6)$，之後是高度為 6 的水平線。



第 (ii) 部分

第 (i) 部分啟發我們嘗試

$$\mathrm{g}(x) = A|x| + B|x-5| + Cx + D.$$

由左至右經過 $x = 0$ 時，$A|x|$ 一項由 $-Ax$ 變為 Ax，所以斜率跳變 $2A$；同理，$B|x-5|$ 令斜率在 $x = 5$ 處跳變 $2B$。已知的 g 在三段上的斜率分別是 -1、3、1，所以

$$2A = 3 - (-1) = 4, \qquad 2B = 1 - 3 = -2,$$

得 $A = 2$、$B = -1$。當 $x \geq 5$ 時，公式為 $2x - (x-5) + Cx + D = (1+C)x + 5 + D$，而這必須等於 $x + 10$，所以 $C = 0$ 及 $D = 5$。因此

$$\boxed{\mathrm{g}(x) = 2|x| - |x-5| + 5.}$$

驗算其餘兩段：當 $x \leq 0$，$-2x - (5-x) + 5 = -x$；當 $0 \leq x \leq 5$，$2x - (5-x) + 5 = 3x$。兩者都與 g 的定義相符。

想一想 為甚麼這種形式的公式有機會成功？

g 的每一段都是線性的，而且各段連續（continuous）地接合（在 $x = 0$ 處兩側都是 0，在 $x = 5$ 處兩側都是 15）。由線性式的絕對值之和加上一個線性函數所組成的函數，必定是連續且分段線性的，而轉角只出現在各絕對值轉換之處。假如 g 有跳躍，就沒有這樣的公式能產生它。

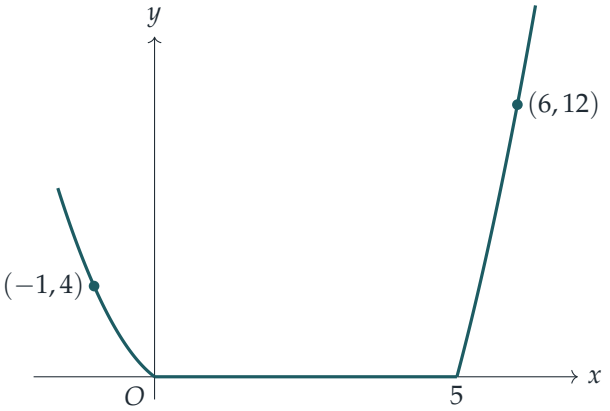
第 (iii) 部分

現在轉換點是 $x = 0$（對應 $|x|$）以及 $x(x-5)$ 的根，即同樣是 0 和 5。乘積 $x(x-5)$ 在 $x < 0$ 及 $x > 5$ 時為正，在兩者之間為負。

► 當 $x \leq 0$：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x + 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 2x = 2x(x-1)$。

- 當 $0 \le x \le 5$：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x - (x^2 - 5x) = 0$。
- 當 $x \ge 5$：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 10x = 2x(x-5)$。

所以 h 在 $[0,5]$ 上恆等於零。在左邊，它是拋物線（parabola）$y = 2x(x-1)$ 的一部分：它以斜率 $4x - 2 = -2$ 到達原點，並在 $x \to -\infty$ 時無界地增大（例如 $\mathrm{h}(-1) = 4$）。在右邊，它是 $y = 2x(x-5)$ 的一部分：它以斜率 $4x - 10 = 10$ 離開 $(5,0)$（例如 $\mathrm{h}(6) = 12$）。兩臂並非互為鏡像：右臂離開橫軸時陡峭五倍。圖像是連續的，在 $(0,0)$ 和 $(5,0)$ 處有轉角，而且處處 $\mathrm{h}(x) \ge 0$。



第 (iv) 部分

第 (iii) 部分展示了我們需要的工具：$|x(x-5)|$ 在 $[0,5]$ 以外等於 $x^2 - 5x$，在其內則等於 $-(x^2 - 5x)$，所以它可以把一個 x^2 項「開啟」和「關閉」。函數 k 的 x^2 係數在 $[0,5]$ 以外為 0，在其內為 2。在 $ax^2 + d|x(x-5)|$ 中，x^2 的係數在外面是 $a + d$，在裏面是 $a - d$，所以我們需要 $a + d = 0$ 及 $a - d = 2$，即 $a = 1$、$d = -1$。於是 $x^2 - |x(x-5)|$ 具有正確的二次項表現，而且

$$x^2 - |x(x-5)| = \begin{cases} 5x & x \le 0 \text{ 或} x \ge 5, \\ 2x^2 - 5x & 0 \le x \le 5. \end{cases}$$

從 k 減去此式，剩下一個分段線性的餘下部分：

$$\mathrm{k}(x) - \left(x^2 - |x(x-5)|\right) = \begin{cases} 5x & x \le 5, \\ 50 - 5x & x \ge 5. \end{cases}$$

它只在 $x = 5$ 處有一個轉角，該處斜率由 5 跳變為 -5，即跳變 -10；所以它是 $-5|x-5|$ + (線性函數)。當 $x \le 5$ 時，$-5|x-5| = 5x - 25$，所以要加上 25 才得到 $5x$。這啟發我們得出

$$\boxed{\mathrm{k}(x) = x^2 - |x(x-5)| - 5|x-5| + 25.}$$

驗證。我們在每個區間上代入。

- 當 $x \le 0$：$x(x-5) \ge 0$ 且 $x-5<0$，所以公式給出 $x^2-(x^2-5x)-5(5-x)+25 = 5x+5x = 10x$。
- 當 $0 \le x \le 5$：$x(x-5) \le 0$ 且 $x-5 \le 0$，所以它給出 $x^2+(x^2-5x)-5(5-x)+25 = 2x^2$。
- 當 $x \ge 5$：$x(x-5) \ge 0$ 且 $x-5 \ge 0$，所以它給出 $x^2-(x^2-5x)-5(x-5)+25 = 50$。

這些正正就是 k 的三段，所以該公式對每個實數 x 都正確。

這個單一公式並非唯一。例如 $|x(x-5)| = |x|\,|x-5|$，所以答案可以改寫，而其他組合（例如用到 $x|x|$ 的）也同樣可行。任何答案只要通過上述三個區間的檢驗，都是可以接受的。

驗算

- 代入數值：由定義及 $2(2)-7+5$ 均得 $\mathrm{g}(-2)=2$；$\mathrm{g}(7)=17=14-2+5$。至於 k：$\mathrm{k}(3)=18$ 而 $9-|-6|-10+25=18$；$\mathrm{k}(-1)=-10$ 而 $1-6-30+25=-10$。
- 連續性是一個快捷的合理性檢查：任何由絕對值構成的單一公式都是連續的，而 g 和 k 在接合點確實吻合（$\mathrm{k}(5)=50=2\cdot 5^2$）。
- 四條公式都已用電腦在 $[-20,25]$ 中 10^5 個隨機點上與其分段形式比較，結果在捨入誤差範圍內一致。

常見錯誤

- 把 h 的兩臂畫成對稱。左臂是 $2x(x-1)$，右臂是 $2x(x-5)$，在轉角處的斜率分別是 -2 和 10。
- 忘記 $|x(x-5)|$ 在兩個點變號，所以在 (iii) 中它在中間的區間翻轉，而不只是在 0 處。
- 寫出 k 的公式後沒有代入全部三個區間驗證；驗證是必需的。

STEP 之外

這裏追蹤斜率跳變的做法，讓我們初嘗一個一般事實：$\mathbb{R}$ 上每個只有有限個轉角的連續分段線性函數，都是一個線性函數加上若干 $|x-p|$ 項的組合。這正是數值分析（numer-

ical analysis）中線性樣條（linear splines）以及神經網絡（neural networks）中「ReLU」單元背後的概念，因為 $\max(x,0) = \frac{1}{2}(x+|x|)$。若想仔細了解連續性及分段定義的函數，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP II 2022，第 5 題

純數學 • 三角形中的不等式

STEP II 2022，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

從 P 把三角形分成三塊，便可看出無論 P 怎樣移動，加權和(weighted sum)$ax+by+cz$ 始終固定為 2Δ。之後每一部分都是在這個單一線性約束（linear constraint）下的最優化（optimisation）問題。第 (i) 部分把 $x+y+z$ 與這個固定量作比較；(iii)(a) 的恆等式（identity）對 $x^2+y^2+z^2$ 做同樣的事（它其實是喬裝了的柯西－施瓦茨不等式(Cauchy–Schwarz inequality)）；至於最大值，我們把 (i) 反過來用，以 c 代替 a。

解答

第 (i) 部分

由於 $a>b$ 且 $y\geq 0$，得 $by\leq ay$；由於 $a>c$ 且 $z\geq 0$，得 $cz\leq az$。把兩式相加，再在兩邊加上 ax，得

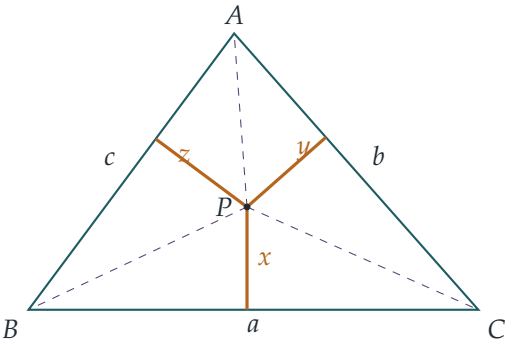
$$ax+by+cz\leq ax+ay+az=a(x+y+z),$$

此即所求。因為 $a-b>0$ 及 $a-c>0$，等號成立當且僅當 $(a-b)y+(a-c)z=0$，即 $y=z=0$。稍後我們會用到這個等號成立的情況。

第 (ii)(a) 部分

把 P 與各頂點連起來，便把 ABC 分成三角形 PBC、PCA 和 PAB（若 P 在某條邊上，其中一些可能是退化（degenerate）的）。三角形 PBC 的底為 $BC=a$，高為 x，其餘依此類推，所以

$$\Delta=\tfrac{1}{2}ax+\tfrac{1}{2}by+\tfrac{1}{2}cz,\qquad \text{即}\qquad ax+by+cz=2\Delta.$$



反過來，任何滿足 $ax+by+cz=2\Delta$ 的 $x,y,z\geq 0$，都恰好是三角形內（或邊上）唯一一點 P 到三邊的距離：三個三角形的面積 $\frac{1}{2}ax$、$\frac{1}{2}by$、$\frac{1}{2}cz$ 都非負，總和為 Δ，而它們唯一確定 P（它們就是 P 的面積坐標（areal coordinates））。因此，下文可以把問題當作純代數問題處理：在所有滿足 $ax+by+cz=2\Delta$ 的非負 x,y,z 中求最優值。

第 (ii)(b) 部分

依次用第 (i) 部分和 (ii)(a)，

$$x+y+z\geq \frac{ax+by+cz}{a}=\frac{2\Delta}{a}.$$

等號成立當且僅當 $y=z=0$，此時 $ax=2\Delta$。所以總和的最小值為

$$x+y+z=\frac{2\Delta}{a},\qquad \text{取得於}\quad x=\frac{2\Delta}{a},\ y=0,\ z=0.$$

從幾何角度看，$y=z=0$ 表示 P 同時在 CA 和 AB 上，所以 $P=A$，而 x 就是從 A 到最長邊 BC 的高（altitude）。

第 (iii)(a) 部分

展開三個差的平方，

$$\begin{aligned}(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2 &= b^2x^2+a^2y^2+c^2y^2+b^2z^2+a^2z^2+c^2x^2\\ &\quad -2(abxy+bcyz+cazx),\end{aligned}$$

而

$$(ax+by+cz)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(abxy+bcyz+cazx).$$

兩式相加，交叉項互相抵消，而 a^2,b^2,c^2 其中之一與 x^2,y^2,z^2 其中之一的每個乘積都恰好出現一次，得 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$。這就證明了此恆等式對所有實數值皆成立。

第 (iii)(b) 部分

把 $ax+by+cz=2\Delta$ 代入恆等式：

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2+4\Delta^2\geq 4\Delta^2,$$

因為平方數非負。因此

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

> **想一想** 下界只有在真正能取到時才是最小值。三個平方項能否在一個真實存在的點 P 同時為零？

等號成立需要 $bx=ay$、$cy=bz$ 及 $az=cx$。這些條件表示 (x,y,z) 是 (a,b,c) 的倍數：若 $x=\lambda a$，則 $y=\frac{b}{a}x=\lambda b$，$z=\frac{c}{a}x=\lambda c$，三條方程都成立。由約束條件得 $\lambda(a^2+b^2+c^2)=2\Delta$，所以 $\lambda=\dfrac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2}>0$。於是 x,y,z 全為正數，且滿足 $ax+by+cz=2\Delta$，故根據 (ii)(a) 的說明，它們對應一個真實的點 P（嚴格位於三角形內部）。所以平方和的最小值為

$$\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2},\qquad\text{取得於}\quad x=\frac{2a\Delta}{a^2+b^2+c^2},\ y=\frac{2b\Delta}{a^2+b^2+c^2},\ z=\frac{2c\Delta}{a^2+b^2+c^2}.$$

第 (iv) 部分

> **想一想** 第 (i) 部分用到 a 是最長邊。如果改用最短邊 c，會怎樣？

由於 $a>c$、$b>c$ 且 $x,y\geq 0$，把第 (i) 部分的論證反過來，得 $ax+by+cz\geq c(x+y+z)$，等號成立當且僅當 $x=y=0$。所以

$$x+y+z\leq\frac{2\Delta}{c}.$$

此外，由於 $x,y,z\geq 0$，

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\leq(x+y+z)^2,$$

等號成立當且僅當 $xy+yz+zx=0$。把兩者結合（由於兩邊都非負，平方是安全的），

$$x^2+y^2+z^2\leq(x+y+z)^2\leq\frac{4\Delta^2}{c^2}.$$

當 $x=y=0$ 時，兩個不等式都取等號：此時 $xy+yz+zx=0$ 且 $cz=2\Delta$。所以平方和的最大值為

$$\frac{4\Delta^2}{c^2},\qquad\text{取得於}\quad x=0,\ y=0,\ z=\frac{2\Delta}{c},$$

即 $P=C$，也就是最短邊所對的頂點。（第二個不等式只在 $x=y=0$ 時取等號，所以這是取得最大值的唯一一點。）

驗算

取邊長為 $a = 7$、$b = 6$、$c = 5$ 的銳角三角形。海倫公式（Heron's formula）給出 $\Delta = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6} \approx 14.70$。答案於是為：$x + y + z$ 的最小值是 $12\sqrt{6}/7 \approx 4.20$；$x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值是 $864/110 = 432/55 \approx 7.85$；最大值是 $864/25 = 34.56$。大小次序合理：在 $P = C$ 時，平方和就是從 C 出發的高的平方，即 $(12\sqrt{6}/5)^2 = 34.56$。我們用電腦檢驗了大量隨機銳角三角形，每個三角形取數以千計的隨機點 P，證實了 $ax + by + cz = 2\Delta$ 及全部三個界，而極值分別在 A、在距離與 (a, b, c) 成比例的點，以及在 C 取得。

常見錯誤

- 給出下界卻沒有證明它能取到。在 (iii)(b) 中，必須檢查等號成立的點的距離非負且滿足約束條件，才能確定它是一個真實存在的 P。
- 混淆頂點：$x + y + z$ 的最小值在 A（最長邊所對的頂點）取得，但 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最大值在 C（最短邊所對的頂點）取得。
- 在 (iv) 中忽略條件 $x, y, z \geq 0$；沒有這個條件，$x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y + z)^2$ 並不成立。

STEP 之外

(iii)(a) 中的恆等式是拉格朗日恆等式（Lagrange's identity），它證明了三維空間中的柯西－施瓦茨不等式 $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$：最小值點就是 (x, y, z) 與 (a, b, c) 平行之處，亦即從原點到平面 $ax + by + cz = 2\Delta$ 的垂足。像 $x^2 + y^2 + z^2$ 這樣的凸函數（convex function）在三角形上的最大值總是在某個頂點取得，這讓我們初窺線性最優化與凸最優化的世界。(iii)(b) 中找到的點是三角形的類似重心（symmedian point，又稱勒穆瓦納點（Lemoine point））。想進一步了解點積與投影，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

詳細解答

STEP II 2022，第 6 題

純數學 • 正交軌線

STEP II 2022，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

兩條曲線在某點互相垂直，當且僅當它們在該點的斜率（gradient）之積為 -1。因此，對於一整族曲線，我們需要一條在點 (x, y) 成立的斜率公式，而且無論族中哪一條曲線經過該點都適用。這意味着要在曲線方程與其導數（derivative）之間消去參數（parameter）（a、b、c 或 k），只剩下一條只含 x、y 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的微分方程（differential equation）。然後把斜率 m 換成 $-1/m$ 再求解，便得到與之垂直的曲線族。

解答

全題中 $x > 0$ 且 $y > 0$。

第 (i)(a) 部分

把 $x^2 + y^2 = 2ax$ 對 x 作隱函數微分（implicit differentiation），得

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a.$$

這式子仍然含有 a，而 a 隨曲線而變。由曲線方程得 $2a = (x^2 + y^2)/x$，代入後乘以 x，

$$2x^2 + 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - x^2,$$

即所求。

對於第二族，把 $x^2 + y^2 = 2by$ 微分（記住右方亦透過 y 依賴於 x），得

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

此時 $2b = (x^2+y^2)/y$；代入後乘以 y，

$$2xy + 2y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x^2+y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad\Longrightarrow\quad (x^2-y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy.$$

第 (i)(b) 部分

假設兩族中各有一條曲線經過 (x,y)，且 $y \neq x$。由於 $x, y > 0$，故 $2xy \neq 0$；又因 $y \neq x$ 且兩者皆為正，故 $x^2 - y^2 \neq 0$。因此兩條微分方程都可以相除：兩個斜率為

$$m_1 = \frac{y^2-x^2}{2xy}, \qquad m_2 = \frac{2xy}{x^2-y^2}, \qquad \text{故} \qquad m_1 m_2 = \frac{y^2-x^2}{x^2-y^2} = -1.$$

兩個斜率都是有限值，且乘積為 -1，所以兩條切線（tangent）互相垂直。

想一想 在直線 $y = x$ 上會出現甚麼問題？這是否表示結果在那裏不成立？

在 $y = x$ 上，第二條方程變成 $0 \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x^2 \neq 0$，沒有任何有限斜率能滿足它：第二條曲線的切線是鉛垂的。出問題的是代數，而不是幾何，所以我們直接考察。

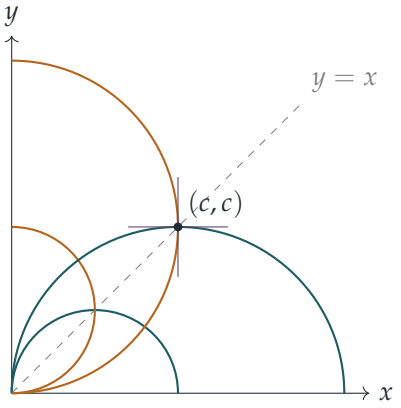
若 (c,c) 在 $x^2+y^2 = 2ax$ 上，則 $2c^2 = 2ac$，故 $a = c$；同理 $b = c$。第一條曲線是圓心 $(c,0)$、半徑 c 的圓，而 (c,c) 是它的最高點，所以該點的切線是水平的（事實上當 $y = x$ 時 $m_1 = 0$）：

$$y = c.$$

第二條曲線是圓心 $(0,c)$、半徑 c 的圓，而 (c,c) 是它的最右點，所以其切線是鉛垂的：

$$x = c.$$

水平線與鉛垂線互相垂直，所以**是的**：在每一個交點，包括 $y = x$ 上的交點，切線都互相垂直。



第一族的圓（青綠色）在原點與 y 軸相切；第二族的圓（琥珀色）在原點與 x 軸相切。

第 (ii) 部分

對於 $y = c\ln x$，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{c}{x}$。為了消去 c，注意在這類曲線上位於第一象限的點，$y > 0$ 迫使 $\ln x \neq 0$，故 $c = y/\ln x$，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x\ln x}.$$

這個斜率永不為零，所以經過同一點的垂直曲線的斜率必為 $-x\ln x/y$。因此第二族滿足

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x\ln x.$$

分離變數（separating variables），並以 $u = \ln x$、$\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$ 對 $x\ln x$ 作分部積分（integration by parts），

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\ln x\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2\ln x + \tfrac{1}{4}x^2 + C.$$

乘以 4，第二族為

$$2y^2 + 2x^2\ln x - x^2 = k,$$

每個常數 k 對應一條曲線（只計 $x > 0$、$y > 0$ 的部分）。反過來，對此式作隱函數微分，得 $4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4x\ln x + 2x - 2x = 0$，正是上面的方程，所以凡這些曲線與某條 $y = c\ln x$ 相交之處，斜率之積都是 $\frac{y}{x\ln x}\cdot\frac{-x\ln x}{y} = -1$。

第 (iii) 部分

把 $y^2 = 4k(x+k)$ 微分，得 $2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4k$，由於 $y > 0$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2k}{y}.$$

想一想 這裏只有一族曲線。那麼「第二條曲線」從何而來？

固定第一象限中一點 (x, y)，問族中哪些曲線經過它。k 的值必須滿足

$$4k^2 + 4xk - y^2 = 0,$$

這是 k 的二次方程（quadratic）。其判別式（discriminant）$16x^2 + 16y^2$ 為正，所以有兩個相異實根 k_1、k_2，而它們的積為

$$k_1k_2 = -\frac{y^2}{4}.$$

（此值為負，所以兩根皆非零，符合曲線族的要求。）二次方程最多只有兩個根，所以若族中兩條不同的曲線在 (x, y) 相交，它們的參數必定正是 k_1 和 k_2。它們在該點的斜率為 $2k_1/y$ 和 $2k_2/y$，乘積為

$$\frac{4k_1k_2}{y^2} = \frac{4}{y^2}\cdot\left(-\frac{y^2}{4}\right) = -1.$$

所以在每一個這樣的點，切線都互相垂直，即所求。（這些曲線是焦點（focus）在原點的拋物線（parabola）；這族曲線就是它自己的正交軌線。）

驗算

- 在 (i) 中，取 $(x,y)=(1,2)$：則 $a=\frac{5}{2}$、$b=\frac{5}{4}$，斜率為 $m_1=\frac{3}{4}$ 和 $m_2=-\frac{4}{3}$，乘積為 -1。
- 在 (ii) 中，在 $(e,1)$ 處，對數曲線有 $c=1$，斜率為 $1/e$；第二族的公式給出斜率 $-e\cdot 1/1=-e$。乘積同樣是 -1。
- 在 (iii) 中，在 $(0,2)$ 處，二次方程為 $4k^2-4=0$，故 $k=\pm 1$：拋物線 $y^2=4(x+1)$ 和 $y^2=-4(x-1)$，在該點的斜率分別為 1 和 -1。
- 四個結果亦已用電腦在數千個隨機點上驗證，所用的是曲線本身的數值導數。

常見錯誤

- 微分 $2by$ 時漏掉右方的因子 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。
- 在 (ii) 中，把垂直斜率寫成 $-x/c$，然後在仍含 c 的情況下積分：c 屬於第一條曲線，必須在求解前消去。
- 在 (i)(b) 中除以 x^2-y^2 而沒有說明它為何非零，因而忽略了直線 $y=x$ 需要另行處理。

STEP 之外

處處以直角相交的曲線族稱為**正交軌線**（orthogonal trajectories）。它們在物理學中以場線和等勢線的形式出現，在複分析（complex analysis）中亦然：解析函數（analytic function）的實部與虛部的等高線總是互相垂直，這就是為甚麼 (i) 中的圓來自 $1/z$，而 (iii) 中自身正交的拋物線來自 $\sqrt{z}$。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）討論了正交軌線，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）則把複分析的圖像解釋得精彩動人。

詳細解答

STEP II 2022，第 7 題

純數學 • 複係數多項式的根

STEP II 2022，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

方程 $\mathrm{h}(w)=0$ 可以很自然地寫成 $w^5(nw+1)=-(w+n)$，兩邊取模（modulus）後，就變成一個只關於 $|w|$ 的命題。一旦知道所有根都在單位圓（unit circle）上，每個非實根都會與它的共軛（conjugate）配成一對，而這個共軛恰好也是它的倒數（reciprocal）。由此便得到二次因式（quadratic factor），之後只需比較係數（comparing coefficients），再作一個正負號的論證即可。

解答

第 (i) 部分

(a) 把 $\mathrm{h}(w)=0$ 的各項分組為

$$w^5(nw+1)=-(w+n).$$

兩個括號都不可能為零。若 $w=-1/n$，則 $\mathrm{h}(w)=n-\frac{1}{n}\neq 0$；若 $w=-n$，則 $\mathrm{h}(w)=n^5(n^2-1)\neq 0$，因為 $n\geq 2$。兩邊取模再平方，得

$$|w^5|^2\,|nw+1|^2=|w+n|^2.$$

對任何複數 u 及實數 c，有 $|u+c|^2=(u+c)(\bar{u}+c)=|u|^2+2c\,\mathrm{Re}(u)+c^2$。所以

$$|w+n|^2=|w|^2+2n\,\mathrm{Re}(w)+n^2=\mathrm{f}(w),$$
$$|nw+1|^2=n^2|w|^2+2n\,\mathrm{Re}(w)+1=\mathrm{g}(w).$$

兩者皆為正，故 $|w^5|^2=\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)$。取正平方根，便得 $|w^5|=\sqrt{\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)}$，即為所求。

(b) 兩者相減時，$\mathrm{Re}(w)$ 項互相抵消：

$$\mathrm{f}(w) - \mathrm{g}(w) = n^2 + |w|^2 - n^2|w|^2 - 1 = (n^2-1)(1-|w|^2).$$

用反證法（proof by contradiction），假設 $|w| < 1$。由於 $n^2 - 1 > 0$，得 $\mathrm{f}(w) > \mathrm{g}(w) > 0$，所以 $\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w) > 1$。由 (a)，$|w|^5 > 1$，故 $|w| > 1$，與 $|w| < 1$ 矛盾。因此 $|w| \geq 1$。

(c) 同樣的論證反過來亦成立。若 $|w| > 1$，則 $\mathrm{f}(w) < \mathrm{g}(w)$，所以 $|w|^5 < 1$，即 $|w| < 1$，矛盾。故 $|w| \leq 1$ 亦成立，結合 (b)，得 $|w| = 1$。

想一想 有沒有更簡潔的理由說明 $|w| \leq 1$？

有的。係數 $n, 1, 0, 0, 0, 1, n$ 倒過來讀也一樣，所以 $z^6\,\mathrm{h}(1/z) = \mathrm{h}(z)$。因此若 w 是根，$1/w$ 也是根；把 (b) 應用於 $1/w$，便得 $|w| \leq 1$。

第 (ii) 部分

(a) 由於 h 是實係數（real coefficients）多項式，它的非實根必成共軛對出現。六個根互不相同且都不是實數，所以它們組成三對 w_k, $\bar{w}_k$ $(k = 1, 2, 3)$。由第 (i) 部分，$|w_k| = 1$，故 $w_k\bar{w}_k = 1$，而

$$(z - w_k)(z - \bar{w}_k) = z^2 - (w_k + \bar{w}_k)z + w_k\bar{w}_k = z^2 - a_k z + 1,$$

其中 $a_k = 2\,\mathrm{Re}(w_k)$ 為實數。多項式 h 的次數（degree）為 6，首項係數（leading coefficient）為 n，所以

$$\mathrm{h}(z) = n(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1)(z^2 - a_3 z + 1).$$

(b) 乘積中的 z^5 項，來自從其中一個因式取 $-a_k z$、從另外兩個因式各取 z^2，所以 z^5 的係數是 $-n(a_1 + a_2 + a_3)$。在 h 中這個係數是 1，所以

$$a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{n}.$$

(c) 先把其中兩個因式相乘：

$$(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1) = z^4 - (a_1 + a_2)z^3 + (2 + a_1 a_2)z^2 - (a_1 + a_2)z + 1.$$

再乘以 $z^2 - a_3 z + 1$，z^3 項來自 $z^3 \times 1$、$z^2 \times (-a_3 z)$ 及 $z \times z^2$：

$$-(a_1 + a_2) - a_3(2 + a_1 a_2) - (a_1 + a_2) = -2(a_1 + a_2 + a_3) - a_1 a_2 a_3.$$

h 中沒有 z^3 項，所以 $a_1 a_2 a_3 = -2(a_1 + a_2 + a_3)$，再由 (b)，

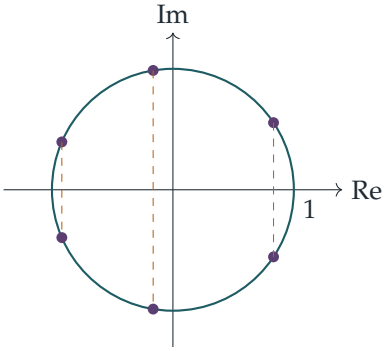
$$a_1 a_2 a_3 = \frac{2}{n}.$$

(d)

想一想 a_k 的正負號能告訴我們甚麼關於實部的資訊？

每對共軛根 $w_k, \bar{w}_k$ 有相同的實部（real part）$\mathrm{Re}(w_k) = a_k/2$。所以實部為負的根的數目，是負數 a_k 的數目的兩倍。

由於 $a_1a_2a_3 = 2/n > 0$，所有 a_k 都不為零，而且其中負數的個數是偶數：零個或兩個。它們不可能全部為正，因為 $a_1 + a_2 + a_3 = -1/n < 0$。所以恰好有兩個 a_k 為負、一個為正，六個根之中有**四個**的實部為負。



上圖顯示 $n = 2$ 的情況。六個根以三對共軛根的形式落在單位圓上，其中兩對位於虛軸（imaginary axis）的左邊。

驗算

- 作為「沒有實根」的合理性檢查：$\mathrm{h}(1) = 2n + 2$ 和 $\mathrm{h}(-1) = 2n - 2$ 都不為零。由於所有根都在單位圓上，唯一可能的實根只有 ± 1。
- 當 $n = 2$ 時，數值求解得 $a_k \approx -1.8368,\ -0.3272,\ 1.6640$。它們之和為 $-0.5 = -\frac{1}{2}$，乘積為 $1.000 = \frac{2}{2}$，且有兩個為負，與 (b)、(c)、(d) 相符。以電腦檢驗 $n = 2, \ldots, 29$，確認每次所有根的模都是 1，而且都有四個根的實部為負。

常見錯誤

- 未檢查 $w = -1/n$ 不是根，便直接除以 $nw + 1$。
- 在 (c) 中漏掉構成 z^3 的三種方式之一，特別是來自 $2 + a_1a_2$ 中常數 2 的那一項 $-2a_3$。
- 在 (d) 中數了負數 a_k 的個數，卻忘記每一個都對應兩個根。

STEP 之外

係數倒過來讀也一樣的多項式稱為迴文多項式（palindromic polynomial，又稱自倒多項式，self-reciprocal）。它的根以 $w, 1/w$ 成對出現，而代換 $u = z + 1/z$ 可以把它的次數減半。這裏的 $a_k = w_k + 1/w_k$ 正正就是這個 u。探討所有根何時都落在單位圓上的問題，會引出 Schur–Cohn 判別法，以及複分析（complex analysis）中的儒歇定理（Rouché's theorem）等結果。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是從幾何角度欣賞這些概念的絕佳讀物。

詳細解答

STEP II 2022，第 8 題

純數學 • 矩陣的不變直線

> **STEP II 2022，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

一條穿過原點的直線，如果線上每一點都被映射到同一條直線上的點，這條直線就是不變直線（invariant line）；因此只需看一個方向向量（direction vector）被映射到哪裏便足夠。把直線寫成 $y = mx$，並要求 $\mathbf{M}\binom{1}{m}$ 是 $\binom{1}{m}$ 的倍數，整個問題就化為一個關於 m 的二次方程（quadratic equation）。之後，第 (ii) 和第 (iii) 部分都是關於這個方程兩根之和與兩根之積的問題；而鉛垂線沒有斜率（gradient），每次都需要另行處理。

解答

第 (i) 部分

考慮直線 $y = mx$，其方向為 $\binom{1}{m}$。它的像是

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+bm\\c+dm\end{pmatrix}.$$

由於 $\mathbf{M}$ 是線性（linear）的，這條直線是不變直線，當且僅當這個像位於 $y = mx$ 上，即當且僅當

$$c + dm = m(a + bm) \quad \Longleftrightarrow \quad bm^2 + (a-d)m - c = 0.$$

所以每條非鉛垂的不變直線，其斜率都滿足這個方程；而方程的每個根都給出一條不變直線。

在把斜率稱為「兩個根」之前，我們必須先確認這真的是一個二次方程。y 軸的方向為 $\binom{0}{1}$，其像為 $\binom{b}{d}$；這個像位於 y 軸上，當且僅當 $b = 0$。所以如果兩條不變直線都不是 y 軸，則 $b \neq 0$。這時方程是真正的二次方程，最多只有兩個根。兩條不變直線都不是鉛

垂線，而且斜率不同，所以它們的斜率是兩個相異的根。這就表示它們的斜率正是方程的兩個根，得證。

如果其中一條不變直線是 y 軸，則 $b = 0$，方程退化為 $(a-d)m - c = 0$。由於 $a \neq d$（這正是用到這個條件的地方），另一條不變直線的斜率是

$$m = \frac{c}{a-d}.$$

第 (ii) 部分

情況 $b \neq 0$。設兩條直線的斜率為 m_1 和 m_2。由第 (i) 部分，

$$m_1 + m_2 = -\frac{a-d}{b}, \qquad m_1 m_2 = -\frac{c}{b}.$$

若兩條直線與 x 軸所成的角分別為 α_1 和 α_2，則

$$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

兩直線之間的夾角為 45°，即上式等於 ± 1，所以 $(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1 m_2)^2$。把左邊寫成 $(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2$，得

$$\frac{(a-d)^2}{b^2} + \frac{4c}{b} = \left(1 - \frac{c}{b}\right)^2.$$

兩邊乘以 b^2，得 $(a-d)^2 + 4bc = (b-c)^2$，即

$$(a-d)^2 = (b-c)^2 - 4bc.$$

情況 $b = 0$。其中一條直線是 y 軸，另一條的斜率為 $c/(a-d)$。要使它與 y 軸成 45°，它的斜率必須是 ± 1，所以 $c = \pm(a-d)$，從而 $(a-d)^2 = c^2$。當 $b = 0$ 時，所求結果的右邊也等於 c^2，所以結果在這個情況下同樣成立。

第 (iii) 部分

> **想一想** 「與 $y = x$ 成相等的角」用斜率來說是甚麼意思？

兩條穿過原點的不同直線與 $y = x$ 成相等的角，當且僅當其中一條是另一條關於 $y = x$ 的鏡像（mirror image）。關於 $y = x$ 的反射會把坐標對調，因此它把 $y = mx$ 映射到 $x = my$；當 $m \neq 0$ 時，這就是 $y = \frac{1}{m}x$。它把 x 軸映射到 y 軸，並把 y 軸映射到 x 軸。

情況 $b \neq 0$。兩條直線都不是鉛垂線。如果其中一條的斜率為 0，它的鏡像便是 y 軸，而 y 軸並非不變直線，所以兩條直線不會對稱。除此以外，條件就是 $m_2 = 1/m_1$，即 $m_1 m_2 = 1$。由第 (i) 部分，這就是 $-c/b = 1$，即 $b + c = 0$。

情況 $b = 0$。其中一條直線是 y 軸，所以另一條必須是 x 軸：$c/(a-d) = 0$，即 $c = 0$。在 $b = 0$ 的前提下，這同樣就是條件 $b + c = 0$。

所以在所有情況下，充要條件都是

$$b + c = 0, \quad \text{即} \quad c = -b.$$

（當矩陣是對稱矩陣（symmetric matrix），即 $b = c$ 時，不變直線反而互相垂直。這裏則是兩個非對角元素互為相反數。）

第 (iv) 部分

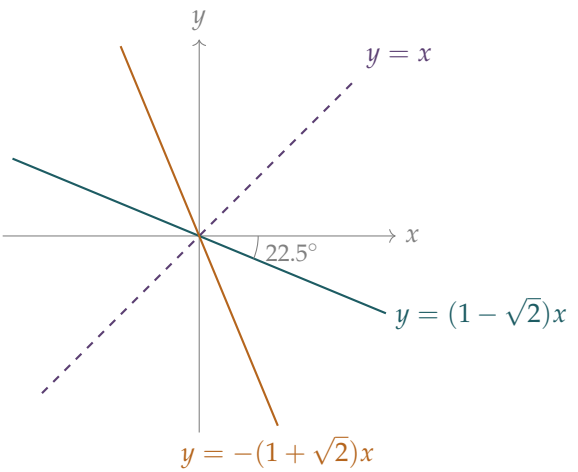
把 $c = -b$ 代入第 (ii) 部分的條件：

$$(a-d)^2 = (2b)^2 + 4b^2 = 8b^2.$$

我們需要 $b \neq 0$：若 $b = c = 0$，則 $(a-d)^2 = 0$，與 $a \neq d$ 矛盾。取 $b = 1$、$c = -1$ 及 $a - d = 2\sqrt{2}$，例如 $a = \sqrt{2}$、$d = -\sqrt{2}$：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

第 (i) 部分的二次方程是 $m^2 + 2\sqrt{2}\,m + 1 = 0$，有相異實根 $m = -\sqrt{2} \pm 1$。所以這個矩陣恰好有兩條不變直線，與題目的假設相符。兩根之積為 1，所以兩條直線關於 $y = x$ 互為鏡像。由於 $\tan 22.5° = \sqrt{2} - 1$ 及 $\tan 67.5° = \sqrt{2} + 1$，它們與 x 軸所成的角分別為 $-22.5°$ 和 $-67.5°$。因此兩條直線相交成 45°，而每條都與 $y = x$ 成 67.5°。



驗算

- 對於第 (iv) 部分的例子，$(a-d)^2 = 8$，而 $(b-c)^2 - 4bc = 4+4 = 8$，所以第 (ii) 部分的條件成立。我們也可以直接驗證其中一條直線：$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\\-1-\sqrt{2}+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$，所以 $y=(1-\sqrt{2})x$ 上的每一點其實都是不動點。
- 第 (i) 部分的一個簡單特例：對於 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$，不變直線就是兩條坐標軸。$y$ 軸情況的公式給出另一條直線的斜率為 $0/(2-1)=0$，正確無誤。
- 第 (i) 至 (iii) 部分已用電腦以數以千計的隨機矩陣驗證：特徵向量的方向滿足該二次方程，成 45° 的直線對滿足該恆等式，而且兩條直線關於 $y=x$ 對稱，當且僅當 $b+c=0$。

常見錯誤

- 忘記鉛垂線。二次方程只能反映斜率，所以每一部分都必須另行處理 $b=0$ 的情況。
- 在第 (iii) 部分寫成 $m_1 = -m_2$。這是關於坐標軸的對稱。關於 $y=x$ 的對稱需要 $m_1 m_2 = 1$。
- 使用 $\tan\theta = 1$ 而漏掉 $\pm$。把式子平方成 $(m_1-m_2)^2 = (1+m_1m_2)^2$，便可同時處理兩個符號。

STEP 之外

穿過原點的不變直線，就是 $\mathbf{M}$ 的特徵向量（eigenvector）方向；而第 (i) 部分的二次方程，就是把特徵向量方程 $\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$ 中的 λ 消去後所得的結果。實對稱矩陣的特徵向量必定互相垂直（譜定理（spectral theorem））。這道題則展示了反對稱的非對角元素如何令特徵向量反而關於 $y=x$ 對稱。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）對特徵向量和譜定理有系統的講解。

詳細解答

STEP II 2022，第 9 題

力學 • 摩擦力與力矩

STEP II 2022，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

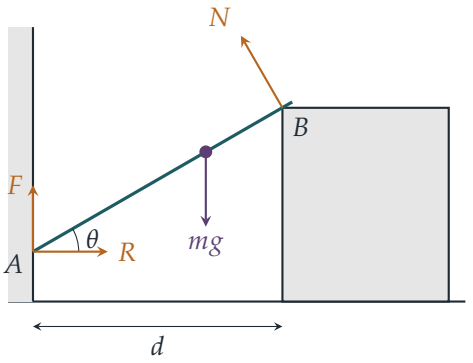
木板是輕的，所以只有三樣東西作用於它：質點、棱柱邊緣處的反作用力（reaction），以及牆壁。對木板與牆壁的接觸點取力矩（moments），可以一次過消去牆壁的兩個力，並立即得出邊緣處的反作用力。然後沿鉛垂方向分解（resolve）便得出摩擦力（friction），而之後每一部分都只是把摩擦不等式 $|F| \leq \mu R$ 重新整理而已。

解答

模型。木板是一根輕剛性桿，質量是一個重量為 mg 的質點，棱柱的邊緣是光滑的，而牆壁是粗糙的，摩擦系數（coefficient of friction）為 μ。設 A 為木板與牆壁的接觸點，B 為木板擱在邊緣上的點。由於 B 與牆壁的水平距離為 d，

$$AB = d\sec\theta.$$

在 B 處木板擱在一條邊緣上，所以光滑反作用力 N 垂直於木板。在 A 處，牆壁提供水平的法向反作用力 R 和鉛垂的摩擦力 F，我們取向上為正（F 為負即表示它向下作用）。



對 A 取力矩。牆壁的兩個力都通過 A。重量作用於沿木板距離 x 處，所以其力臂為 $x\cos\theta$；N 在距離 $d\sec\theta$ 處垂直於木板：

$$N\,d\sec\theta = mg\,x\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{mg\,x\cos^2\theta}{d}.$$

分解。N 的方向與鉛垂線成角 θ，並向牆壁傾斜。沿水平及鉛垂方向，

$$R = N\sin\theta = \frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d},$$
$$F = mg - N\cos\theta = mg\left(1 - \frac{x\cos^3\theta}{d}\right).$$

注意 $R > 0$，所以木板確實壓在牆壁上。

第 (i) 部分

若 $x = d\sec^3\theta$，則 $x\cos^3\theta/d = 1$，所以 $F = 0$：牆壁處沒有摩擦力作用。

第 (ii) 部分

在有摩擦的情況下，平衡（equilibrium）要求 $|F| \le \mu R$。

若 $x > d\sec^3\theta$，則 $x\cos^3\theta/d > 1$，所以 $F < 0$（摩擦力向下作用；沒有它的話，端點 A 會沿牆壁向上滑）。條件 $-F \le \mu R$ 即為

$$mg\left(\frac{x\cos^3\theta}{d} - 1\right) \le \mu\,\frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d}.$$

乘以正數 $d\sec^3\theta/(mg)$，得

$$x - d\sec^3\theta \le \mu\,x\tan\theta, \qquad \text{因此} \qquad \mu \ge \frac{x - d\sec^3\theta}{x\tan\theta},$$

這裏除以了 $x\tan\theta > 0$（因為 θ 是銳角）。這就是所求的結果。

若 $x < d\sec^3\theta$，則 $F > 0$，而條件 $F \le \mu R$ 同樣地變成

$$\mu \ge \frac{d\sec^3\theta - x}{x\tan\theta}.$$

想一想 摩擦力向哪個方向作用？我們怎樣不靠猜測就知道？

我們不需要猜。取 F 向上為正，鉛垂方程便會告訴我們它的正負號。摩擦力總可以寫成 $|F| \le \mu R$，而 F 的正負號只是決定我們得到兩個不等式中的哪一個。

第 (iii) 部分

(ii) 的兩種情況都是說 $|x - d\sec^3\theta| \le \mu x\tan\theta$，這等同於以下兩式同時成立：

$$x - d\sec^3\theta \le \mu x\tan\theta \qquad 及 \qquad d\sec^3\theta - x \le \mu x\tan\theta.$$

第二式給出 $d\sec^3\theta \le x(1+\mu\tan\theta)$。由於 $1+\mu\tan\theta > 0$，

$$\frac{x}{d} \ge \frac{\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta}.$$

第一式給出 $x(1-\mu\tan\theta) \le d\sec^3\theta$。若 $\mu < \cot\theta$，則 $\mu\tan\theta < 1$，所以 $1-\mu\tan\theta > 0$，我們可以相除而不必反轉不等號：

$$\frac{x}{d} \le \frac{\sec^3\theta}{1-\mu\tan\theta}.$$

（若 $\mu \ge \cot\theta$，則沒有上界：無論質量位於木板上多高的位置，摩擦力都能把它承住。）

第 (iv) 部分

質量位於牆壁與邊緣之間，當且僅當 $x < AB = d\sec\theta$。結合 (iii) 的下界，

$$\frac{d\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta} \le x < d\sec\theta.$$

除以 $d\sec\theta > 0$ 並乘以 $1+\mu\tan\theta > 0$，

$$\sec^2\theta < 1+\mu\tan\theta \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\theta < \mu\tan\theta,$$

這裏用了 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$。由於 $\tan\theta > 0$，我們可以除以它，得 $\tan\theta < \mu$，正如所求。

驗算

- 取 $\theta = 45°$、$d = 1$ 及 $\mu = 0.5$。則 $\sec^3\theta = 2\sqrt{2} \approx 2.83$，而 (iii) 容許 $1.89 \le x \le 5.66$。例如在 $x = 2$ 處，$F = mg(1-2/2\sqrt{2}) \approx 0.29mg$，$N = mg$，$R = mg/\sqrt{2}$，

而 $\mu R \approx 0.35mg$，所以平衡成立。這時質量位於邊緣之外（$AB = \sqrt{2}$），與 (iv) 一致，因為 $\tan 45^\circ = 1 > \mu$。

- 極限情況 $\mu = 0$（光滑牆壁）：(iii) 中的上下界收縮為 $x = d\sec^3\theta$，即 (i) 中唯一的位置。
- 以電腦對大量隨機的 θ、d、μ 及 x 值進行檢驗，確認各力平衡（包括對其他點取力矩），並且 $|F| \le \mu R$ 成立當且僅當 (iii) 的不等式成立。

常見錯誤

- 把邊緣處的反作用力當作鉛垂。木板是擱在一條邊緣上，所以光滑反作用力垂直於木板，而不是垂直於棱柱的頂面。
- 在力矩方程中，以 d 而非 $d\sec\theta$ 作為距離 AB。
- 把 $x(1-\mu\tan\theta) \le d\sec^3\theta$ 相除時，沒有檢查 $1-\mu\tan\theta$ 的正負號；這正是條件 $\mu < \cot\theta$ 出現的原因。

STEP 之外

這塊木板是靜定的（statically determinate）：三個未知反作用力，三條平衡方程，所以摩擦力被完全確定。若再加一個支點，方程便不再能確定各力；這時工程師會引入樑的彈性來決定負荷如何分配。(iii) 中的上下界是「平衡區域」的一個小例子，這個主題在穩定性的研究中會再次出現。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對剛體靜力學和摩擦有細緻的論述。

詳細解答

STEP II 2022，第 10 題

力學 • 斜面上的拋體

STEP II 2022，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分是標準的軌跡方程（trajectory equation），竅門在於利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，把它看成關於 $\tan\alpha$ 的二次方程（*quadratic*）。目標點能夠被擊中，當且僅當這個二次方程有實根，於是整道題便化為一個判別式（discriminant）條件。用水平坐標 (x, y) 寫出來，這個條件原來描述的是一個圓盤（disc），而之後每一部分都只是讀出一條直線與一個圓的相交位置。

解答

全題我們把拋射體（projectile）視為只受重力作用而自由運動的質點（particle），不計空氣阻力（air resistance），並取 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。

第 (i) 部分

以發射點為基準量度水平距離和高度。在時間 t，

$$s = ut\cos\alpha, \qquad h = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

由水平運動得 $t = \dfrac{s}{u\cos\alpha}$，代入後得

$$h = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2\cos^2\alpha},$$

即為所求。

第 (ii) 部分

設 $P = (x, y, y\tan\theta)$，並記 $s = \sqrt{x^2+y^2}$ 為它與大炮的水平距離。由於大炮可以指向任何方向，我們把它瞄準在經過 P 的鉛垂平面內；運動便在該平面內進行，而由第 (i) 部分，我們需要一個角 α（可以是負數，因為大炮可以向下指），使得

$$y\tan\theta = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2}\left(1+\tan^2\alpha\right).$$

若 $s = 0$，則 P 就是原點，垂直向上發射便可到達；而由於 $\sec^2\theta > \tan^2\theta$，下面的不等式在該點亦成立。對於 $s > 0$，設 $T = \tan\alpha$，它可以是任何實數。條件是

$$\frac{gs^2}{2u^2}\,T^2 - s\,T + \left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) = 0$$

有實根 T，即它的判別式非負：

$$s^2 \geq 4\cdot\frac{gs^2}{2u^2}\left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) \iff u^4 \geq 2gu^2 y\tan\theta + g^2s^2,$$

這是除以 $s^2 > 0$ 再乘以 u^4 的結果。除以 g^2 並利用 $s^2 = x^2+y^2$，

$$x^2 + y^2 + \frac{2u^2\tan\theta}{g}\,y \leq \frac{u^4}{g^2}.$$

對 y 配方（completing the square），並利用 $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$，

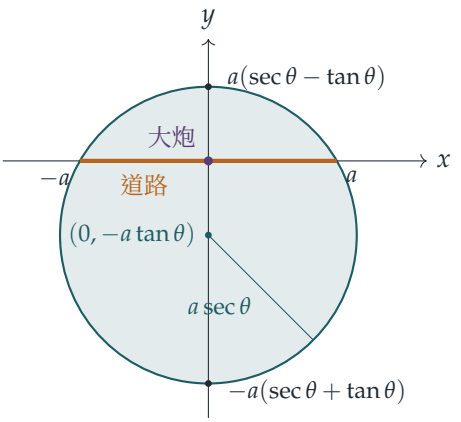
$$x^2 + \left(y + \frac{u^2\tan\theta}{g}\right)^2 \leq \frac{u^4}{g^2}\left(1+\tan^2\theta\right) = \frac{u^4\sec^2\theta}{g^2},$$

這正是所求的條件。

想一想 拋射體會不會在到達 P 之前就撞上斜坡地面？

不會。在發射所在的鉛垂平面內，拋射體的高度減去地面的高度，是關於水平距離的二次式，首項係數為負（拋物線減去一條直線），而它在大炮處和 P 處均為零。所以它在兩者之間為正：拋射體一直保持在地面之上，直至落在 P。

由此起記 $a = u^2/g$。可到達的點，就是其水平投影位於以 $(0, -a\tan\theta)$ 為圓心、$a\sec\theta$ 為半徑的圓盤內的那些點。



上圖（以 $\theta = 30°$ 繪製）顯示從上方俯視的可到達區域；「沿斜面向上」就是 y 的正方向。

第 (iii) 部分

沿斜面正上方即 $x = 0$、$y > 0$。條件變成 $(y + a\tan\theta)^2 \le a^2\sec^2\theta$，而由於 $y + a\tan\theta > 0$，這就是

$$y \le a(\sec\theta - \tan\theta).$$

斜面上水平坐標為 y 的點，沿斜面量度與原點的距離是 $y\sec\theta$。所以沿斜面向上最遠的點，距離為

$$a\sec\theta(\sec\theta - \tan\theta) = a\,\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta} = a\,\frac{1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\theta)},$$

即為所求。

沿斜面正下方即 $x = 0$、$y < 0$。此時條件給出 $y \ge -a(\sec\theta + \tan\theta)$，所以沿斜面向下最遠的點與大炮的距離為

$$a\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta) = a\,\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{u^2}{g(1-\sin\theta)}$$

第 (iv) 部分

道路是直線 $y = 0$（它位於斜面上，高度為 0）。在條件中代入 $y = 0$，得

$$x^2 \le a^2\sec^2\theta - a^2\tan^2\theta = a^2,$$

所以可到達的道路是 $-a \le x \le a$，長度為 $\dfrac{2u^2}{g}$，與在水平地面上相同。

現在把大炮放在 $(0, c, c\tan\theta)$。它與道路（即 x 軸）的距離是 $\sqrt{c^2 + c^2\tan^2\theta} = |c|\sec\theta$，所以 $r = |c|\sec\theta$。第 (ii) 部分的一切只取決於相對於大炮的位置，而從斜面上任何一點

看，斜面都是一樣的，因此我們可以沿用該條件，只需把 y 換成 $y-c$。道路（$y=0$）上可到達的部分滿足

$$x^2 \leq a^2\sec^2\theta - (a\tan\theta - c)^2.$$

想一想 大炮應該放在道路上方還是下方？

可到達的長度是 $2\sqrt{a^2\sec^2\theta-(a\tan\theta-c)^2}$，當被減去的平方項為零，即 $c = a\tan\theta > 0$ 時最大。所以大炮應放在道路上方的斜面上，距離恰好使道路穿過可到達圓盤的圓心，此時道路截出一條直徑。最佳距離是

$$r = a\tan\theta\sec\theta = \frac{u^2\sin\theta}{g\cos^2\theta},$$

而道路的最大長度就是圓盤的直徑，

$$2a\sec\theta = \frac{2u^2}{g\cos\theta}.$$

驗算

- 取 $\theta = 0$（水平地面），第 (ii) 部分變成 $x^2+y^2 \leq (u^2/g)^2$，即熟悉的各方向最大射程 u^2/g；(iii) 的兩個答案都化為 u^2/g，而 (iv) 中 $r=0$，長度為 $2u^2/g$。
- 沿斜面向上的答案 $u^2/\big(g(1+\sin\theta)\big)$ 正是斜面（inclined plane）上向上發射的標準最大射程，這是圓盤正確的好跡象。
- 取 $u = 12\ \mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $\theta = 0.5\ \mathrm{rad}$，用電腦掃描所有發射角，得出沿斜面向上的最大射程為 9.932 m，向下為 28.226 m，與 $u^2/\big(g(1\pm\sin\theta)\big)$ 吻合；移動大炮後的最佳道路長度為 $33.49\ \mathrm{m} = 2u^2/(g\cos\theta)$。

常見錯誤

- 把 (x,y) 當作沿斜面量度的距離。它們是水平坐標，所以沿斜面向上的距離是 $y\sec\theta$，而不是 y。
- 忘記大炮可以指向水平線以下：$\tan\alpha$ 可取所有實數，正因如此，判別式條件就是問題的全部。
- 把移動後的大炮放在道路下方。圓盤的圓心在大炮的斜坡下方，所以大炮必須位於道路上方。

STEP 之外

第 (ii) 部分的圓盤，是所有可能軌跡的包絡（*envelope*）——「安全拋物面」（paraboloid of safety）$z = \frac{u^2}{2g} - \frac{g(x^2+y^2)}{2u^2}$——的一個截面；用任何平面與這個拋物面相交，都會得到一條圓錐曲線（conic），在這裏其投影是一個圓。曲線族的包絡，在大學一年級的力學和微分方程（differential equations）課程中都是很自然的課題。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是一個好去處，可以看到以這種幾何上的細緻手法處理拋射體問題。

詳細解答

STEP II 2022，第 11 題

概率與統計 • 期望損失的最優化

STEP II 2022，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

按那 T 枝被測試的記憶棒的情況來劃分事件。只要其中任何一枝受感染，就不會有任何東西放上網絡，損失為零；只有當全部 T 枝都乾淨時，網絡上的那場賭博才會出現。把期望損失（expected loss）寫成 q 的函數，(ii) 就變成單變量的最大化（maximisation）問題；而比較相鄰的 T 值（用差分（difference）而不是導數（derivative），因為 T 是整數）則可處理 (iii)。

解答

全文中，損失為 $-x$ 即表示獲利 £x。設 L 為以英鎊計的淨損失。各記憶棒是否受感染互相獨立（independent），每枝乾淨的概率（probability）為 q，所以任何指定的 m 枝記憶棒全部乾淨的概率是 q^m。由對稱性（symmetry）可知，選哪 T 枝來測試並不重要。

第 (i) 部分

先考慮 $T > 0$。共有三種結果。

- 某枝被測試的記憶棒受感染（概率為 $1 - q^T$）：其餘的全被銷毀，沒有任何記憶棒被使用，$L = 0$。
- 全部 T 枝被測試的記憶棒都乾淨，但其餘 $N - T$ 枝中至少有一枝受感染（概率為 $q^T(1 - q^{N-T})$）：我們要支付消毒費用，所以 $L = D$。
- 全部 N 枝記憶棒都乾淨（概率為 $q^T q^{N-T} = q^N$）：被使用的 $N - T$ 枝每枝賺 £1，所以 $L = -(N - T)$。

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(L) &= D\,q^T\left(1-q^{N-T}\right)-(N-T)\,q^N\\ &= D\,q^T-(N-T+D)\,q^N.\end{aligned}$$

當 $T=0$ 時，全部 N 枝記憶棒都被使用：$L=D$ 的概率為 $1-q^N$，$L=-N$ 的概率為 q^N，得 $D-(N+D)q^N$。這正是同一公式取 $T=0$ 的結果，所以對每個 $0\le T<N$，

$$\mathrm{E}(L)=D\,q^T-(N-T+D)\,q^N.$$

第 (ii) 部分

α 的界。由於 $D>0$、$T\ge 0$ 及 $N-T>0$，分子和分母分別滿足 $DT\ge 0$ 及 $N(N-T+D)>0$，所以 $\alpha\ge 0$。此外

$$N(N-T+D)-DT=N(N-T)+D(N-T)=(N-T)(N+D)>0,$$

所以 $DT<N(N-T+D)$，即 $\alpha<1$。

最大值。固定 N、D、T，對 $0\le q\le 1$ 記 $f(q)=Dq^T-(N-T+D)q^N$。

若 $T=0$，則 $\alpha=0$ 且 $f(q)=D-(N+D)q^N$，它隨 q 遞減，所以最大值出現在 $q=0$，即 $q^N=0=\alpha$ 之處。

若 $T\ge 1$，求導：

$$f'(q)=DTq^{T-1}-N(N-T+D)q^{N-1}=N(N-T+D)\,q^{T-1}\left(\alpha-q^{N-T}\right).$$

> **想一想** 我們怎樣知道這個駐點（stationary point）是極大點，而且是整個區間上的最大值？

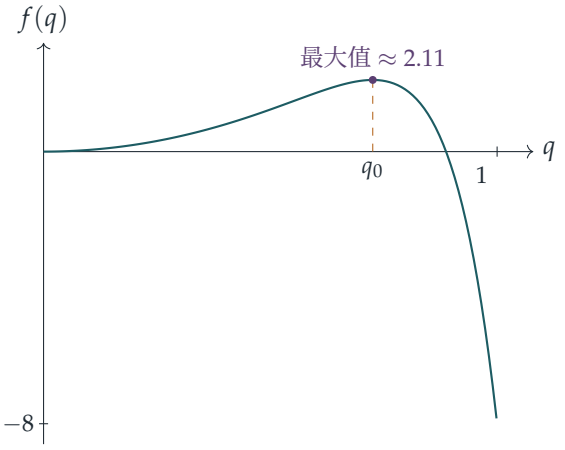
當 $0<q\le 1$ 時，因子 $N(N-T+D)q^{T-1}$ 是正數。因為 $N-T\ge 1$，q^{N-T} 由 0 嚴格遞增（strictly increasing）至 1，而 $0<\alpha<1$，所以恰好有一個 $q_0\in(0,1)$ 使 $q_0^{N-T}=\alpha$。當 $q<q_0$ 時 $f'(q)>0$，當 $q>q_0$ 時 $f'(q)<0$。所以 f 在 q_0 之前上升，之後下降：它在 $[0,1]$ 上的最大值出現在 $q^{N-T}=\alpha$ 之處，得證。

最大值是多少。在 q_0 處有 $q_0^{N-T}=\alpha$，所以 $q_0=\alpha^{1/(N-T)}$ 及 $q_0^T=\alpha^{T/(N-T)}=\alpha^k$。於是

$$\begin{aligned}f(q_0)&=q_0^T\left(D-(N-T+D)\,q_0^{N-T}\right)=\alpha^k\left(D-(N-T+D)\cdot\frac{DT}{N(N-T+D)}\right)\\ &=\alpha^k\left(D-\frac{DT}{N}\right)=\frac{D(N-T)\,\alpha^k}{N}.\end{aligned}$$

所以最大的期望淨損失是 £$D(N-T)\alpha^k/N$。（當 $T=0$ 時，這就是 £D；若取 $\alpha^0=1$，便與 $f(0)=D$ 吻合。）

下圖顯示 $N=10$、$T=2$、$D=5$ 時的 f，此時 $\alpha=\frac{1}{13}$。



第 (iii) 部分

現在固定 N、D 和 q，並記 $E_T = Dq^T - (N - T + D)q^N$。由於 T 只取整數值，「隨 T 遞增」的意思是對 $0 \le T \le N - 2$ 有 $E_{T+1} > E_T$。相減得

$$\begin{aligned} E_{T+1} - E_T &= Dq^{T+1} - Dq^T + q^N \\ &= q^T\left(q^{N-T} - Dp\right), \end{aligned}$$

這裏用了 $q - 1 = -p$。

> **想一想** 括號內的式子與 T 有關。怎樣才能找到一個 β 同時適用於所有 T？

因為 $0 < q \le 1$ 及 $N - T \le N$，我們有 $q^{N-T} \ge q^N$，所以只須令 $q^N > Dp$ 便足夠，而這個條件與 T 無關。由伯努利（Bernoulli）不等式（用簡單的歸納法（induction）即可證明：若 $(1-p)^n \ge 1 - np$，則 $(1-p)^{n+1} \ge (1-np)(1-p) = 1 - (n+1)p + np^2$），

$$q^N = (1-p)^N \ge 1 - Np.$$

所以若 $1 - Np > Dp$，即 $p < \dfrac{1}{N+D}$，則 $q^{N-T} \ge q^N \ge 1 - Np > Dp$，而且 $q^T > 0$。因此，取

$$\beta = \frac{1}{N+D} > 0,$$

每個 $p < \beta$ 都使所有 T 均有 $E_{T+1} > E_T$，所以期望損失是 T 的遞增函數。

對這樣的 p，$E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}$ 中最小的是 E_0。所以當 p 足夠小時，最佳策略是 $T = 0$：甚麼都不測試，使用全部 N 枝記憶棒。這是合理的：如果感染很罕見，測試大多只會銷毀本來可以賺錢的好記憶棒。

驗算

- 取 $N = 1$、$T = 0$，公式給出 $D - (1 + D)q$：以概率 p 損失 D，以概率 q 獲利 1，與預期相符。
- $q = 1$（完全沒有感染）給出 $D - (N - T + D) = -(N - T)$，即必定獲利 $N - T$。
- 取 $N = 10$、$T = 2$、$D = 5$：$\alpha = \frac{1}{13}$，$k = \frac{1}{4}$，最大值為 $4 \cdot 13^{-1/4} \approx 2.107$，與上圖的峯值吻合。我們亦用電腦列出 $N \leq 7$ 時所有感染情況，驗證了第 (i) 部分的公式。
- 取 $N = 10$、$D = 5$、$p = 0.3$（遠大於 $\beta = \frac{1}{15}$），期望損失其實隨 T 遞減，由 $T = 0$ 時約 4.58 降至 $T = 9$ 時的 0.03：可見對 p 確實需要加上某種條件。

常見錯誤

- 遺漏「某枝被測試的記憶棒受感染」這個結果：它對期望值的貢獻是 0，但仍然佔去 $1 - q^T$ 的概率。
- 把獲利算成 $£N$ 而不是 $£(N - T)$：即使被測試的記憶棒是乾淨的，它們也會被銷毀。
- 在 (iii) 中不加說明就對整數 T 求導，或選取了與 T 有關的 β。

STEP 之外

這是統計決策理論（statistical decision theory）中的一個小問題：當某個參數（p）未知時，選擇一個行動（這裏是 T）以使期望損失最小。第 (ii) 部分體現了極小化極大（minimax）的思想：它為每個策略找出在所有可能的 p 之下的最壞情況，這正是謹慎的管理者可能會拿來比較的東西。測試成本與漏檢缺陷成本之間的同一種取捨，也是驗收抽樣（acceptance sampling）和羣組檢測（group testing）背後的原理。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）是建立本題所用期望值工具的好起點。

詳細解答

STEP II 2022，第 12 題

概率與統計 • 平均值、中位數與眾數

STEP II 2022，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

一切都源自累積分佈函數（cumulative distribution function）F，而這裏它只是一個簡單的多項式。由於 F 在 $[0,1]$ 上遞增，數 a 位於中位數（median）之下，當且僅當 $\mathrm{F}(a) < \frac{1}{2}$。因此，要比較平均值（mean）或眾數（mode）與中位數的大小，我們根本不需要求出中位數本身：只需計算 F 在平均值或眾數處的值，再與 $\frac{1}{2}$ 比較即可。

解答

第 (i) 部分

由於總概率為 1，

$$1 = k\int_0^1 \left(x^n - x^{n+1}\right)\mathrm{d}x = k\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{k}{(n+1)(n+2)},$$

所以 $k = (n+1)(n+2)$，正如所求。於是

$$\mu = k\int_0^1 \left(x^{n+1} - x^{n+2}\right)\mathrm{d}x = (n+1)(n+2)\cdot\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{n+1}{n+3}.$$

第 (ii) 部分

當 $0 \le x \le 1$ 時，

$$\mathrm{F}(x) = (n+1)(n+2)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right) = x^{n+1}\big((n+2) - (n+1)x\big).$$

由於在 $(0,1)$ 上 $\mathrm{f} > 0$，F 在該區間上嚴格遞增（strictly increasing），而中位數 m 是唯一滿足 $\mathrm{F}(m) = \frac{1}{2}$ 的點。因此

$$\mu < m \iff \mathrm{F}(\mu) < \tfrac{1}{2}.$$

現在代入 $\mu = \frac{n+1}{n+3}$，

$$(n+2) - (n+1)\mu = \frac{(n+2)(n+3) - (n+1)^2}{n+3} = \frac{3n+5}{n+3},$$

所以

$$\mathrm{F}(\mu) = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n+1} \frac{3n+5}{n+3}.$$

因此，條件 $\mathrm{F}(\mu) < \frac{1}{2}$ 兩邊乘以正數 $2\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}$ 後，變為

$$\frac{2(3n+5)}{n+3} < \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}.$$

由於 $\frac{2(3n+5)}{n+3} = \frac{6(n+3)-8}{n+3} = 6 - \frac{8}{n+3}$ 而且 $\frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$，這正是題目給出的不等式。所以只要該不等式成立，$\mu$ 就小於中位數。

要證明這個不等式，設 $N = n+1$，於是 $N \geq 3$ 是整數。$\left(1 + \frac{2}{N}\right)^N$ 的二項展開（binomial expansion）中每一項都是正數，而且共有 $N+1 \geq 4$ 項，所以總和至少等於首四項之和：

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{2}{N}\right)^N &\geq 1 + N\cdot\frac{2}{N} + \frac{N(N-1)}{2}\cdot\frac{4}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)}{6}\cdot\frac{8}{N^3} \\ &= 3 + 2\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{4}{3}\left(1 - \frac{3}{N} + \frac{2}{N^2}\right) \\ &= \frac{19}{3} - \frac{6}{N} + \frac{8}{3N^2}.\end{aligned}$$

想一想 這個四項之和只是一個下界。我們怎樣證明它大於 $6 - \frac{8}{N+2}$？

我們把兩者相減，再乘以正的分母 $3N^2(N+2)$ 以消去分母：

$$\begin{aligned}&3N^2(N+2)\left[\frac{19}{3} - \frac{6}{N} + \frac{8}{3N^2} - 6 + \frac{8}{N+2}\right] \\ &\quad = N^2(N+2) - 18N(N+2) + 8(N+2) + 24N^2 \\ &\quad = N^3 + 8N^2 - 28N + 16.\end{aligned}$$

當 $N \geq 3$ 時，我們有 $N^2 + 8N - 28 \geq 9 + 24 - 28 = 5 > 0$，所以 $N^3 + 8N^2 - 28N + 16 = N(N^2 + 8N - 28) + 16 > 0$。因此

$$6 - \frac{8}{n+3} < \frac{19}{3} - \frac{6}{N} + \frac{8}{3N^2} \leq \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1},$$

即題目給出的不等式對每個整數 $n > 1$ 都成立，所以 X 的中位數大於 μ。

第 (iii) 部分

在 $(0,1)$ 上，

$$\mathrm{f}'(x) = k\left(nx^{n-1} - (n+1)x^n\right) = kx^{n-1}\big(n - (n+1)x\big),$$

當 $x < \frac{n}{n+1}$ 時它是正數，當 $x > \frac{n}{n+1}$ 時它是負數。所以 f 先升後降，眾數為 $M = \frac{n}{n+1}$。與第 (ii) 部分一樣，$M > m$ 當且僅當 $\mathrm{F}(M) > \frac{1}{2}$。由於 $(n+2) - (n+1)M = (n+2) - n = 2$，

$$\mathrm{F}(M) = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

所以我們需要 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{1}{4}$，即

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4.$$

? **想一想** 既然 n 可以是 2 或以上的任何整數，題目給出關於 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 的事實怎樣幫到我們？

由於該函數在 x 為正數時遞減，它在任何整數 $n \geq 2$ 處的值都不大於它在 $x = 2$ 處的值：

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} < 4.$$

因此 $\mathrm{F}(M) > \frac{1}{2}$，即 X 的眾數大於其中位數。

綜合各部分，對每個 $n > 1$ 都有 平均值 $<$ 中位數 $<$ 眾數。

驗算

- 取 $n = 2$：平均值為 $\frac{3}{5} = 0.6$，眾數為 $\frac{2}{3} \approx 0.667$。以數值方法解 $4x^3 - 3x^4 = \frac{1}{2}$，得中位數 ≈ 0.6143，恰好介乎兩者之間。此外，$\mathrm{F}(0.6) = 0.4752 < \frac{1}{2}$，而 $\mathrm{F}(\frac{2}{3}) = \frac{16}{27} \approx 0.593 > \frac{1}{2}$。
- 當 $n = 2\,(N = 3)$ 時，展開式剛好有四項，所以下界取等號：兩邊都等於 $\frac{125}{27} \approx 4.63$，穩穩大於 $6 - \frac{8}{5} = 4.4$。
- 平均值 $<$ 中位數 $<$ 眾數這個大小次序，已用電腦對 2 至 79 的每個 n 驗證過。

常見錯誤

- 試圖明確求出中位數：方程 $x^{n+1}(n+2-(n+1)x) = \frac{1}{2}$ 沒有簡潔的解，而你也不需要求出它。

- 弄錯不等號方向：由於 F 遞增，$\mu < m$ 對應的是 $\mathrm{F}(\mu) < \frac{1}{2}$。
- 忘記說明為何可以捨去後面的二項式項（因為它們全是正數）。

STEP 之外

這個密度函數是一個貝塔分佈（Beta distribution）Beta$(n+1, 2)$，它是 $[0, 1]$ 上最重要的分佈族之一，在貝葉斯統計（Bayesian statistics）中處於核心地位。平均值 < 中位數 < 眾數這個次序，是左邊有長尾（負偏態，negative skew）的分佈的典型特徵，但它並非普遍定律，所以這裏必須加以證明。第 (iii) 部分中的遞減函數在 $x \to \infty$ 時趨向 e，這是一個經典極限，你將會在分析（analysis）課程中正式學到。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）對貝塔分佈有出色的論述。

詳細解答

STEP III 2022，第 1 題

純數學 • 多項式的根

STEP III 2022，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

把參數化（parametrisation）代入圓的方程，就能把「兩條曲線在哪裏相交？」轉化為「一個四次方程（quartic）的根是甚麼？」；此後一切都只靠根與係數的關係（relationships between roots and coefficients）完成，完全不必解這個四次方程。另一個有用的技巧是：倒數（reciprocals）$1/t_i$ 正是把同一個四次方程的係數倒序排列後所得方程的根。至於最後一部分，「相切」（touching）的意思就是有重根（repeated root）。

解答

第 (i) 部分

參數為 t 的點位於 C_2 上，當且僅當

$$(ct-a)^2+\left(\frac{c}{t}-b\right)^2=r^2.$$

展開得 $c^2t^2-2act+a^2+\dfrac{c^2}{t^2}-\dfrac{2bc}{t}+b^2=r^2$。由於 $t\neq 0$，我們可以乘以 t^2 而不會增加或失去任何解：

$$c^2t^4-2act^3+(a^2+b^2-r^2)t^2-2bct+c^2=0.$$

因此每個 t_i 都是 $(*)$ 的根。不同的 t 值給出不同的點（它們的 x 坐標 ct 各不相同），所以四個點 P_i 對應四個互不相同的參數。一個四次方程最多只有四個根，因此 $t_1,\ldots,t_4$ 恰好就是 $(*)$ 的全部根。

第 (ii) 部分

把 $(*)$ 除以 c^2，各根之和以及兩兩之積的和分別為

$$\sum t_i = \frac{2a}{c}, \qquad \sum_{i<j} t_i t_j = \frac{a^2+b^2-r^2}{c^2}.$$

利用 $\left(\sum t_i\right)^2 = \sum t_i^2 + 2\sum_{i<j} t_i t_j$，

$$\sum_{i=1}^{4} t_i^2 = \frac{4a^2}{c^2} - \frac{2(a^2+b^2-r^2)}{c^2} = \frac{2}{c^2}\left(a^2-b^2+r^2\right),$$

這正是所求的結果。

想一想 怎樣才能求得 $\sum 1/t_i^2$，而不必處理繁複的公分母？

在 $(*)$ 中令 $u = 1/t$。由於常數項 $c^2 \neq 0$，沒有任何根為零，所以可以把 $(*)$ 除以 t^4：

$$c^2 - 2acu + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2bcu^3 + c^2u^4 = 0,$$

即 $c^2u^4 - 2bcu^3 + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2acu + c^2 = 0$。它的根就是各個 $1/t_i$。這正是把 $(*)$ 中的 a 與 b 互換所得的方程，所以同樣的計算給出

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{t_i^2} = \frac{2}{c^2}\left(b^2-a^2+r^2\right).$$

第 (iii) 部分

點 P_i 為 $(ct_i,\, c/t_i)$，所以 $OP_i^2 = c^2t_i^2 + \dfrac{c^2}{t_i^2}$。求和並利用第 (ii) 部分，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} OP_i^2 &= c^2\sum t_i^2 + c^2\sum \frac{1}{t_i^2} \\ &= 2(a^2-b^2+r^2) + 2(b^2-a^2+r^2) \\ &= 4r^2,\end{aligned}$$

這就是所求的結果。留意圓心 (a,b) 已完全消失。

第 (iv) 部分

想一想 以 $(*)$ 的根而言，「相切」是甚麼意思？

設 $f(t) = (ct-a)^2 + (c/t-b)^2 - r^2$，即動點到圓心距離的平方減去 r^2。曲線在參數 t_0 處與圓相切，當 $f(t_0) = 0$ 且 $f'(t_0) = 0$：該點在圓上，而且在一階近似下，它與圓心的

距離沒有改變，因此曲線在該處的方向垂直於半徑，也就是圓的切線方向。（這裏用到速度 $(c, -c/t^2)$ 永不為零這一事實。）$(*)$ 中的四次多項式就是 $t^2 f(t)$，而由於 $t_0 \neq 0$，f 在 t_0 有二重根當且僅當 $(*)$ 在 t_0 有二重根。

所以，若 C_1 與 C_2 在兩個不同的點相切，其參數為 $\alpha \neq \beta$，則 α 和 β 都是 $(*)$ 的二重根。這已涵蓋全部四個根，因此

$$c^2t^4 - 2act^3 + (a^2 + b^2 - r^2)t^2 - 2bct + c^2 = c^2(t-\alpha)^2(t-\beta)^2.$$

各根之積。比較常數項，$c^2\alpha^2\beta^2 = c^2$，所以 $(\alpha\beta)^2 = 1$，即 $\alpha\beta = \pm 1$。

各根之和。比較 t^3 項，$2(\alpha+\beta) = \dfrac{2a}{c}$，所以 $\alpha + \beta = \dfrac{a}{c}$。

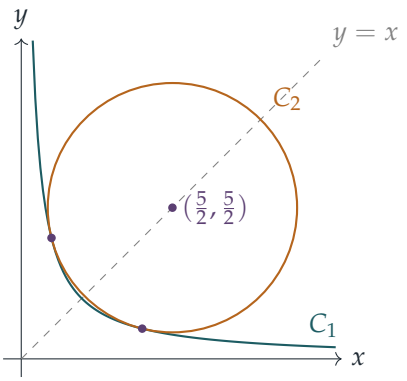
每三根之積的和。比較 t 項，$2\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{2b}{c}$，所以 $\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{b}{c}$。

把後兩式相除（或把第二式代入第三式），得 $b = \alpha\beta\, a$。因此

$$\alpha\beta = 1 \implies b = a, \qquad \alpha\beta = -1 \implies b = -a,$$

所以圓心 (a, b) 位於 $y = x$ 或 $y = -x$ 上。（若 $a = 0$，則 $b = 0$，圓心為原點，同時位於兩條直線上。）

下圖展示 $c = 1$、$\alpha = 2$、$\beta = \frac{1}{2}$ 的情況。比較係數得 $a = b = \frac{5}{2}$ 及 $r^2 = \frac{17}{4}$，而圓與雙曲線（hyperbola）相切於 $(2, \frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, 2)$。



驗算

- 在第 (iii) 部分，取以原點為圓心的圓 $x^2 + y^2 = r^2$，並設 $c = 1$ 及 $r^2 > 2$。由對稱性，四個交點為 $(p, q), (q, p), (-p, -q), (-q, -p)$，每點與原點的距離都是 r，所以總和確實是 $4r^2$。
- 在圖中的例子裏，$(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ 到 $(2, \frac{1}{2})$ 距離的平方為 $\frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} = 4.25$，正如所料。該處的半徑方向 $(-\frac{1}{2}, -2)$ 與曲線方向 $(1, -\frac{1}{4})$ 互相垂直，證實了相切。

- 第 (ii) 部分的公式已用電腦對數千個隨機的圓進行驗證，方法是以數值方法解該四次方程。

常見錯誤

- 弄錯 $\sum t_i t_j$ 的正負號。對於 $t^4 + pt^3 + qt^2 + \ldots$，各根之和是 $-p$，但兩兩之積的和是 $+q$。
- 在第 (iv) 部分只用了各根之積。這只給出 $\alpha\beta = \pm 1$，單憑這一點並不能說明 (a, b) 的任何性質。還需要再比較一個係數，才能把 a 和 b 引進來。
- 沒有說明為何「相切」會給出二重根。理由是條件 $f(t_0) = f'(t_0) = 0$，連同 $t_0 \neq 0$。

STEP 之外

根與係數之間的關係就是初等對稱函數（elementary symmetric functions）。一條經典定理指出，各根的任何對稱多項式（symmetric polynomial），例如 $\sum t_i^2$ 或 $\sum t_i^{-2}$，都可以用係數表示。倒數代換 $u = 1/t$ 讓我們初步窺見射影（projective）幾何的思想；而一條圓錐曲線（conic）與一個圓最多相交於四點，這是關於平面曲線相交的貝祖定理（Bézout's theorem）的特例。如想進一步了解多項式及其根，可參閱 Allenby, *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）；如想多做這類風格的練習，可參閱 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）。

詳細解答

STEP III 2022，第 2 題

純數學 • 無窮遞降法

STEP III 2022，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 1.5 節無窮遞降法中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/infinite-descent.html

關鍵思路

這是費馬（Fermat）的無窮遞降法（*method of infinite descent*）。假設存在一組非零整數解。透過整除性（divisibility）論證，可證明所有變量都有一個公因數。把它除去，便得到同一類（或密切相關的一類）的新解，而且各數都是絕對值嚴格更小的非零整數。這個過程不可能無止境地進行下去，因為正整數不可能無止境地遞減。每一部分的工夫在於找出應考慮的質數（prime）（2 或 3），並驗證新解確實與舊解具有相同的形式。

解答

全程我們會用到兩個事實。若質數 m 整除 x^k，則 m 整除 x。另外，若 x 是 $m \geq 2$ 的非零倍數，則 x/m 是非零整數，且 $|x/m| < |x|$。

第 (i) 部分

假設 $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$，其中 a, b, c 為非零整數。那麼

$$a^3 = -2\left(b^3 + 2c^3\right)$$

是偶數。奇數的立方是奇數，所以 a 是偶數。設 $a = 2p$，則 p 是非零整數，且 $|p| = \frac{1}{2}|a| < |a|$。代入得

$$8p^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4p^3 + b^3 + 2c^3 = 0.$$

這就是第一個結論。

現在對新方程重複同一論證，得 $b^3 = -2\left(2p^3 + c^3\right)$，所以 b 是偶數，設 $b = 2q$，於是

$$4p^3 + 8q^3 + 2c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2p^3 + 4q^3 + c^3 = 0.$$

再做一次，$c^3 = -2\left(p^3 + 2q^3\right)$，所以 $c = 2r$，且

$$2p^3 + 4q^3 + 8r^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p^3 + 2q^3 + 4r^3 = 0.$$

這裏 $p = a/2$、$q = b/2$ 和 $r = c/2$ 都是非零整數，且 $|p| < |a|$、$|q| < |b|$ 及 $|r| < |c|$，正如所求。

想一想 為甚麼這表示根本沒有解，而不只是「另一組解」？

假設存在非零整數解。在所有這些解之中，選取 $|a|$ 盡可能小的一組。這是做得到的，因為任何非空的正整數集合都有最小元素（least element）。上述論證於是給出另一組非零整數解 (p, q, r)，且 $|p| < |a|$，這與 $|a|$ 的最小性矛盾。所以這樣的整數 a、b、c 並不存在。（等價地說，這個過程會給出一個由正整數組成、無窮且嚴格遞減的數列 $|a| > |a/2| > |a/4| > \cdots$，而這是不可能的。）

第 (ii) 部分

這次要用的質數是 3。假設 $9a^3 + 10b^3 + 6c^3 = 0$，其中 a, b, c 為非零整數。

- 由於 $10b^3 = -3\left(3a^3 + 2c^3\right)$，3 整除 $10b^3$。因為 3 不整除 10，所以它整除 b^3，從而整除 b。設 $b = 3q$，則 $9a^3 + 270q^3 + 6c^3 = 0$，即

$$3a^3 + 90q^3 + 2c^3 = 0.$$

- 現在 $2c^3 = -3\left(a^3 + 30q^3\right)$，所以 $3 \mid c$。設 $c = 3r$：$3a^3 + 90q^3 + 54r^3 = 0$，即

$$a^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0.$$

- 最後 $a^3 = -3\left(10q^3 + 6r^3\right)$，所以 $3 \mid a$。設 $a = 3p$：$27p^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0$，即

$$9p^3 + 10q^3 + 6r^3 = 0.$$

所以 $(p, q, r) = (a/3, b/3, c/3)$ 是同一方程的非零整數解，且 $|p| < |a|$。與第 (i) 部分一樣，選取 $|a|$ 最小的一組解，便得出矛盾，所以不存在非零整數解。

第 (iii) 部分

任何不是 3 的倍數的整數，都可以寫成 $3n \pm 1$，其中 n 為某個整數。那麼

$$(3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1 = 3\left(3n^2 \pm 2n\right) + 1,$$

即比 3 的某個倍數大 1。另一方面，3 的倍數的平方是 3 的倍數（事實上更是 9 的倍數）。

因此每個平方數除以 3 的餘數是 0 或 1，而餘數為 0 當且僅當該數本身是 3 的倍數。對於 x^2+y^2，可能的餘數是

$$0+0=0, \qquad 0+1=1, \qquad 1+1=2.$$

所以 x^2+y^2 是 3 的倍數，僅當兩個餘數都是 0，亦即僅當 x 和 y 都是 3 的倍數。

現在假設 $a^2+b^2=3c^2$，其中 a,b,c 為非零整數。右方是 3 的倍數，所以由剛證明的結果，$a=3p$ 及 $b=3q$。於是

$$9p^2+9q^2=3c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2=3\left(p^2+q^2\right).$$

所以 c^2 是 3 的倍數。由第一個結果，c 必定是 3 的倍數，否則 c^2 會比 3 的某個倍數大 1。設 $c=3r$：

$$9r^2=3\left(p^2+q^2\right) \quad \Longrightarrow \quad p^2+q^2=3r^2.$$

這是同一方程的非零整數解，且 $|p|<|a|$。選取 $|a|$ 最小的一組解，便得出與之前相同的矛盾，所以不存在非零解。

第 (iv) 部分

這裏我們以 4 為模（modulo）進行計算。偶數 $2m$ 的平方是 $4m^2\equiv 0$，而奇數 $2m+1$ 的平方是 $4m^2+4m+1\equiv 1 \pmod 4$。所以三個平方數之和的餘數，等於三項中奇數的個數（0、1、2 或 3）。它是 4 的倍數，僅當三個數都是偶數。

? **想一想** 若把 $a^2+b^2+c^2=4abc$ 中的所有數減半，會得回同一條方程嗎？

不會。若 $a=2p$、$b=2q$ 及 $c=2r$，方程變為 $4(p^2+q^2+r^2)=32pqr$，即 $p^2+q^2+r^2=8pqr$。係數加倍了。所以我們改為證明一個更強、而且在減半之下確實保持不變的命題：

命題。對任何整數 $k\geq 2$，都不存在非零整數使得 $a^2+b^2+c^2=2^kabc$。

假設存在。在所有這樣的解之中（$k\geq 2$ 可取任何值），選取 $|a|$ 盡可能小的一組。由於 $k\geq 2$，右方 2^kabc 是 4 的倍數。所以 $a^2+b^2+c^2$ 是 4 的倍數，由上面的說明，a、b 和 c 都是偶數：$a=2p$、$b=2q$、$c=2r$。於是

$$4\left(p^2+q^2+r^2\right)=2^k\cdot 8pqr \quad \Longrightarrow \quad p^2+q^2+r^2=2^{k+1}\,pqr.$$

這是一組非零整數解，其指數為 $k+1\geq 2$，且 $|p|<|a|$，與 a 的選取矛盾。所以命題成立。取 $k=2$ 的情況，即知不存在非零整數 a,b,c 使得 $a^2+b^2+c^2=4abc$。

驗算

- 以電腦搜尋所有滿足 $|a|,|b|,|c| \leq 40$ 的非零 a,b,c，四條方程都找不到任何解，對 $2 \leq k \leq 6$ 的 $a^2+b^2+c^2=2^k abc$ 亦然。
- 令第 (iv) 部分得以成立的，正是係數中 2 的冪。某些這種形式的方程*確實*有解，例如 $1^2+1^2+1^2=3\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ 及 $3^2+3^2+3^2=1\cdot 3\cdot 3\cdot 3$。在這些例子中係數是奇數，所以模 4 的論證無從入手。
- 試把遞降法套用在一個「差一點」的例子上：$a^2+b^2=3c^2$ 在 $(a,b,c)=(1,1,1)$ 時不成立，因為 $1+1=2$ 不是 3 的倍數，這正是第 (iii) 部分中「$1+1=2$」的情況。

常見錯誤

- 忘記說明遞降為何導致矛盾。「我們得到更小的解」並不構成證明，除非你引用最小解（或正整數不可能無止境遞減這一事實）。
- 在第 (iv) 部分把數減半後，聲稱方程不變。事實並非如此：係數加倍了，這正是命題必須加強的原因。
- 寫「$3 \mid c^2$ 所以 $3 \mid c$」而不給理由。這裏的理由是第 (iii) 部分的第一個結果（更一般地說，因為 3 是質數）。

STEP 之外

費馬正是用無窮遞降法證明 $x^4+y^4=z^2$ 沒有正整數解，從而解決了他的最後定理（費馬大定理，Last Theorem）中 $n=4$ 的情況。這裏的每一次遞降，實際上都等於證明：以某個適當的質數冪為模時，方程沒有變量不全被該質數整除的解。這是邁向 p 進數（p-adic numbers）以及現代數論中局部—整體（local–global）思想的第一步。著名的方程 $a^2+b^2+c^2=3abc$（馬爾可夫方程（Markov equation））有無窮多組解，它們由一個優美的樹狀結構生成。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）正好以這個程度講解遞降法、同餘（congruence）和平方和。

詳細解答

STEP III 2022，第 3 題

純數學 • 隱函數微分法

STEP III 2022，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

用隱函數求導（implicit differentiation）。駐點（stationary point）要求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的分子為零，由此可把 y 以 x 表示（或得出兩者之間的一個線性關係）。把它代回曲線方程，便只剩下一條關於 x 的方程，問題於是變成：這條方程何時有兩個實根（real roots）？在 (i) 中，它其實是一條變了裝的二次方程（quadratic）；在 (ii) 中，它是一條四次方程（quartic），而數算其根的方法是找出它的轉向點（turning point）。

解答

第 (i) 部分

將 $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ 對 x 作隱函數求導，得

$$2ax + by + (bx + 2cy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

在駐點處 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，所以 $2ax + by = 0$，即 $y = -\frac{2a}{b}x$（因為 $abc \neq 0$，所以可以除以 b）。代入曲線方程，

$$ax^2 - 2ax^2 + \frac{4a^2c}{b^2}x^2 = 1$$
$$\frac{a(4ac - b^2)}{b^2}x^2 = 1.$$

若 $4ac - b^2 \leq 0$，則對所有 x，左方都 ≤ 0（記得 $a > 0$），所以根本沒有駐點。因此，若曲線有兩個駐點，必有 $4ac - b^2 > 0$，即 $b^2 < 4ac$，得證。（反過來，當 $b^2 < 4ac$ 時，得 $x = \pm|b|/\sqrt{a(4ac - b^2)}$，恰好給出兩個點。）

想一想 在這些點上，$bx+2cy$ 會不會也是零，以致導數其實沒有定義？

若 $2ax+by=0$ 與 $bx+2cy=0$ 同時成立，由於行列式（determinant）$4ac-b^2$ 不為零，唯一的解是 $x=y=0$，而這點並不在曲線上。所以這兩點確實滿足 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$。

第 (ii) 部分

將 $ay^3+bx^2y+cx=1$ 作隱函數求導，得

$$(3ay^2+bx^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2bxy+c=0.$$

因此在駐點處 $2bxy+c=0$。由於 $c\neq 0$，故 $x\neq 0$，於是 $y=-\dfrac{c}{2bx}$。代入曲線方程，

$$-\frac{ac^3}{8b^3x^3}-\frac{cx}{2}+cx=1, \qquad \text{即} \qquad -\frac{ac^3}{8b^3x^3}+\frac{cx}{2}=1.$$

兩邊乘以 $8b^3x^3$ 並移項，

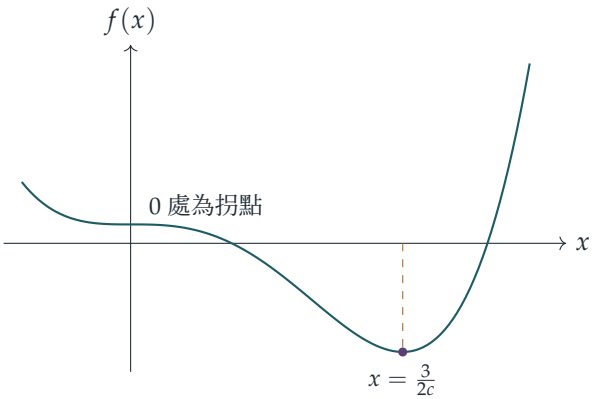
$$4cb^3x^4-8b^3x^3-ac^3=0,$$

這正是所求的方程。

把左方記作 $f(x)$。由於 $y=-c/(2bx)$ 由 x 決定，每個駐點的 x 坐標各不相同。所以有兩個駐點，就表示 f 至少有兩個相異實根。要數算 f 的根，可以看它的導數：

$$f'(x)=16cb^3x^3-24b^3x^2=8b^3x^2(2cx-3).$$

因子 x^2 永不變號，所以 f' 只在 $x=\frac{3}{2c}$ 處變號。設 $c>0$。那麼首項係數（leading coefficient）$4cb^3$ 為正（因為 $b>0$），f 在 $x<\frac{3}{2c}$ 時嚴格遞減，在 $x>\frac{3}{2c}$ 時嚴格遞增；$x=0$ 只是一個水平拐點（stationary point of inflection）。因此 f 在 $\frac{3}{2c}$ 兩側各最多有一個根，而它有兩個相異根當且僅當其最小值為負。若 $c<0$，情況全部倒轉：f 先增後減，有兩個相異根當且僅當其最大值為正。兩種情況下，條件都是 $c\,f\left(\frac{3}{2c}\right)<0$。



$a=-1$，$b=c=1$ 的情況：$f(x)=4x^4-8x^3+1$ 只有一個轉向點，即 $x=\frac{3}{2}$ 處的極小點，並有兩個實根。

現在在轉向點求值：

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{3}{2c}\right) &= 4cb^3\cdot\frac{81}{16c^4}-8b^3\cdot\frac{27}{8c^3}-ac^3 \\ &= \frac{81b^3}{4c^3}-\frac{108b^3}{4c^3}-ac^3=-\frac{27b^3+4ac^6}{4c^3}. \end{aligned}$$

所以

$$c\,f\left(\tfrac{3}{2c}\right)=-\frac{4ac^6+27b^3}{4c^2},$$

而這式為負當且僅當 $4ac^6+27b^3>0$。因此，若曲線有兩個駐點，則 $4ac^6+27b^3>0$。

第 (iii) 部分

第二及第三條方程表示 $2bxy+c$ 以及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的係數 $3ay^2+bx^2$ 同時為零，所以這是曲線上一個令 (ii) 的方法失效的點。由於 $c\neq 0$，第二條方程給出 $x\neq 0$ 及 $y=-\dfrac{c}{2bx}$。前兩條方程正是我們在 (ii) 中所用的，所以 x 滿足

$$4cb^3x^4-8b^3x^3-ac^3=0. \qquad (*)$$

把 $y=-c/(2bx)$ 代入第三條方程，

$$\frac{3ac^2}{4b^2x^2}+bx^2=0 \quad\Longrightarrow\quad 4b^3x^4=-3ac^2.$$

乘以 c，可見 $(*)$ 的第一項為 $-3ac^3$，於是 $(*)$ 變成

$$-3ac^3-8b^3x^3-ac^3=0 \quad\Longrightarrow\quad x^3=-\frac{ac^3}{2b^3}.$$

把 $x^4=-\dfrac{3ac^2}{4b^3}$ 除以此式（因 $x\neq 0$，可以這樣做），得

$$x=\frac{-3ac^2/(4b^3)}{-ac^3/(2b^3)}=\frac{3}{2c}.$$

所以這個解恰好位於 (ii) 中 f 的轉向點。把 $x=\frac{3}{2c}$ 代回 $x^3=-\frac{ac^3}{2b^3}$：

$$\frac{27}{8c^3}=-\frac{ac^3}{2b^3} \quad\Longrightarrow\quad 54b^3=-8ac^6 \quad\Longrightarrow\quad 4ac^6+27b^3=0,$$

得證。（等價地，由 (ii) 的公式可知 $f\left(\frac{3}{2c}\right)=0$。）這是 (ii) 的邊界情況：四次方程的兩個根在轉向點合併成一個重根（repeated root），而曲線在該處有一個奇點（singular point），而不是兩個駐點。

驗算

- 在 (i) 中取 $a = c = 1$、$b = 1$：曲線 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 是一個橢圓（ellipse），且 $b^2 = 1 < 4$；它的駐點位於 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$、$y = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$，這些點確實在曲線上。
- 在 (ii) 中取 $a = -1$、$b = c = 1$，得 $4ac^6 + 27b^3 = 23 > 0$，而 f 的最小值為 $f(\frac{3}{2}) = -5.75 = -\frac{23}{4}$，與 $-\frac{27b^3+4ac^6}{4c^3}$ 吻合。
- 在 (iii) 中取 $a = -2$、$c = 1.3$，並取 b 使 $27b^3 = -4ac^6$；那麼 $x = \frac{3}{2c}$、$y = -\frac{c}{2bx}$ 在捨入誤差範圍內滿足全部三條方程。以電腦對數千組隨機的 (a, b, c) 作檢驗，亦證實駐點的數目與 (i) 和 (ii) 中的條件相符。

常見錯誤

- 忘記 $x = 0$ 是四次多項式的一個臨界點：它是拐點（point of inflection）而非轉向點，指出這一點才能斷定最多只有兩個根。
- 忽略 c 的正負號：只有當 $c > 0$ 時，轉向點才是極小點。把條件寫成 $c\,f(\frac{3}{2c}) < 0$，便可一次過處理兩種情況。
- 在 (i) 中沒有指出 $b^2 = 4ac$ 的情況會得出 $0 = 1$，所以這情況同樣沒有駐點。

STEP 之外

量 $4ac^6 + 27b^3$ 在相差一個因子的意義下，就是該四次方程的判別式（discriminant）：它為零當且僅當四次方程有重根，正如二次方程的 $b^2 - 4ac$（以及三次方程 $t^3 + pt + q$ 的 $4p^3 + 27q^2$）一樣。第 (iii) 部分展示了它的幾何意義：重根對應曲線上的一個奇點，在該點 $ay^3 + bx^2y + cx$ 的兩個偏導數（partial derivatives）同時為零。奇點與判別式是代數幾何（algebraic geometry）的起點；若想以淺白而直觀的方式認識與多項式及曲線相關的概念，可讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）；若想做更多同類型的題目，可讀 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

詳細解答

STEP III 2022，第 4 題

純數學 • 無窮乘積

STEP III 2022，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 2.5 節韋達乘積中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/viete.html

關鍵思路

一切都建基於倍角公式（double-angle formula）$\sinh 2\theta = 2\sinh\theta\cosh\theta$，並反覆應用：每用一次，sinh 的自變量便減半，同時留下一個 cosh 因子。減半 n 次之後，剩下的 $\sinh(x/2^n)$ 非常小，而且表現得跟 $x/2^n$ 一樣，所以令 $n \to \infty$ 便能把一個有限的恆等式變成一個無窮乘積（infinite product）。最後兩部分就是在精心挑選的 x 值上計算這個乘積，再配合它的三角函數版本。

解答

第 (i) 部分

記 $P_n(x) = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)$。我們證明對每個正整數 n，都有 $\sinh x = 2^n P_n(x)\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)$。

基礎情況（*base case*）$n = 1$。在倍角公式中取 $\theta = x/2$，得 $\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$，這正是 $n = 1$ 時的命題。

歸納步驟（*inductive step*）。假設結果對某個 $n = k$ 成立。在倍角公式中取 $\theta = x/2^{k+1}$，

$$\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\sinh x &= 2^k P_k(x)\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2^k P_k(x)\cdot 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\\ &= 2^{k+1}P_{k+1}(x)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),\end{aligned}$$

這就是 $n = k+1$ 時的結果。由歸納法（induction），結果對所有正整數 n 都成立。

推論。若 $x \neq 0$，則 $x/2^n \neq 0$，所以 $\sinh(x/2^n) \neq 0$（sinh 唯一的零點在 0）。因此我們可以把恆等式除以 $x\sinh(x/2^n)/2^n$，得到

$$\frac{\sinh x}{x}\cdot\frac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)} = P_n(x),$$

即為所求。

第 (ii) 部分

當 $y \neq 0$ 時，把麥克勞林級數（Maclaurin series）除以 y，得

$$\frac{\sinh y}{y} = 1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots = 1 + y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{y^{2r-2}}{(2r+1)!}.$$

? **想一想** 只說「第一項之後的每一項都趨於 0」足夠嗎？

不完全足夠：項數有無窮多，所以我們應該為它們的和找一個界。當 $0 < |y| \leq 1$ 時，$y^{2r-2} \leq 1$，所以

$$0 \leq \frac{\sinh y}{y} - 1 \leq y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)!} = y^2(\sinh 1 - 1),$$

而當 $y \to 0$ 時，右邊趨於 0。因此 $\dfrac{\sinh y}{y} \to 1$，取倒數（reciprocal）後得 $\dfrac{y}{\sinh y} \to 1$。現在固定 $x \neq 0$，並在 (i) 的恆等式中令 $n \to \infty$。設 $y = x/2^n$；那麼 $y \to 0$，所以因子 $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$ 趨於 1。於是左邊趨於 $\dfrac{\sinh x}{x}$，而右邊是部分積（partial product）$P_n(x)$。所以部分積收斂（converge）至 $\dfrac{\sinh x}{x}$，這正是以下命題：

$$\frac{\sinh x}{x} = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdots.$$

第 (iii) 部分

取 $x = \ln 2$，則 $\mathrm{e}^{x/2^n} = 2^{1/2^n}$，所以

$$\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{2^{1/2^n} + 2^{-1/2^n}}{2} = \frac{2^{2/2^n}+1}{2\times 2^{1/2^n}} = \frac{1+2^{1/2^{n-1}}}{2\times 2^{1/2^n}},$$

這裏把分子和分母同乘以 $2^{1/2^n}$。當 $n=1$ 時，得 $\cosh\left(\frac{x}{2}\right)=\dfrac{1+2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$；當 $n=2$ 時，得

$$\cosh\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{1+2^{1/2}}{2\times 2^{1/4}},$$

即為所求。

在 (ii) 的左邊，$\sinh(\ln 2)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$，所以 $\dfrac{\sinh x}{x}=\dfrac{3}{4\ln 2}$。

在右邊，首 N 個因子的部分積為

$$P_N(\ln 2)=\frac{\prod_{n=1}^{N}\left(1+2^{1/2^{n-1}}\right)}{2^N\cdot 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^N}}}=\frac{3}{2}\cdot\prod_{k=1}^{N-1}\frac{1+2^{1/2^k}}{2}\cdot\frac{1}{2^{1-1/2^N}},$$

這裏我們抽出了 $n=1$ 的因子 $(1+2)/2$，以 $k=n-1$ 重新編號，並把指數中的等比級數（geometric series）求和。當 $N\to\infty$ 時，$2^{1-1/2^N}\to 2$，而由 (ii) 得 $P_N(\ln 2)\to\dfrac{3}{4\ln 2}$。因此部分積 $\prod_{k=1}^{N-1}\frac{1+2^{1/2^k}}{2}$ 收斂，而且

$$\frac{3}{4\ln 2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+2^{1/2^k}}{2},$$

約去 $\frac{3}{4}$ 後得

$$\frac{1}{\ln 2}=\frac{1+2^{\frac{1}{2}}}{2}\times\frac{1+2^{\frac{1}{4}}}{2}\times\frac{1+2^{\frac{1}{8}}}{2}\times\cdots.$$

第 (iv) 部分

同一論證換成 sin 和 cos 後一字不改地適用，因為 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ 具有相同的形式。由歸納法得

$$\sin x=2^n\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

當 $0<x<\pi$ 時，$0<x/2^n<\pi$，所以 $\sin(x/2^n)\neq 0$，可以像之前一樣相除。麥克勞林級數 $\sin y=y-\frac{y^3}{3!}+\cdots$ 給出：當 $0<|y|\le 1$ 時，

$$\left|\frac{\sin y}{y}-1\right|\le y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)!}=y^2(\sinh 1-1)\to 0,$$

所以 $\sin y/y\to 1$，令 $n\to\infty$，得

$$\frac{\sin x}{x}=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdots.$$

（另一個方法是在 (ii) 中代入 $x=\mathrm{i}t$，並利用 $\cosh(\mathrm{i}t)=\cos t$ 和 $\sinh(\mathrm{i}t)=\mathrm{i}\sin t$；但 (ii) 中的級數論證是針對實數 y 的，所以直接重做一遍會更乾淨。）

取 $x=\frac{\pi}{2}$：左邊為 $\dfrac{1}{\pi/2}=\dfrac{2}{\pi}$，而各因子為 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$，如此類推。

想一想 怎樣把 $\cos(\pi/8)$、$\cos(\pi/16)$、... 化成嵌套平方根？

把 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 寫成 $2\cos\theta = \sqrt{2+2\cos 2\theta}$ 的形式；這裏取正根，因為當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時 $\cos\theta > 0$。設 $c_n = 2\cos\left(\pi/2^{n+1}\right)$。那麼 $c_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$，而取 $\theta = \pi/2^{n+2}$，得

$$c_{n+1} = \sqrt{2+c_n}.$$

所以 $c_1 = \sqrt{2}$、$c_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$、$c_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，如此類推，而乘積的第 n 個因子是 $c_n/2$。因此

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \cdots,$$

這就是 1593 年的韋達（Viète）公式。

驗算

- 在 (i) 中代入 $n = 1$ 和 $x = 2\theta$：會得回倍角公式，理應如此。
- 在 (iii) 中，$\cosh(\frac{1}{2}\ln 2) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1.0607$，而一般 n 的公式在 $n = 1$ 時與此吻合。
- 數值上，(iii) 的乘積很快便穩定下來：首 6o 個因子給出 $1.442695\ldots$，與 $1/\ln 2 = 1.4426950\ldots$ 吻合；而 (iv) 的乘積給出 $0.6366197\ldots$，與 $2/\pi$ 吻合。兩者均已用電腦驗證至約 15 位有效數字（significant figures）。

常見錯誤

- 除以 $\sinh(x/2^n)$ 時，沒有指出它因 $x \neq 0$ 而不為零。
- 在 (iii) 中出現差一錯誤：$n = 1$ 的因子是 $3/(2\sqrt{2})$，並不是 $(1+2^{1/2^k})/2$ 的形式；而零散的冪 $2^{1/2}\cdot 2^{1/4}\cdots$ 合起來給出因子 2，而不是 1。
- 沒有從級數作任何論證便假設「$y/\sinh y \to 1$」，而這正是題目要求證明的。

STEP 之外

無窮乘積 $\prod a_n$ 定義為其部分積的極限，正如無窮級數是其部分和（partial sums）的極限；取對數（logarithm）可以把兩者互相轉換，所以 $\prod(1+u_n)$ 的收斂與 $\sum u_n$ 的收斂密切相關。這裏 $\sin x/x$ 的乘積，與歐拉（Euler）更著名的乘積 $\sin x = x\prod_{k\geq 1}\left(1 - x^2/(k^2\pi^2)\right)$ 並列，後者可推出 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$。若想了解如何嚴謹處理極限，使第 (ii) 部分這類論證變得嚴密，可閱讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2022，第 5 題

純數學 • 對稱定積分

STEP III 2022，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

在對稱區間（symmetric interval）$[-a, a]$ 上，代換（substitution）$x \mapsto -x$ 讓我們可以把積分「摺疊」到 $[0, a]$ 上，把 x 處的值與 $-x$ 處的值配成一對。對於形如 $1/(1+\text{某式})$ 的被積函數（integrand），這一對 $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q}$ 恰好在 $pq = 1$ 時化簡為 1，而 $\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-x} = 1$ 正是典型例子。整道題的重點，就是看出這種配對，並且知道在甚麼情況下這是答案等於 a 的唯一途徑。

解答

第 (i) 部分

設 $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$。代入 $x = -u$（於是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$，而積分上下限互換後又換回來），

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u = \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{e}^{u}}{\mathrm{e}^{u}+1}\,\mathrm{d}u,$$

這裏把分子和分母同乘以 e^{u}。把這式與 I 的原式相加，

$$2I = \int_{-a}^{a} \frac{1+\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}x = 2a,$$

所以對所有 $a \geq 0$，都有 $I = a$，得證。

第 (ii) 部分

解釋。對 $a \geq 0$，定義 $G(a) = \displaystyle\int_{0}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x$。由於 g 連續（continuous），微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）告訴我們 G 可導（differentiable），且 $G'(a) = g(a)$

（在 $a = 0$ 處為單側導數（one-sided derivative））。但 G 在 $[0, \infty)$ 上恆等於零，所以它在該處的導數為零。因此對所有 $a \geq 0$，都有 $g(a) = 0$。（連續性很重要：沒有它的話，g 可以在個別孤立點上不為零，而不影響任何積分。）

摺疊積分。在 0 處分開，並在左半部分代入 $x = -u$：

$$\int_{-a}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{f}(x)} = \int_{0}^{a} \frac{\mathrm{d}u}{1+\mathrm{f}(-u)}.$$

把 a 寫成 $a = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x$，便得到

$$\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{f}(x)} - a = \int_{0}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{其中} \quad g(x) = \frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} + \frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)} - 1.$$

由於 $\mathrm{f} \geq 0$，兩個分母都至少為 1，所以 g 連續。

> **想一想** 剛才解釋的結果只是單向的命題。它給出「當且僅當」（if and only if）的哪一個方向？另一個方向又從何而來？

- 若對所有 $x \geq 0$ 都有 $g(x) = 0$，則 $\int_0^a g = 0$，於是對所有 $a \geq 0$，該積分都等於 a。這個方向是顯然的。
- 反過來，若對所有 $a \geq 0$，該積分都等於 a，則對所有 $a \geq 0$ 都有 $\int_0^a g = 0$，再由第一段的結果（套用於這個連續的 g），得出對所有 $x \geq 0$ 都有 $g(x) = 0$。

所以積分條件成立，當且僅當對所有 $x \geq 0$ 都有 $g(x) = 0$。

乘積條件。設 $p = \mathrm{f}(x)$，$q = \mathrm{f}(-x)$。兩邊同乘以 $(1+p)(1+q) > 0$，

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} = 1 &\iff (1+q) + (1+p) = (1+p)(1+q) \\ &\iff 2 + p + q = 1 + p + q + pq \\ &\iff pq = 1. \end{aligned}$$

所以對所有 $x \geq 0$ 都有 $g(x) = 0$，當且僅當對所有 $x \geq 0$ 都有 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$。最後，把 x 換成 $-x$ 時，式子 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)$ 不變，所以它對所有 $x \geq 0$ 等於 1，恰好等同於它對所有實數 x 等於 1。這樣便完成了整條等價（equivalence）鏈。

第 (iii) 部分

跟之前完全一樣地摺疊積分，這次在左半部分用上 $\mathrm{h}(-u)=\mathrm{h}(u)$：

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a}\frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}\frac{\mathrm{h}(-u)}{1+\mathrm{f}(-u)}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{0}^{a}\mathrm{h}(x)\left(\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)}+\frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{a}\mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

這是因為根據第 (ii) 部分證明的等價關係，只要 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=1$，括號內的式子便等於 1。（條件 $\mathrm{f}\geq 0$ 及連續性只是確保每個被積函數都連續。）

第 (iv) 部分

> **想一想** 怎樣把 $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\cosh x}$ 寫成 $\dfrac{\text{常數}}{1+\mathrm{f}(x)}$ 的形式？

由於 $\cosh x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$，

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x}=\frac{2\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{2\cos x}{1+\mathrm{e}^{2x}},$$

這裏把分子和分母同乘以 e^{x}。取 $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{2x}$，它連續、為正，並滿足 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x}=1$；再取 $\mathrm{h}(x)=2\cos x$，它連續且為偶函數（even function）。以 $a=\frac{1}{2}\pi$ 套用第 (iii) 部分，得

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}2\cos x\,\mathrm{d}x=\Big[2\sin x\Big]_{0}^{\frac{1}{2}\pi}=2.$$

驗算

- 第 (i) 部分是第 (iii) 部分在 $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{x}$、$\mathrm{h}\equiv 1$ 時的特例，給出 $\int_{0}^{a}1\,\mathrm{d}x=a$，與預期相符。
- 一個反例：$\mathrm{f}(x)=x^{2}$ 有 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=x^{4}\neq 1$，而確實 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}}=\frac{\pi}{2}\neq 1$。
- 用辛普森法則（Simpson's rule）對第 (iv) 部分的積分作數值計算，得到 2.0000000；第 (iii) 部分的恆等式亦已用電腦對多個隨機選取的 $\mathrm{f}=\mathrm{e}^{(\text{奇函數})}$ 及偶函數 h 加以驗證。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分只證明了「當且僅當」的其中一個方向：從積分條件推回 $g = 0$ 的那一步，正正需要用到第一個結果（以及 g 的連續性）。
- 忘記說明為何 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$ 對 $x \geq 0$ 成立便足以推出它對所有 x 成立：原因是這個式子在 $x \mapsto -x$ 之下對稱。
- 在第 (iv) 部分，試圖直接積分 $\mathrm{e}^{-x}\cos x/\cosh x$，而不是先把它改寫成 $2\cos x/(1+\mathrm{e}^{2x})$。

STEP 之外

第 (ii) 部分的論證，其實是把微積分基本定理「倒過來」用；這也是分析（analysis）中經常出現連續性假設的原因：積分「看不見」個別點上發生的事，所以只有在連續的情況下，才能從一個函數的積分還原出它的函數值。摺疊技巧與把函數拆成偶部分和奇部分的做法是近親；在這裏，$\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} - \frac{1}{2}$ 是奇函數（odd function），恰好當 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對微積分基本定理以及為何需要連續性有仔細的論述。

詳細解答

STEP III 2022，第 6 題

純數學 • 滾動圓與切線

STEP III 2022，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分是一個二階泰勒展開（Taylor expansion），而它真正的重點在最後一行的提醒：當一階項消失時，比值由二階項決定。在第 (ii) 部分中，滾動條件表明兩個圓經過接觸點的弧長相等，由此可知 C_1 轉了多少。在 (c) 的特殊點上，弦（chord）中的一階項恰好互相抵消，所以我們需要用到 (i) 中的二階項。

解答

第 (i) 部分

當 α 很小時，$\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ 及 $\sin\alpha \approx \alpha$，誤差的階為 α^3。因此

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\alpha) - \cos\theta &= \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha - \cos\theta \\ &\approx \cos\theta\left(1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\right) - \alpha\sin\theta - \cos\theta = -\alpha\sin\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta,\end{aligned}$$

此即所求。同理，

$$\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta \approx \alpha\cos\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta.$$

把 $(*)$ 的分子和分母同除以 α，

$$\frac{\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta}{\cos(\theta+\alpha) - \cos\theta} \approx \frac{\cos\theta - \frac{1}{2}\alpha\sin\theta}{-\sin\theta - \frac{1}{2}\alpha\cos\theta} \longrightarrow -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta,$$

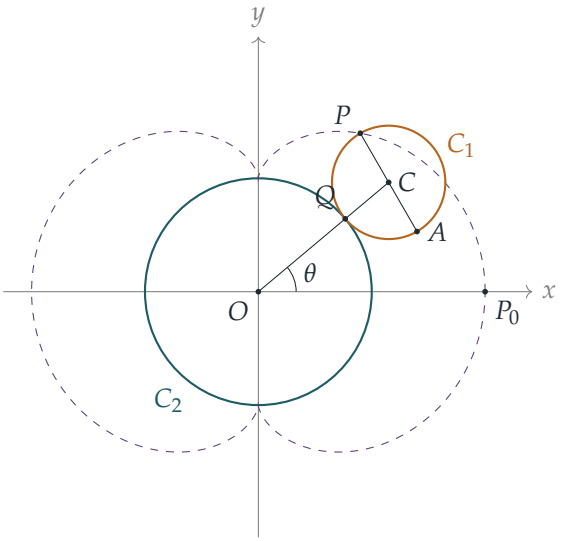
這個極限（limit）沒有問題，因為分母趨向 $-\sin\theta \neq 0$。

若 $\sin\theta = 0$，則 $\cos\theta = \pm 1$，分母的一階項便消失：

$$(*) \approx \frac{\alpha\cos\theta}{-\frac{1}{2}\alpha^2\cos\theta} = -\frac{2}{\alpha}.$$

所以 $(*)$ 沒有有限的極限：它的大小無界地增長，當 $\alpha \to 0^+$ 時趨向 $-\infty$，當 $\alpha \to 0^-$ 時趨向 $+\infty$。（從幾何上看，單位圓上由角 θ 到 $\theta+\alpha$ 的弦變成鉛垂，其斜率（gradient）趨向無限大。）

第 (ii)(a) 部分



圖中所示為 $n=3$ 的情況，虛線曲線是 P 的軌跡。設 C 為 C_1 的圓心。由於兩圓在 Q 相切，點 O、Q、C 共線（collinear），且 $OC=(n-1)a+a=na$，所以

$$\overrightarrow{OC}=na(\cos\theta,\sin\theta),$$

而從 C 看，點 Q 位於方向 $\theta+\pi$。

設 A 為 C_1 上與 P 直徑相對（diametrically opposite）的點；這就是開始時與 C_2 相接觸的 C_1 上的點，位於 $((n-1)a,0)$。無滑動滾動（rolling without slipping）表示 C_1 上由 A 到 Q 的弧長，等於接觸點在 C_2 上走過的弧長，即 $(n-1)a\theta$。由於 C_1 的半徑為 a，角 ACQ 等於 $(n-1)\theta$。

? **想一想** 從 C 看，A 位於 Q 的順時針方向還是逆時針方向？

當 C_1 沿 C_2 外側逆時針滾動時，C_1 本身也逆時針自轉，所以它已經滾過的點會被逆時針帶離接觸點。因此 $\overrightarrow{CA}$ 指向方向 $\theta+\pi+(n-1)\theta=n\theta+\pi$，而 $\overrightarrow{CP}=-\overrightarrow{CA}$ 指向方向 $n\theta$。（驗證：當 $\theta=0$ 時，這給出 $P=((n+1)a,0)$。C_1 總共轉了 $n\theta$，這就是一枚硬幣繞另一枚硬幣滾動時那個熟悉的「多轉一圈」。）因此

$$\overrightarrow{OP}=na(\cos\theta,\sin\theta)+a(\cos n\theta,\sin n\theta),$$

所以 $x(\theta) = a(n\cos\theta + \cos n\theta)$，此即所求，而且

$$y(\theta) = a(n\sin\theta + \sin n\theta).$$

第 (ii)(b) 部分

把兩式平方後相加，

$$OP^2 = a^2\big(n^2 + 1 + 2n(\cos\theta\cos n\theta + \sin\theta\sin n\theta)\big) = a^2\big(n^2 + 1 + 2n\cos(n-1)\theta\big).$$

令它等於 $(n-1)^2a^2 = (n^2 - 2n + 1)a^2$，得 $2n\cos(n-1)\theta = -2n$，即 $\cos(n-1)\theta = -1$。所以

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-1}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

在繞 C_2 的每一圈中給出 $n-1$ 個不同的位置。這些正是 P 本身成為接觸點的時刻：曲線的尖點（cusp）。

第 (ii)(c) 部分

設 $\theta_0 = \pi/(n-1)$，則 $n\theta_0 = \theta_0 + \pi$，所以

$$\cos n\theta_0 = -\cos\theta_0, \qquad \sin n\theta_0 = -\sin\theta_0.$$

對每一項應用第 (i) 部分，其中 $n\theta$ 項以 $n\alpha$ 作為微小增量：

$$\begin{aligned}
\frac{y(\theta_0+\alpha) - y(\theta_0)}{a} &\approx n\big(\alpha\cos\theta_0 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta_0\big) \\
&\quad + \big(n\alpha\cos n\theta_0 - \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin n\theta_0\big) \\
&= n\alpha\cos\theta_0 - \tfrac{1}{2}n\alpha^2\sin\theta_0 - n\alpha\cos\theta_0 + \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin\theta_0 \\
&= \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\sin\theta_0, \\
\frac{x(\theta_0+\alpha) - x(\theta_0)}{a} &\approx n\big(-\alpha\sin\theta_0 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta_0\big) \\
&\quad + \big(-n\alpha\sin n\theta_0 - \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\cos n\theta_0\big) \\
&= \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\cos\theta_0,
\end{aligned}$$

兩者的誤差都是 α^3 階。一階項恰好互相抵消，正如 (i) 中 $\sin\theta = 0$ 的情況，所以答案由二階項決定。把分子和分母同除以 $\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2$，

$$\frac{y(\theta_0+\alpha) - y(\theta_0)}{x(\theta_0+\alpha) - x(\theta_0)} = \frac{\sin\theta_0 + O(\alpha)}{\cos\theta_0 + O(\alpha)} \longrightarrow \tan\theta_0,$$

前提是 $\cos\theta_0 \neq 0$，而這在 $n \geq 4$ 時成立。當 $n = 3$ 時，$\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$；同樣的推導顯示倒數比值趨向 $\cot\theta_0 = 0$，所以弦變成鉛垂。

這個極限就是 θ_0 處切線（tangent）的斜率，因為它是弦斜率的極限。而

$$x(\theta_0) = a(n\cos\theta_0 - \cos\theta_0) = (n-1)a\cos\theta_0, \qquad y(\theta_0) = (n-1)a\sin\theta_0,$$

所以 OP 與 x 軸成角 θ_0，斜率為 $\tan\theta_0$（當 $n = 3$ 時為鉛垂）。切線與 OP 方向相同，所以 $(x(\theta_0), y(\theta_0))$ 處的切線平行於 OP。事實上，由於切線經過 P，它就落在直線 OP 上。

驗算

- 當 $\theta = 0$、$\alpha = 0.001$ 時，比值 $(*)$ 為 -1999.9998，對比 $-2/\alpha = -2000$。
- 當 $n = 5$、$\theta_0 = \frac{1}{4}\pi$ 及 $\alpha = 10^{-4}$ 時，弦的斜率為 1.0004，接近 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$。
- 在 θ_0 處，$OP = (n-1)a$，所以 (c) 中的點就是 (b) 中求得的 $k = 0$ 尖點。這就是該處切線沿徑向的原因。

常見錯誤

- 把 C_1 的轉角當作 $(n-1)\theta$（滾過的弧），忘記了 C 繞 O 運行所帶來的額外 θ。
- 在 (c) 中只用一階近似：這只會得到 $0/0$，甚麼也說明不了。
- 忘記 $n = 3$ 時 $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$，此時 $\tan\theta_0$ 沒有定義。

STEP 之外

這條曲線是一條有 $n-1$ 個尖點的外擺線（epicycloid）。在每個尖點處，速度（velocity）$(x'(\theta), y'(\theta))$ 為零，所以一般的公式 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = y'/x'$ 不再適用。第 (c) 部分透過推到二階來處理這個問題，這其實就是喬裝了的洛必達法則（l'Hôpital's rule）。參數化曲線（parametrised curve）上速度為零的點稱為奇點（singular points），它們是曲線微分幾何（differential geometry）入門課程的研究對象。關於第 (i) 部分背後的極限與泰勒近似，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2022，第 7 題

純數學 • 向量積變換

STEP III 2022，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 7.5 節三維空間中的旋轉中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/rotations-3d.html

關鍵思路

一切都建基於把一個向量（vector）分解為沿 $\mathbf{n}$ 的部分和垂直（perpendicular）於 $\mathbf{n}$ 的部分。映射（map）$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ 會消去平行部分，並把垂直部分繞 $\mathbf{n}$ 轉過一個直角，而不改變其長度。第 (i) 部分一旦證明了連續施行這個映射兩次會得到垂直部分的負值，第 (ii) 和 (iii) 部分的映射便可以逐一觀察它們分別對這兩個部分的作用而直接讀出。

解答

第 (i) 部分

設 $\mathbf{n} = (a, b, c)^{\mathsf{T}}$ 及 $\mathbf{r} = (x, y, z)^{\mathsf{T}}$，則

$$\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}.$$

再施行 f 一次，$\mathbf{n} \times \mathrm{f}(\mathbf{r})$ 的 x 分量（component）等於 b 乘以 $\mathrm{f}(\mathbf{r})$ 的第三個分量，減去 c 乘以第二個分量：

$$\begin{aligned} b(ay - bx) - c(cx - az) &= aby - b^2x - c^2x + acz \\ &= -x(b^2 + c^2) + aby + acz, \end{aligned}$$

此即所求。由於 $\mathbf{n}$ 是單位向量（unit vector），$b^2+c^2=1-a^2$，所以上式變成

$$-x+a^2x+aby+acz=a(ax+by+cz)-x=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\,a-x.$$

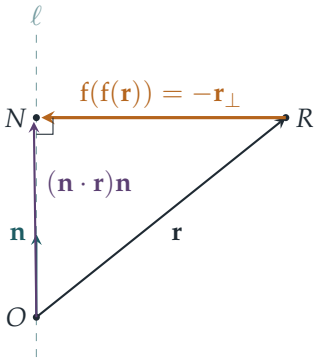
這正是 $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}$ 的 x 分量。由於叉積（cross product）在這種循環重新標記下保持不變，只要循環替換 $a\to b\to c\to a$ 及 $x\to y\to z\to x$，便可同樣得出 y 分量和 z 分量。因此

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}.$$

幾何意義。寫 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\parallel}+\mathbf{r}_{\perp}$，其中 $\mathbf{r}_{\parallel}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ 是沿 $\mathbf{n}$ 的分量，而 $\mathbf{r}_{\perp}=\mathbf{r}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ 垂直於 $\mathbf{n}$。於是

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}_{\perp}.$$

設 ℓ 為通過 O 而方向為 $\mathbf{n}$ 的直線，並設 N 為由 R 到 ℓ 的垂足（foot of the perpendicular），故 $\overrightarrow{ON}=\mathbf{r}_{\parallel}$。於是 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{RN}$：它是由 R 垂直地直指軸 ℓ 的向量，其長度就是 R 與 ℓ 的距離。



第 (ii) 部分

軸。由於 $\mathbf{n}\times\mathbf{n}=\mathbf{0}$，我們有 $\mathrm{f}(\mathbf{n})=\mathbf{0}$，因而 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{n}))=\mathbf{0}$，得 $\mathrm{g}(\mathbf{n})=\mathbf{n}$。由線性（linearity）得 $\mathrm{g}(\lambda\mathbf{n})=\lambda\mathbf{n}$，所以直線 ℓ 上每一點都是不動點（fixed point）。

垂直向量。現在取滿足 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ 的 $\mathbf{r}$。由第 (i) 部分，$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}$，所以

$$\mathrm{g}(\mathbf{r})=\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})-(1-\cos\theta)\mathbf{r}=\cos\theta\,\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r}).$$

想一想 當 $\mathbf{r}\perp\mathbf{n}$ 時，$\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 是怎樣的？

它同時垂直於 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{r}$，所以它位於通過 O 且垂直於 $\mathbf{n}$ 的平面上，並與 $\mathbf{r}$ 成直角。它的長度是 $|\mathbf{n}||\mathbf{r}|\sin 90^\circ=|\mathbf{r}|$。因此 $\mathbf{r}$ 與 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 是該平面上兩個互相垂直、長度相等的向量，而 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 就是把 $\mathbf{r}$ 繞 $\mathbf{n}$ 按右手方向（right-handed sense）轉過 90° 的結果（即從

$\mathbf{n}$ 的末端回望 O 時的逆時針方向）。正如 $\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\theta\,\mathbf{j}$ 是把 $\mathbf{i}$ 朝 $\mathbf{j}$ 旋轉 θ 所得，向量 $\cos\theta\,\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$ 就是把 $\mathbf{r}$ 繞 $\mathbf{n}$ 按同一方向旋轉 θ 所得。

一般向量。f 是線性的（叉積對第二個自變量是線性的），所以 g 也是線性的。把一般的 $\mathbf{r}$ 寫成 $\mathbf{r}_\parallel+\mathbf{r}_\perp$，g 保持 $\mathbf{r}_\parallel$ 不變，並把 $\mathbf{r}_\perp$ 繞 $\mathbf{n}$ 旋轉 θ，這正是繞 ℓ 的旋轉所做的事。

因此 $R\mapsto P$ 是一個**繞通過 O、方向為 $\mathbf{n}$ 的直線旋轉 θ 角的旋轉（rotation）**，方向為繞 $\mathbf{n}$ 的右手方向（即從 $\mathbf{n}$ 的末端望向 O 時的逆時針方向）。

第 (iii) 部分

利用第 (i) 部分，

$$\mathrm{h}(\mathbf{r})=-\mathbf{r}-2\big((\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}\big)=\mathbf{r}-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}.$$

以兩個分量表示，$\mathrm{h}(\mathbf{r})=\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_\parallel$：

- $\mathrm{h}(\mathbf{n})=\mathbf{n}-2\mathbf{n}=-\mathbf{n}$，所以沿 $\mathbf{n}$ 的分量被反轉；
- 若 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$，則 $\mathrm{h}(\mathbf{r})=\mathbf{r}$，所以平面 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ 上每一點都是不動點。

從幾何上看，$\overrightarrow{RQ}=-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ 垂直於平面 $\Pi:\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$，而 RQ 的中點的位置向量（position vector）是 $\mathbf{r}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$，它位於 Π 上。所以 Q 是 R 的鏡像：映射 $R\mapsto Q$ 是**對通過 O 且垂直於 $\mathbf{n}$ 的平面的反射（reflection）**。

驗算

- 取 $\mathbf{n}=\mathbf{k}=(0,0,1)^{\mathsf T}$。則 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}=(-y,x,0)^{\mathsf T}$，施行兩次得 $(-x,-y,0)^{\mathsf T}$，與 $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}=(0,0,z)^{\mathsf T}-(x,y,z)^{\mathsf T}$ 吻合。於是 $\mathrm{g}(\mathbf{r})=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta,\ z)^{\mathsf T}$，正是我們熟悉的繞 z 軸的旋轉；而 $\mathrm{h}(\mathbf{r})=(x,y,-z)^{\mathsf T}$，是對平面 $z=0$ 的反射。
- $\theta=0$ 給出 $\mathrm{g}(\mathbf{r})=\mathbf{r}$，而施行 h 兩次得到恆等映射（identity），這正符合「轉零角度的旋轉」和反射應有的性質。
- 以 2000 組隨機的單位向量 $\mathbf{n}$、向量 $\mathbf{r}$ 和角 θ 進行電腦驗算，證實了 x 分量的公式、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$ 的恆等式、g 與繞 $\mathbf{n}$ 按右手方向旋轉 θ 一致，以及 h 與對平面 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ 的反射一致。

常見錯誤

- 忘記使用 $a^2+b^2+c^2=1$：若 $\mathbf{n}$ 不是單位向量，(i) 中的恆等式並不成立。
- 在 (ii) 中只驗證了 $\mathbf{r}\perp\mathbf{n}$ 的情況，卻沒有解釋為何這一點連同 $\mathrm{g}(\mathbf{n})=\mathbf{n}$ 及線性，便

足以處理所有 **r**。

- 把 (iii) 說成是對直線 ℓ 的反射：ℓ 上的點是被反轉，而不是保持不動；保持不動的是垂直於 **n** 的平面。

STEP 之外

(ii) 中的公式就是 Rodrigues 旋轉公式（Rodrigues' rotation formula），而 f 的矩陣是反對稱（antisymmetric）的「叉積矩陣」K，所以旋轉可寫成 $I + \sin\theta\, K + (1 - \cos\theta)K^2$，這也等於 $\exp(\theta K)$。(iii) 中的映射是 Householder 反射 $I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$，是數值線性代數（numerical linear algebra）中的重要工具。在大學一年級的課程中，它們分別以行列式（determinant）為 $+1$ 和 -1 的正交矩陣（orthogonal matrix）的身份出現。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是認識它們的好起點。

詳細解答

STEP III 2022，第 8 題

純數學 • 棣美弗定理與無理性

STEP III 2022，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 5.5 節名不副實的有理角中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/rational-angles.html

關鍵思路

把 $\cos\theta$ 提出後套用棣美弗定理（De Moivre's theorem），可將 $\sin k\theta$ 和 $\cos k\theta$ 表示為 $\cos^k\theta$（或 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$）乘以一個關於 $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ 的多項式（polynomial）。當 $\sec^2\theta - 1$ 是偶整數時，該多項式的值是一個整數，而它的奇偶性（parity）可以從首項直接讀出。若角度（以度為單位）是有理數（rational），某個 $\sin k\theta$ 便會等於零，而奇偶性論證說明這種情況永遠不會發生。

解答

第 (i) 部分

假設 $\cos\theta \neq 0$，使 $\sec\theta$ 存在。由棣美弗定理，

$$\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1+\mathrm{i}t)^k, \qquad t = \tan\theta.$$

按二項式展開（binomial expansion），$(1+\mathrm{i}t)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{i}^j t^j$。$j$ 為奇數的項是虛數，且 $\mathrm{i}^{2r+1} = (-1)^r\mathrm{i}$；$j$ 為偶數的項是實數，且 $\mathrm{i}^{2r} = (-1)^r$。取虛部（imaginary part），

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta\left(\binom{k}{1}t - \binom{k}{3}t^3 + \binom{k}{5}t^5 - \cdots\right)\\ &= \cos^k\theta\,\tan\theta\left(k - \binom{k}{3}t^2 + \binom{k}{5}t^4 - \cdots\right).\end{aligned}$$

由於 $\cos^k\theta\tan\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta$ 及 $t^2 = \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$，上式即為

$$\sin k\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k - \binom{k}{3}(\sec^2\theta-1) + \binom{k}{5}(\sec^2\theta-1)^2 - \cdots\right),$$

此即所求。括號會自然終止，因為當 $j > k$ 時 $\binom{k}{j} = 0$。同樣地取實部，

$$\cos k\theta = \cos^k\theta\left(1 - \binom{k}{2}(\sec^2\theta-1) + \binom{k}{4}(\sec^2\theta-1)^2 - \cdots\right).$$

第 (ii) 部分

此處 $\cos\theta = 1/a$ 且 $a \geq 3$，故 $0° < \theta < 90°$。特別地，$\sin\theta \neq 0$ 且 $\cos\theta \neq 0$。此外 $\sec^2\theta - 1 = a^2 - 1$，由於 a 是奇數，這是一個 偶整數。記 $X = a^2 - 1$。

假設 k 是使 $\sin k\theta = 0$ 的最小正整數。那麼 $k \neq 1$，因為 $\sin\theta \neq 0$，所以 $k > 1$，可應用第 (i) 部分：

$$0 = \sin k\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k - \binom{k}{3}X + \binom{k}{5}X^2 - \cdots\right).$$

因子 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$ 不為零，所以括號等於零。首項以外的每一項都至少含有一個偶整數 X 的因子，而二項式係數（binomial coefficient）都是整數，所以

$$0 = k - \binom{k}{3}X + \binom{k}{5}X^2 - \cdots \equiv k \pmod 2.$$

因此 k 是偶數。於是

$$0 = \sin k\theta = 2\sin\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right).$$

但 $\frac{1}{2}k$ 是整數且 $0 < \frac{1}{2}k < k$，所以由 k 的最小性（minimality），$\sin(\frac{1}{2}k\theta) \neq 0$。因此 $\cos(\frac{1}{2}k\theta) = 0$，此即所求。

想一想 「θ 是有理數」這個假設在哪裏用上？

正是它令 k 得以存在。設 $\theta = p/q$，其中 p、q 為正整數（記住 θ 以度為單位）。那麼 $180q\,\theta = 180p$，故 $\sin(180q\,\theta) = 0$。所以*確實*存在正整數 m 使 $\sin m\theta = 0$，因此也存在最小的一個，記為 k。它滿足上述假設，所以 k 是偶數；記 $n = \frac{1}{2}k$，便有 $\cos n\theta = 0$。

現在證明 $\cos n\theta$ 不可能為零。若 $n = 1$，則 $\cos n\theta = 1/a \neq 0$。若 $n > 1$，第 (i) 部分的餘弦公式給出

$$\cos n\theta = \frac{1}{a^n}\left(1 - \binom{n}{2}X + \binom{n}{4}X^2 - \cdots\right).$$

同樣，首項以外的每一項都是偶數，所以括號是一個奇整數，特別地不為零。故 $\cos n\theta \neq 0$，矛盾。因此 θ 是無理數（irrational）。

第 (iii) 部分

現在 $\cot\phi = 1/b$，所以 $\tan\phi = b$，其中 $b \geq 2$，且 $0° < \phi < 90°$。同樣 $\sin\phi \neq 0$ 且 $\cos\phi \neq 0$，而這次

$$\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2,$$

由於 b 是偶數，這是一個偶整數。所以只要以 $X = b^2$ 代替 $a^2 - 1$，第 (ii) 部分的論證便完全適用。完整寫出如下：

設 $\phi = p/q$，其中 p、q 為正整數。那麼 $\sin(180q\,\phi) = 0$，所以存在最小的正整數 k 使 $\sin k\phi = 0$，而由於 $\sin\phi \neq 0$，$k > 1$。由第 (i) 部分，因為 $\sin\phi\cos^{k-1}\phi \neq 0$，

$$0 = k - \binom{k}{3}b^2 + \binom{k}{5}b^4 - \cdots \equiv k \pmod 2,$$

所以 k 是偶數。於是 $0 = \sin k\phi = 2\sin(\frac{1}{2}k\phi)\cos(\frac{1}{2}k\phi)$，而由最小性，$\sin(\frac{1}{2}k\phi) \neq 0$，所以 $\cos n\phi = 0$，其中 $n = \frac{1}{2}k$。若 $n = 1$，這表示 $\cos\phi = 0$，但這是錯的。若 $n > 1$，

$$\cos n\phi = \cos^n\phi\left(1 - \binom{n}{2}b^2 + \binom{n}{4}b^4 - \cdots\right),$$

其中 $\cos^n\phi \neq 0$，而括號是奇數，故不為零。這個矛盾說明 ϕ 是無理數。

驗算

- 在第 (i) 部分代入 $k = 2$ 及 $k = 3$：公式給出 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$、$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ 及 $\sin 3\theta = \sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$。對於不超過 15 的 k，兩條公式在隨機角度下也與直接計算的結果吻合。
- 奇偶條件是必要的。取 $a = 2$（偶數）得 $\theta = 60°$，取 $b = 1$（奇數）得 $\phi = 45°$，兩者都是有理數。在這兩種情況下，$X = 3$ 或 1 都是奇數，所以論證恰好在應該失效的地方失效。
- 當 $a = 3$ 時 $\theta \approx 70.5288°$，當 $b = 2$ 時 $\phi \approx 63.4349°$。電腦驗算確認，對於所有小於 30 的奇數 a 及偶數 b，以及每個 $k < 2000$，$\sin k\theta$ 和 $\sin k\phi$ 都與零保持相當距離。

常見錯誤

- 在約去 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$ 之前，沒有說明為何它 $\neq 0$。
- 沒有解釋 k 從何而來：最小的 k 之所以存在，只是因為有理數 θ 令 $\sin(180q\,\theta) = 0$。
- 沒有利用 k 的最小性排除 $\sin(\frac{1}{2}k\theta) = 0$，便斷定 $\cos(\frac{1}{2}k\theta) = 0$。

STEP 之外

撇除前面的因子，這裏的括號就是切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials），而奇偶性技巧則是把整數恆等式模一個質數（reducing modulo a prime）來處理的初步體驗。一個著名的相關結果是 *Niven* 定理（Niven's theorem）：在 180° 的有理數倍 θ 之中，使 $\cos\theta$ 為有理數的只有滿足 $\cos\theta \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ 的那些。其證明方法是證明 $2\cos\theta$ 是一個代數整數（algebraic integer）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是建立這類論證背後的數論基礎的好起點。

詳細解答

STEP III 2022，第 9 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP III 2022，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

這裏每一次碰撞其實都是同一種碰撞：一個運動中的質點撞向一個靜止、質量為其 k 倍的質點。因此第 (i) 部分開頭求出的因子 α 和 β 可以在第 (ii) 部分重用，因為在那裏 B（質量 km）撞向 C（質量 k^2m）。之後，每個「在同一點相遇」的條件，都只不過是把同一時刻的兩個表達式設為相等。在第 (ii) 部分我們會得到兩條關於 k 和 e 的方程，而其中一條原來正正就是第 (i) 部分的條件。

解答

我們把 A、B、C 視為在光滑表面上沿同一直線運動的質點，而碰撞是瞬時的。所有速度均以 A 初始運動的方向為正方向。

第 (i) 部分

第一次碰撞。動量（momentum）守恆，而牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）指出分離速率等於接近速率的 e 倍：

$$mu = mv_1 + kmv_2, \qquad v_2 - v_1 = eu.$$

把 $v_1 = v_2 - eu$ 代入第一條方程，得 $u = v_2 - eu + kv_2$，因此

$$v_2 = \frac{1+e}{k+1}u = \beta u, \qquad v_1 = \frac{1+e}{k+1}u - eu = \frac{1+e-ek-e}{k+1}u = \frac{1-ke}{k+1}u = \alpha u,$$

即為所求。

第二次碰撞。由第一次碰撞起計時。B 用時 $D/(\beta u)$ 走完到牆壁的距離 D。它以速率 $e\beta u$ 反彈，所以再用時 $D/(2e\beta u)$ 往碰撞點方向走回 $\frac{1}{2}D$。若第二次碰撞在那裏發生，則

發生時刻為

$$T = \frac{D}{\beta u}\left(1 + \frac{1}{2e}\right) = \frac{(2e+1)D}{2e\beta u}.$$

該點距離牆壁 $\frac{1}{2}D$，因此它同時位於第一次碰撞點之後 $\frac{1}{2}D$ 處。A 以恆定速度 αu 運動，所以必須有 $\alpha > 0$ 及 $\alpha u T = \frac{1}{2}D$：

$$\alpha \frac{(2e+1)D}{2e\beta} = \frac{D}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(2e+1) = e\beta.$$

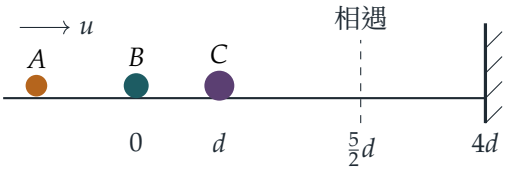
兩邊乘以 $k+1$，得 $(1-ke)(2e+1) = e(1+e)$，因此

$$ke(2e+1) = (2e+1) - e - e^2 = 1 + e - e^2 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1+e-e^2}{e(2e+1)},$$

這就是所求的結果。這個值確實給出 $\alpha > 0$：它使 $ke = \frac{1+e-e^2}{2e+1}$，而由於當 $e > 0$ 時 $1 + e - e^2 < 1 + 2e$，此值小於 1。

第 (ii) 部分

把原點設在 B 的起點，使 C 從 $x = d$ 出發，而牆壁位於 $x = 4d$。所要求的相遇點距離牆壁 $\frac{3}{2}d$，即位於 $x = \frac{5}{2}d$。



設 A 撞上 B 的一刻為 $t = 0$。這次碰撞與第 (i) 部分的完全相同，所以碰撞後 A 的速度為 αu，B 的速度為 βu，其中 α 和 β 與之前相同。

想一想 B 撞上 C 時會發生甚麼？我們需要重做碰撞的代數運算嗎？

不需要。C 靜止，而它的質量 $k^2 m$ 是 B 的質量 km 的 k 倍。所以這又是第 (i) 部分的碰撞，質量比同樣是 k，e 相同，只是入射速率由 u 變成 βu。B 在時刻 $t_1 = d/(\beta u)$ 撞上 C。碰撞後 B 的速度為 $\alpha\beta u$，C 的速度為 $\beta^2 u$。

現在我們計算每個質點何時到達 $x = \frac{5}{2}d$，並假設在此之前沒有其他碰撞發生（我們會在最後驗證這一點）。

- A 從 $x = 0$ 以 αu 運動，所以在 $t = \dfrac{5d}{2\alpha u}$ 到達。
- B 在 t_1 到達 $x = d$，然後以速率 $\alpha\beta u$ 走 $\frac{3}{2}d$。它在 $t = \dfrac{d}{\beta u} + \dfrac{3d}{2\alpha\beta u}$ 到達。

► C 以 $\beta^2 u$ 走 $3d$ 到牆壁，再以 $e\beta^2 u$ 往回走 $\frac{3}{2}d$。它到達的時刻為

$$t = \frac{d}{\beta u} + \frac{3d}{\beta^2 u}\left(1 + \frac{1}{2e}\right) = \frac{d}{\beta u} + \frac{3(2e+1)d}{2e\beta^2 u}.$$

要發生同時碰撞，三個時刻必須相等。

B 與 C。消去公共項 $d/(\beta u)$，再乘以 $2\beta^2 u/(3d)$：

$$\frac{1}{\alpha}\beta = \frac{2e+1}{e} \quad\Longleftrightarrow\quad e\beta = \alpha(2e+1).$$

這正正是第 (i) 部分的條件，所以

$$k = \frac{1+e-e^2}{e(2e+1)}. \tag{1}$$

（這並非巧合。在兩種情況下，都是一個質點離開碰撞後，以入射速率的 β 倍走 D 到牆壁，再折返 $\frac{1}{2}D$；與此同時，另一個質點以入射速率的 α 倍向前走 $\frac{1}{2}D$。這裏 $D = 3d$，而入射速率為 βu。）

A 與 B。把 $\dfrac{5}{2\alpha} = \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{3}{2\alpha\beta}$ 乘以 $2\alpha\beta$，得 $5\beta = 2\alpha + 3$。再乘以 $k+1$：

$$5(1+e) = 2(1-ke) + 3(k+1) \quad\Longrightarrow\quad 5e = k(3-2e) \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{5e}{3-2e}. \tag{2}$$

想一想 我們有兩個 k 的表達式。怎樣求出 e？

令 (1) 與 (2) 相等。由於 $0 < e < 1$，兩個分母都是正數，所以可以交叉相乘：

$$\begin{aligned} 5e^2(2e+1) &= (3-2e)(1+e-e^2) \\ 10e^3 + 5e^2 &= 3 + e - 5e^2 + 2e^3 \\ 0 &= 8e^3 + 10e^2 - e - 3. \end{aligned}$$

試代 $e = \frac{1}{2}$，得 $1 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - 3 = 0$，所以 $2e-1$ 是一個因式：

$$8e^3 + 10e^2 - e - 3 = (2e-1)(4e^2 + 7e + 3) = (2e-1)(4e+3)(e+1).$$

其餘的根 $-\frac{3}{4}$ 和 -1 都是負數，所以滿足 $0 < e < 1$ 的唯一根是 $e = \frac{1}{2}$，即為所求。於是 $k = \frac{5}{4}$。

驗證情境是否自洽。當 $e = \frac{1}{2}$、$k = \frac{5}{4}$ 時，得 $\alpha = \frac{1}{6}$ 及 $\beta = \frac{2}{3}$。在 B 撞上 C 之前，A（速率 $\frac{1}{6}u$）比 B（速率 $\frac{2}{3}u$）慢，所以不能提早追上 B。之後，B（速率 $\frac{1}{9}u$）比 C（速率 $\frac{4}{9}u$）慢，所以 B 不能在 C 到達牆壁前追上 C。這時 B 比 A 慢，所以 A 逐漸追近 B，而它們只在我們算出的那一點相遇。因此不會有額外的碰撞，三個質點都在 $t = 15d/u$ 時到達 $x = \frac{5}{2}d$。

驗算

- 在第 (i) 部分，$v_1 + kv_2 = u$（動量）及 $v_2 - v_1 = eu$（恢復係數）。若 $e = 1$ 且 $k = 1$，則 $\alpha = 0$ 及 $\beta = 1$：在完全彈性碰撞中，質量相等的兩個質點互換速度，理應如此。
- 在第 (ii) 部分，取 $u = d = 1$ 及上述數值，三個到達時刻分別為：A 是 $\frac{5/2}{1/6} = 15$，B 是 $\frac{1}{2/3} + \frac{3/2}{1/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 15$，$C$ 是 $\frac{3}{2} + \frac{3}{4/9} + \frac{3/2}{2/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{4} + \frac{27}{4} = 15$。
- 公式 (1) 在 $e = \frac{1}{2}$ 時給出 $k = \frac{5/4}{1} = \frac{5}{4}$，與 (2) 一致：$\frac{5/2}{2} = \frac{5}{4}$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分，應該由碰撞點量度相遇點，卻由牆壁量度。在這裏兩者恰巧相同，都是 $\frac{1}{2}D$；但在第 (ii) 部分，距離牆壁 $\frac{3}{2}d$ 的相遇點，距離 B 的起點是 $\frac{5}{2}d$。
- 從頭重做 B–C 的碰撞而漏了一個因子。留意到質量比再次是 k，便可省去這些功夫。
- 忘記 C 從牆壁反彈後的速率是 $e\beta^2 u$，而不是 $\beta^2 u$。

STEP 之外

這道題之所以行得通，是因為問題具有**自相似性**（self-similar）：把質量乘以 k、速率乘以 β，就把一次碰撞變成下一次碰撞，所以同一套代數運算會重複出現。同樣的想法也出現在質量按幾何級數遞減的一串球之中——這樣的球串能非常有效地把能量傳遞下去；它亦是著名的「用碰撞方塊數出 π」問題背後的道理，而該問題在速度空間中、以動量和能量作為約束來分析最為簡潔。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）有系統地處理碰撞問題，包括在質心參考系（centre-of-mass frame）中進行分析，這使得像 α 和 β 這樣的公式一目了然。

詳細解答

STEP III 2022，第 10 題

力學 • 彈簧的平衡

STEP III 2022，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

由於 P 處的角是直角，兩條彈簧的拉力互相垂直。因此沿每條彈簧方向分解（resolve），便能各自單獨求出每個張力（tension），無須解聯立方程。至於能量方面，彈性勢能項與重力勢能項合併得出奇地簡潔，使 p 成為 θ 的一個簡單函數（function）。第 (ii) 部分真正的重點，其實在於 θ 所受的物理限制：兩條彈簧都必須處於伸長狀態。

解答

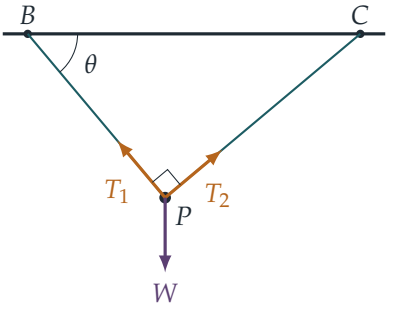
我們把 P 視為質點，並假設彈簧是輕的且遵守胡克定律（Hooke's law）。於是，一條彈性模量（modulus）為 λ、自然長度（natural length）為 a 的彈簧被拉長至長度 l 時，其張力為 $\lambda(l-a)/a$，所儲存的能量為 $\lambda(l-a)^2/(2a)$。

第 (i) 部分

由於 $BC = 2a$ 且角 $BPC = 90°$，三角形 BPC 的斜邊為 BC，所以

$$PB = 2a\cos\theta, \qquad PC = 2a\sin\theta, \qquad \angle PCB = 90° - \theta.$$

設 T_1 和 T_2 分別為 PB 和 PC 中的張力。



直線 PB 與水平方向成角 θ，所以它與鉛垂方向成角 $90^\circ - \theta$；同理，PC 與鉛垂方向成角 θ。由於 $PB \perp PC$，沿 PB 方向分解時只涉及 T_1 和重量，而重量沿 BP 方向（背離 B）的分量為 $W\cos(90^\circ - \theta) = W\sin\theta$。所以

$$T_1 = W\sin\theta, \qquad \text{同理，沿} PC, \qquad T_2 = W\cos\theta.$$

由胡克定律，

$$T_1 = \frac{s_1 W(2a\cos\theta - a)}{a} = s_1 W(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = s_2 W(2\sin\theta - 1).$$

令兩者相等，得

$$s_1 = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}, \qquad s_2 = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta - 1},$$

這就是所求的 s_1，並一併得出 s_2。

第 (ii) 部分

重力勢能。 P 位於 BC 下方，距離等於三角形從 P 出發的高，即 $PB\sin\theta = 2a\sin\theta\cos\theta = a\sin 2\theta$。以 BC 為零勢能水平，重力勢能（gravitational potential energy）為 $-Wa\sin 2\theta$。

彈性勢能。 PB 的伸長量（extension）為 $a(2\cos\theta - 1)$，因此利用第 (i) 部分，

$$\frac{s_1 W\, a^2(2\cos\theta - 1)^2}{2a} = \tfrac{1}{2}Wa\, s_1(2\cos\theta - 1)^2 = \tfrac{1}{2}Wa\sin\theta\,(2\cos\theta - 1),$$

同理，PC 中的能量為 $\frac{1}{2}Wa\cos\theta\,(2\sin\theta - 1)$。

總和。相加得

$$\begin{aligned} -paW &= -Wa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}Wa\big(2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\big) \\ &= -Wa\sin 2\theta + Wa\sin 2\theta - \tfrac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned}$$

所以

$$p = \tfrac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\big(\theta + \tfrac{\pi}{4}\big).$$

想一想 θ 可以是 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間的任何值嗎？

不可以。模量 s_1W 和 s_2W 均為正數，而張力 $W\sin\theta$ 和 $W\cos\theta$ 亦為正數，所以兩條彈簧都必須處於伸長狀態：$2\cos\theta - 1 > 0$ 且 $2\sin\theta - 1 > 0$。（若其中一項為零，該彈簧便不會產生任何力，卻仍須提供非零的張力。）因此 $\cos\theta > \frac{1}{2}$ 且 $\sin\theta > \frac{1}{2}$，即

$$\tfrac{\pi}{6} < \theta < \tfrac{\pi}{3}, \qquad \text{故} \qquad \tfrac{5\pi}{12} < \theta + \tfrac{\pi}{4} < \tfrac{7\pi}{12}.$$

這個區間關於 $\frac{\pi}{2}$ 對稱。在此區間上，$\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ 最大為 1（在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時取得），並嚴格大於它在端點的值 $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{7\pi}{12}$。而

$$\sin\tfrac{5\pi}{12} = \sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4},$$

所以

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \;\geq\; p \;>\; \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{3}),$$

得證。

*一位有效數字。*我們需要 $0.65 \leq p < 0.75$，並以平方的方法來證明根式（surd）的估值。由於 $1.6^2 = 2.56 < 3$，得 $\sqrt{3} > 1.6$，所以 $p > \frac{1}{4}(2.6) = 0.65$。由於 $1.5^2 = 2.25 > 2$，得 $\sqrt{2} < 1.5$，所以 $p \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} < 0.75$。因此，準確至一位有效數字（significant figure），$p = 0.7$。

驗算

- 當 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時，整個裝置是對稱的；事實上 $s_1 = s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$，且 $p = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.7071$。
- 當 $\theta \to \frac{\pi}{6}^+$ 時，$s_1 \to \infty$：彈簧 PB 處於自然長度，必須無限堅硬才能承受張力。此時 $p \to \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}) \approx 0.6830$，即下界。
- 我們用電腦對 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 中許多隨機的 θ 作驗證，確認所求得的位置是總勢能的駐點（stationary point）（因此確實是平衡位置（equilibrium）），而且能量等於 $-\frac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta)$。

常見錯誤

- 把重力勢能寫成正號：P 位於零勢能水平的*下方*。
- 在整個 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上求 $\frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$ 的範圍，因而得出錯誤的下界 $\frac{1}{2}$；彈簧必須處於張緊狀態。
- 直接引用 $\sqrt{3} \approx 1.732$，卻沒有說明誤差不會影響捨入結果。

STEP 之外

第 (ii) 部分中的抵消並非巧合：在平衡位置，總勢能取駐值；而對於遵守胡克定律的彈簧，彈性勢能恰好是（張力 $\times$ 伸長量）的一半，這使它與克服重力所做的功緊密相連。把平衡位置視為勢能的駐點來研究，並透過二階導數（second derivative）判斷其穩定性（stability），是大學一年級力學的核心主題之一。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這種能量觀點有細緻的闡述。

詳細解答

STEP III 2022，第 11 題

概率與統計 • 二項分佈的平均偏差

STEP III 2022，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

硬幣公平，所以 X 的分佈（distribution）關於其均值（mean）對稱（symmetric），即低於均值的概率與高於均值的概率一一對應。利用這種對稱性，可以把絕對值（absolute value）化為單側的和。接着，(i)(c) 中的恆等式（identity）把 $\sum r\binom{2n}{r}$ 化為一個較小的二項分佈（binomial distribution）的尾部和（tail sum），而這個尾部和同樣可以用對稱性求出。

解答

全題中 $X \sim \mathrm{B}(N, \frac{1}{2})$，所以 $\mathrm{P}(X = r) = \binom{N}{r}2^{-N}$，且 $\mu = \frac{1}{2}N$。由於 $\binom{N}{r} = \binom{N}{N-r}$，我們有 $\mathrm{P}(X = r) = \mathrm{P}(X = N - r)$：分佈關於 $\frac{1}{2}N$ 對稱。

第 (i)(a) 部分

當 $N = 2n$ 時，映射 $r \mapsto 2n - r$ 把 $\{0, \ldots, n-1\}$ 映到 $\{n+1, \ldots, 2n\}$，所以由對稱性得

$$\mathrm{P}(X \leq n-1) = \mathrm{P}(X \geq n+1).$$

三個事件 $X \leq n-1$、$X = n$、$X \geq n+1$ 涵蓋了所有結果，所以 $2\,\mathrm{P}(X \leq n-1) + \mathrm{P}(X = n) = 1$，由此得

$$\mathrm{P}(X \leq n-1) = \tfrac{1}{2}\big(1 - \mathrm{P}(X = n)\big).$$

第 (i)(b) 部分

此時 $\mu = n$，所以

$$\delta = \sum_{r=0}^{2n} |r-n| \binom{2n}{r} \frac{1}{2^{2n}}.$$

$r = n$ 的項為零。在 $r \geq n+1$ 的各項中代入 $r = 2n - s$，得 $|r-n| = n-s$ 及 $\binom{2n}{r} = \binom{2n}{s}$，其中 $0 \leq s \leq n-1$。因此，高於均值的各項恰好重複了低於均值的各項：

$$\delta = 2\sum_{r=0}^{n-1} (n-r)\binom{2n}{r}\frac{1}{2^{2n}} = \sum_{r=0}^{n-1}(n-r)\binom{2n}{r}\frac{1}{2^{2n-1}},$$

得證。

第 (i)(c) 部分

對於 $1 \leq r \leq 2n$，

$$r\binom{2n}{r} = \frac{r\,(2n)!}{r!\,(2n-r)!} = 2n \cdot \frac{(2n-1)!}{(r-1)!\,(2n-r)!} = 2n\binom{2n-1}{r-1}.$$

現在把 (b) 中的和拆成 $2^{2n-1}\delta = A - B$，其中

$$A = n\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}, \qquad B = \sum_{r=1}^{n-1} r\binom{2n}{r}$$

（B 中 $r=0$ 的項為零，所以略去）。

和 A。由 (a)，$\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r} = 2^{2n}\,\mathrm{P}(X \leq n-1) = 2^{2n-1} - \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$，所以

$$A = n\,2^{2n-1} - \tfrac{n}{2}\binom{2n}{n}.$$

想一想 當 s 由 0 到 $n-2$ 時，怎樣求 $\binom{2n-1}{s}$ 的總和？

和 B。由上述恆等式，令 $s = r-1$，

$$B = 2n\sum_{s=0}^{n-2}\binom{2n-1}{s}.$$

這一行 $\binom{2n-1}{s}$（$0 \leq s \leq 2n-1$）共有偶數個項，總和為 2^{2n-1}。它在 $s \mapsto 2n-1-s$ 下對稱，而這個映射把 $\{0,\ldots,n-1\}$ 與 $\{n,\ldots,2n-1\}$ 互換，所以前一半的和是 2^{2n-2}。我們的和比這一半少了最後一項，所以

$$\sum_{s=0}^{n-2}\binom{2n-1}{s} = 2^{2n-2} - \binom{2n-1}{n-1} = 2^{2n-2} - \tfrac{1}{2}\binom{2n}{n},$$

這裏用了 $\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$。因此

$$B = n\,2^{2n-1} - n\binom{2n}{n}.$$

合併起來。

$$2^{2n-1}\delta = A - B = \left(n - \frac{n}{2}\right)\binom{2n}{n} = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}, \qquad \text{所以} \qquad \delta = \frac{n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

第 (ii) 部分

現在 $N = 2n+1$，$\mu = n + \frac{1}{2}$，這並不是 X 可取的值。對稱映射 $r \mapsto 2n+1-r$ 把 $\{0,\dots,n\}$ 與 $\{n+1,\dots,2n+1\}$ 互換，並且保持 $|r-\mu|$ 和 $\binom{2n+1}{r}$ 不變。所以，與 (i)(b) 一樣，

$$\delta = 2\sum_{r=0}^{n}\left(n+\tfrac{1}{2}-r\right)\binom{2n+1}{r}\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n}(2n+1-2r)\binom{2n+1}{r}.$$

- 由同樣的對稱性，這一行 $\binom{2n+1}{r}$ 前一半的和是 2^{2n+1} 的一半：$\sum_{r=0}^{n}\binom{2n+1}{r} = 2^{2n}$。
- 由恆等式 $r\binom{2n+1}{r} = (2n+1)\binom{2n}{r-1}$（證明與 (i)(c) 完全相同），再用 (i)(a)，

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{2n+1}{r} = (2n+1)\sum_{s=0}^{n-1}\binom{2n}{s} = (2n+1)\left(2^{2n-1} - \tfrac{1}{2}\binom{2n}{n}\right).$$

因此

$$\sum_{r=0}^{n}(2n+1-2r)\binom{2n+1}{r} = (2n+1)2^{2n} - (2n+1)\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right) = (2n+1)\binom{2n}{n},$$

而當 $N = 2n+1$ 時，

$$\boxed{\delta = \frac{2n+1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}}$$

驗算

- $N = 3$（$n = 1$）：$|X - \frac{3}{2}|$ 以概率 $\frac{1}{4}$ 取值 $\frac{3}{2}$，以概率 $\frac{3}{4}$ 取值 $\frac{1}{2}$，所以 $\delta = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$。公式給出 $\frac{3\cdot 2}{8} = \frac{3}{4}$。當 $n = 0$（$N = 1$）時，公式給出 $\frac{1}{2}$，同樣正確。
- $N = 4$（$n = 2$）：(i)(c) 給出 $\frac{2\cdot 6}{16} = \frac{3}{4}$，與 $N = 3$ 的結果相同。事實上，$N = 2n+1$ 時的 δ 總是等於 $N = 2n+2$ 時的 δ：由於 $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$，把偶數情況公式中的 n 換成 $n+1$，便化簡為奇數情況的公式。
- 經電腦驗算，對所有 $N \le 60$，兩條公式都與 δ 的定義完全吻合；例如 $N = 10$ 給出 $\delta = \frac{315}{256} \approx 1.230$。

常見錯誤

- 忘記對稱性帶來的因子 2；(i)(b) 中出現 2^{2n-1} 而不是 2^{2n}，正是因為這個因子。
- 作平移 $s = r - 1$ 後弄錯 s 的範圍：和止於 $n - 2$，比半行少一項，而正是缺少的那一項 $\binom{2n-1}{n-1}$ 令答案不為零。
- 在 (ii) 中把 μ 當作整數：其實沒有任何一項為零，而且這一行的兩半各有 $n + 1$ 項。

STEP 之外

斯特林公式（Stirling's formula）給出 $\binom{2n}{n} \approx 4^n/\sqrt{\pi n}$，所以當 N 很大時，$\delta \approx \sqrt{N/(2\pi)}$。由於 $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{N}$，這就是 $\delta \approx \sigma\sqrt{2/\pi}$，恰好是正態分佈（normal distribution）的平均絕對偏差（mean absolute deviation），正如中心極限定理（central limit theorem）所預測。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）既講解了二項分佈的正態近似，也講解了其背後的中心極限定理。

詳細解答

STEP III 2022，第 12 題

概率與統計 • 圓的隨機弦

STEP III 2022，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 12.3 節「隨機」是甚麼意思？中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/bertrand.html

關鍵思路

本題中所有的弦都源自同一個事實：在半徑為 a 的圓中，與圓心的垂直距離為 d 的弦（chord），長度為 $2\sqrt{a^2-d^2}$。因此要做的，就是用隨機量把 d 表示出來，然後求平均。在第 (ii) 部分，代換（substitution）$u = a^2 - r^2\sin^2 t$ 是很自然的選擇，因為 R 的概率密度（probability density）恰好提供了這個代換所需要的因子 r。

解答

第 (i) 部分

設 Θ 為角 AOB，則 Θ 在 $[0, 2\pi]$ 上均勻分佈（uniformly distributed），密度為 $\frac{1}{2\pi}$。三角形 AOB 是頂角為 Θ 的等腰三角形。從 O 向 AB 作垂線，這條垂線同時平分頂角和弦，所以

$$AB = 2a\sin\tfrac{1}{2}\Theta.$$

這對所有 $\Theta \in [0, 2\pi]$ 都成立，因為在這個範圍內 $\sin\frac{1}{2}\Theta \geq 0$；當 $\Theta > \pi$ 時，我們量度的是優角（reflex angle），但弦是同一條。因此

$$\mathrm{E}(AB) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\pi}\Big[-2\cos\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{a}{\pi}(2+2) = \frac{4a}{\pi}.$$

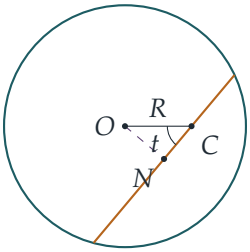
第 (ii) 部分

R **的密度**。對於 $0 \le r \le a$，事件 $R \le r$ 表示 C 落在以 O 為圓心、半徑為 r 的圓盤內。由於概率與面積成正比，

$$\mathrm{P}(R \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}, \qquad \text{所以} \qquad f_R(r) = \frac{2r}{a^2} \quad (0 \le r \le a),$$

而在其他情況下 $f_R(r) = 0$。

弦的長度。設 N 為從 O 到弦的垂足。在直角三角形 ONC 中，斜邊是 $OC = R$，而在 C 處的角是 t，所以 $ON = R\sin t$。



從圓心所作的垂線平分弦，N 就是弦的中點，所以在由 O、N 和弦的一個端點組成的三角形中應用畢氏定理（Pythagoras' theorem），得

$$\text{弦長} = 2\sqrt{a^2 - R^2\sin^2 t}.$$

由於 $R < a$，根號內的式子是正數。注意這裡計算的是整條弦，包括 C 兩側的部分。

期望長度。固定 t，而 C 為隨機，

$$\mathrm{L}(t) = \int_0^a 2\sqrt{a^2 - r^2\sin^2 t}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r.$$

取 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$，使得 $\sin t \ne 0$。代入 $u = a^2 - r^2\sin^2 t$，則 $\mathrm{d}u = -2r\sin^2 t\,\mathrm{d}r$；當 $r = 0$ 時 $u = a^2$，當 $r = a$ 時 $u = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2\cos^2 t$。於是

$$\mathrm{L}(t) = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\int_{a^2\cos^2 t}^{a^2} u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\cdot\frac{2}{3}\left(a^3 - a^3\cos^3 t\right) = \frac{4a(1-\cos^3 t)}{3\sin^2 t},$$

其中用到 $(a^2\cos^2 t)^{3/2} = a^3\cos^3 t$，這是成立的，因為對於銳角，$\cos t \ge 0$。這就是所求的公式。

想一想 怎樣才能把分母 $\sin^2 t$ 化成可以與 $1 - \cos^3 t$ 約去的形式？

設 $c = \cos t$。那麼 $\sin^2 t = 1 - c^2 = (1-c)(1+c)$，而 $1 - c^3$ 是立方差（difference of cubes），即 $(1-c)(1+c+c^2)$。由於 $c \ne 1$，可以約去 $1 - c$：

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\cdot\frac{1+c+c^2}{1+c} = \frac{4a}{3}\left(c + \frac{1}{1+c}\right),$$

因為 $c(1+c)+1 = 1+c+c^2$。最後，$1+\cos t = 2\cos^2 \frac{1}{2}t$，所以 $\dfrac{1}{1+\cos t} = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{1}{2}t$，從而

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\Big(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\big(\tfrac{1}{2}t\big)\Big),$$

即為所求。這個形式在 $t = 0$ 時沒有問題：它給出 $\frac{4a}{3}\cdot\frac{3}{2} = 2a$，這是正確的，因為沿 OC 方向經過 C 的弦就是直徑。

第 (iii) 部分

T 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上的密度為 $\frac{2}{\pi}$，所以使用 L 的第二個形式（它很容易積分，因為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t$），

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(\mathrm{L}(T)\big) &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{4a}{3}\int_0^{\pi/2}\Big(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}t\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{8a}{3\pi}\Big[\sin t + \tan\tfrac{1}{2}t\Big]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{8a}{3\pi}(1+1) = \frac{16a}{3\pi}.\end{aligned}$$

驗算

- 當 $t = \frac{1}{2}\pi$ 時，弦垂直於 OC，而 $\mathrm{L} = \frac{4a}{3}(0+\frac{1}{2}\cdot 2) = \frac{4a}{3}$。直接計算，$\int_0^a 2\sqrt{a^2-r^2}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4a}{3}$，結果相同。
- 當 t 由 0 增至 $\frac{1}{2}\pi$ 時，$\mathrm{L}(t)$ 應由 $2a$ 下降至 $\frac{4}{3}a$；而 (iii) 的答案 $\frac{16}{3\pi}a \approx 1.698a$ 正好介於兩者之間，平均值理應如此。
- 取 $a = 1.7$ 和 $t = 0.7$，將弦長乘以 R 的密度作數值積分，得 3.01799，與 $\mathrm{L}(0.7)$ 的兩條公式結果一致。(i) 的答案 $\frac{4}{\pi}a \approx 1.273a$ 亦已用數值積分核實。

常見錯誤

- 以為 R 在 $[0,a]$ 上均勻分佈。點是按面積均勻分佈的，而離圓心越遠，面積越多，因此密度是 $2r/a^2$。
- 只計算弦在 C 一側的部分，或者寫成 $ON = R\cos t$（那是沿弦方向的距離 CN）。
- 在第 (iii) 部分積分 $\mathrm{L}(t)$ 的第一個形式，而不是第二個形式；題目特意設計了第二個形式，讓你一行就能積分。

STEP 之外

這是幾何概率（geometric probability）：「隨機選取」只有在確定了分佈之後才有意義。答案 $\frac{4a}{\pi}$ 和 $\frac{16a}{3\pi}$ 之所以不同，是因為它們描述的是選取弦的不同方式，這正是貝特朗悖論（Bertrand's paradox）的要點。積分幾何（integral geometry）利用在旋轉和平移下保持不變的直線測度，把這類問題系統化。關於區域上的連續分佈以及本題這類期望值的計算，可參閱 Blitzstein 和 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2022 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。