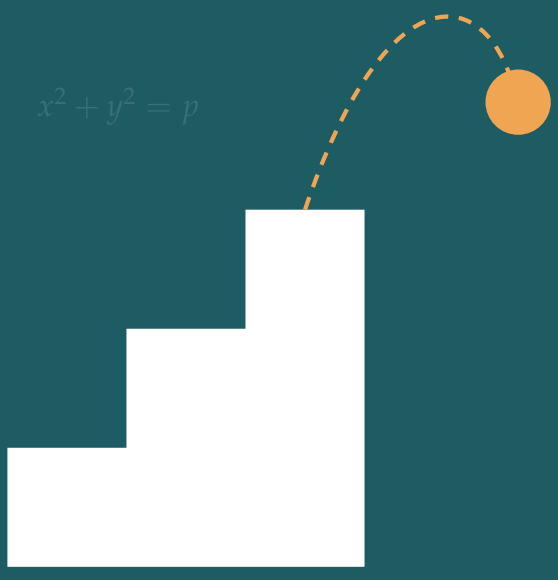
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP II 及 III

2021 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP II 及 III

2021 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2021 年詳細解答

2021 年 STEP 試卷（STEP II 及 III）全部 24 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP II

第 1 題 三角方程 純數學 . . . 3

第 2 題 根的對稱函數 純數學 . . . 7

第 3 題 整數部分與小數部分 純數學 . . . 11

第 4 題 Lambert W 函數 純數學 . . . 15

第 5 題 一階微分方程 純數學 . . . 20

第 6 題 圓幾何的近似 純數學 . . . 24

第 7 題 旋轉矩陣 純數學 . . . 28

第 8 題 積分遞推關係 純數學 . . . 32

第 9 題 靜力學 力學 . . . 36

第 10 題 非慣性參考系 力學 . . . 40

第 11 題 條件概率的遞推關係 概率與統計 . . . 44

第 12 題 賭徒破產問題 概率與統計 . . . 48

STEP III

第 1 題 參數曲線的法線 純數學 . . . 51

第 2 題 行列式與不等式 純數學 . . . 55

第 3 題 積分不等式 純數學 . . . 59

第 4 題 向量與投影 純數學 . . . 62

第 5 題 極坐標曲線 純數學 . . . 66

第 6 題 反函數與導數 純數學 . . . 71

第 7 題 幾何中的複數 純數學 . . . 76

第 8 題 遞推關係與極限 純數學 . . . 80

第 9 題 斜碰撞與恢復係數 力學 . . . 84

第 10 題 纏繞繩的運動 力學 . . . 88

第 11 指數分佈 概率與統計 92
第 12 種的方差 概率與統計 95

詳細解答

STEP II 2021，第 1 題

純數學 • 三角方程

> **STEP II 2021，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

正弦與餘弦的乘積不好處理，但它們的和卻很容易處理，所以開首的恆等式(identity)讓我們把乘積換成和。在 (i) 中，這把一個三重乘積化成一個關於 $\cos 2x$ 的三次式(cubic)，而且有一個一眼可見的因式。在 (ii) 中，我們先消去正切（tangent），再把每個因子與另一類型的對應因子配對，整條方程便會化簡成兩個簡單因式的乘積。唯一需要額外留意的，是正切無定義的那些點。

解答

恆等式

把展開式

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B, \qquad \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

相加，得 $\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B$。取 $A = 3a$ 及 $B = a$，

$$\cos a\cos 3a = \tfrac{1}{2}(\cos 4a + \cos 2a),$$

此即所求。同樣地，把 $\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$ 相加，得 $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$。取 $A = a$ 及 $B = 3a$，並利用 $\sin(-2a) = -\sin 2a$，

$$\sin a\cos 3a = \tfrac{1}{2}(\sin 4a - \sin 2a).$$

（把角色對調，取 $A = 3a$ 及 $B = a$，便得到配套的 $\cos a\sin 3a = \frac{1}{2}(\sin 4a + \sin 2a)$，稍後我們也會用到。）

第 (i) 部分

由第一條恆等式，$4\cos x\cos 2x\cos 3x = 2\cos 2x\,(\cos 4x + \cos 2x)$。設 $c = \cos 2x$，於是 $\cos 4x = 2c^2 - 1$。方程變成

$$2c\,(2c^2 + c - 1) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4c^3 + 2c^2 - 2c - 1 = 0.$$

把各項兩兩分組，$2c^2(2c+1) - (2c+1) = 0$，即

$$(2c+1)(2c^2 - 1) = 0,$$

所以 $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ 或 $\cos 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。

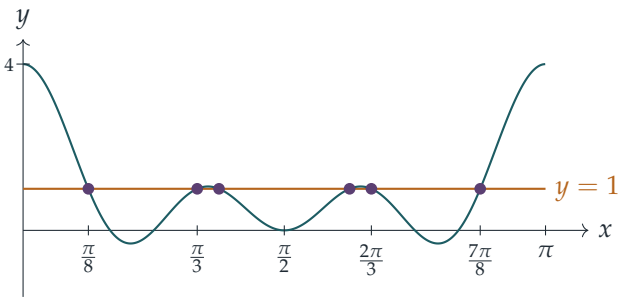
當 $0 \le x \le \pi$ 時，$0 \le 2x \le 2\pi$，而 $\cos 2x$ 每一個嚴格介乎 -1 與 1 之間的值，都在此範圍內給出兩個 $2x$ 的值：

$$\begin{aligned}
\cos 2x = -\tfrac{1}{2} &\implies 2x = \tfrac{2\pi}{3},\ \tfrac{4\pi}{3} &&\implies x = \tfrac{\pi}{3},\ \tfrac{2\pi}{3};\\
\cos 2x = \tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{\pi}{4},\ \tfrac{7\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{\pi}{8},\ \tfrac{7\pi}{8};\\
\cos 2x = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{3\pi}{4},\ \tfrac{5\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{3\pi}{8},\ \tfrac{5\pi}{8}.
\end{aligned}$$

每一步都是可逆的，所以解為

$$x = \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{7\pi}{8}.$$

圖像證實曲線與直線 $y = 1$ 恰好相交六次。



第 (ii) 部分

設 $\tan x = \tan 2x \tan 3x \tan 4x$。要這式子有意義，四個正切都必須有定義，所以 $\cos x$、$\cos 2x$、$\cos 3x$ 及 $\cos 4x$ 全都不為零。因此我們可以兩邊同乘 $\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x$，得

$$\sin x\cos 3x \cdot \cos 2x\cos 4x = \cos x\sin 3x \cdot \sin 2x\sin 4x.$$

? **想一想** 為甚麼要把 $\sin x$ 與 $\cos 3x$ 配對，把 $\cos x$ 與 $\sin 3x$ 配對？

因為這正好是我們的恆等式能化成和的乘積，而且兩個和都只涉及 $\sin 4x$ 與 $\sin 2x$，它們本來已在方程的其他地方出現。利用 $\sin x\cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$ 及 $\cos x \sin 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$，再乘以 2，

$$(\sin 4x - \sin 2x)\cos 2x \cos 4x = (\sin 4x + \sin 2x)\sin 2x \sin 4x.$$

現在把左邊的 $\sin 2x \cos 2x$ 換成 $\frac{1}{2}\sin 4x$，使每一項都有因子 $\sin 4x$：

$$\sin 4x \cos 4x \cos 2x - \tfrac{1}{2}\sin 4x \cos 4x = \sin 4x \sin^2 2x + \sin 4x \sin 4x \sin 2x.$$

把所有項移到同一邊，

$$\sin 4x \left[(\cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x) - \left(\sin^2 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right)\right] = 0.$$

第一個括號是 $\cos(4x + 2x) = \cos 6x$。至於第二個，$\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$，所以 $\sin^2 2x + \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{1}{2}$。因此

$$\sin 4x \left(\cos 6x - \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$

所以 $\cos 6x = \frac{1}{2}$ 或 $\sin 4x = 0$，此即所求。

接着求 $(\star)$ 在 $0 \le x \le \pi$ 內的解。

想一想 $\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$ 的每一個解都是 $(\star)$ 的解嗎？

不一定：唯一可能不可逆的步驟是乘以那些餘弦，而這一步恰好在四個正切都有定義時才可逆。所以 $(\star)$ 的解，就是 $\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$ 中滿足 $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x \neq 0$ 的那些解。

情況 $\sin 4x = 0$。在 $[0, \pi]$ 內這給出 $x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi$。在 $x = \frac{\pi}{4}$ 及 $x = \frac{3\pi}{4}$，$\tan 2x$ 無定義；在 $x = \frac{\pi}{2}$，$\tan x$ 無定義。在 $x = 0$ 及 $x = \pi$，每個正切都是 0，而 $(\star)$ 變成 $0 = 0$。所以 $x = 0$ 及 $x = \pi$ 是解。

情況 $\cos 6x = \frac{1}{2}$。此時 $6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$，所以 $x = \frac{(6k \pm 1)\pi}{18}$。由 $0 \le 6x \le 6\pi$ 得

$$x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}.$$

每一個都是 $\frac{m\pi}{18}$ 的形式，其中 m 不是 3 的倍數。餘弦 $\cos nx$ 只在 nx 是 $\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{18}$ 的奇數倍時才為零，這需要 $9 \mid nm$。由於 $3 \nmid m$，這就需要 $9 \mid n$，但對 $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ 而言這是不可能的。所以四個正切都有定義，這六個值全都是解。

總括而言，$(\star)$ 在 $0 \le x \le \pi$ 內有八個解：

$$x = 0, \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \pi.$$

驗算

- 在 (i) 中，當 $x = \frac{\pi}{8}$ 時：$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，且 $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$，所以乘積是 $4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1$。
- 在 (ii) 中，當 $x = \frac{\pi}{18} = 10^\circ$ 時：$\tan 10^\circ \approx 0.17633$，而 $\tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ \approx 0.36397 \times 0.57735 \times 0.83910 \approx 0.17633$。
- 用電腦在 $[0, \pi]$ 上掃描兩條方程，分別恰好找到六個和八個解，位置正是上述各值。

常見錯誤

- 在 (ii) 中保留了 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$：它們滿足 $\sin 4x = 0$，但會令 $(\star)$ 中某個正切無定義。
- 漏掉 $x = 0$ 及 $x = \pi$，或在每個週期內漏掉 $2x$（或 $6x$）的第二個值。
- 在化簡過程中除以 $\sin 4x$，這會失去題目要你找出的那個因式。

STEP 之外

積化和差公式（product-to-sum formulae）其實是 $e^{iA}e^{iB} = e^{i(A+B)}$ 在實變數世界中的投影：寫成 $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$，便能把任何餘弦的乘積化成和，而這正是通往傅里葉級數（Fourier series）的第一步——在傅里葉級數中，函數被展開成 $\cos nx$ 與 $\sin nx$ 的和。藏在 (ii) 中的驚人恆等式 $\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ$，正是把三角函數值看成單位根（roots of unity）時常會出現的那類驚喜。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）把這個觀點發揮得非常出色。

詳細解答

STEP II 2021，第 2 題

純數學 • 根的對稱函數

> **STEP II 2021，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

兩個數的冪和（sums of powers）完全由兩個量決定：它們的和與積。一旦知道 $a+b$ 和 a^2+b^2，積 ab 便隨之確定，a^3+b^3 亦然；這就是第 (i) 部分中的約束條件。第 (iii) 部分運用同一事實，只是把 c「移除」：從三個變量的和中分別減去 c、c^2、c^3，便剩下兩個變量的和，而第 (i) 部分的約束條件就變成 c 必須滿足的一條三次方程（cubic equation）。

解答

第 (i) 部分

由 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ 得 $p^2 = q+2ab$，所以

$$ab = \frac{p^2-q}{2}.$$

現在利用因式分解（factorisation）$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$：

$$\begin{aligned} r = a^3+b^3 &= p^3 - 3p\cdot\frac{p^2-q}{2} \\ &= \frac{2p^3-3p^3+3pq}{2} = \frac{3pq-p^3}{2}. \end{aligned}$$

因此 $3pq-p^3 = 2r$，得證。留意以上推導完全沒有用到 p、q、r 是實數（real）這一點：此恆等式對任何複數（complex）a 和 b 均成立。我們在第 (iii) 部分會用到這一點。

第 (ii) 部分

二次方程（quadratic）$2x^2-2px+(p^2-q)=0$ 總有兩個根（可能相等，也可能不是實數），由二次公式（quadratic formula）給出。把它們記為 a 和 b。兩邊除以 2，二次式

為 $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$，所以

$$a + b = p, \qquad ab = \frac{p^2 - q}{2}.$$

這直接給出 $(*)$ 中的第一條方程。然後

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = p^2 - (p^2 - q) = q,$$

這是第二條；而

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = p^3 - \frac{3p(p^2-q)}{2} = \frac{3pq - p^3}{2} = r,$$

最後一步用了假設 $3pq - p^3 = 2r$。所以 $(*)$ 中三條方程全部成立。

選取這條二次方程並非碰運氣：第 (i) 部分已告訴我們 ab 必須是甚麼，而兩根之和為 p、積為 $\frac{1}{2}(p^2 - q)$ 的二次式，正正就是 $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$。

第 (iii) 部分

設

$$p = a + b = s - c, \qquad q = a^2 + b^2 = t - c^2, \qquad r = a^3 + b^3 = u - c^3.$$

想一想 第 (i) 部分假設了 p、q、r 是實數，但這裏它們涉及 c，而 c 可能是複數。我們仍然可以使用第 (i) 部分的結果嗎？

可以：正如第 (i) 部分末尾所指出，那裏的論證純粹是代數運算，從未用到實數性。所以 $3pq - p^3 = 2r$，即

$$3(s-c)(t-c^2) - (s-c)^3 = 2(u - c^3).$$

展開，

$$3(s-c)(t-c^2) = 3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3,$$
$$(s-c)^3 = s^3 - 3s^2c + 3sc^2 - c^3,$$

所以方程變為

$$3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3 - s^3 + 3s^2c - 3sc^2 + c^3 = 2u - 2c^3.$$

按 c 的冪次合併：

$$6c^3 - 6sc^2 + 3(s^2 - t)c + 3st - s^3 - 2u = 0.$$

所以 c 是 $6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 0$ 的一個根，得證。

係數只取決於 s、t、u，而它們對 a、b、c 是對稱（symmetric）的。以 a（或 b）代替 c 的角色重複上述論證，可知 a 和 b 也是根。所以另外兩個根就是 a 和 b。

想一想 為何 a、b、c 互不相同這一點很重要？

三次方程最多只有三個根。由於 a、b、c 是三個不同的根，它們就是全部的根，而且每個都是單根（simple root），所以

$$6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 6(x-a)(x-b)(x-c).$$

（假如例如 $a = b$，我們便只知道兩個根，無法確定第三個。）比較常數項（constant term），得 $3st - s^3 - 2u = -6abc = -6v$，即

$$s^3 - 3st + 2u = 6v.$$

第 (iv) 部分

這裏 $s = 3$、$t = 1$、$u = -3$、$v = 2$。首先檢查一致性：第 (iii) 部分的條件為 $27 - 9 - 6 = 12 = 6 \times 2$，所以成立。第 (iii) 部分指出 a、b、c 應是

$$6x^3 - 18x^2 + 3(9-1)x + 9 - 27 + 6 = 6x^3 - 18x^2 + 24x - 12 = 0,$$

的根，即 $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ 的根。由於 $x = 1$ 代入得 $1 - 3 + 4 - 2 = 0$，

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)(x^2 - 2x + 2) = (x-1)\big((x-1)^2 + 1\big),$$

所以根為 1、$1 + \mathrm{i}$、$1 - \mathrm{i}$。取

$$a = 1, \qquad b = 1 + \mathrm{i}, \qquad c = 1 - \mathrm{i}.$$

第 (iii) 部分只告訴我們該往哪裏找，所以現在必須驗證：

- $a + b + c = 1 + (1 + \mathrm{i}) + (1 - \mathrm{i}) = 3$；
- $(1 + \mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ 及 $(1 - \mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$，所以 $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} = 1$；
- $(1+\mathrm{i})^3 = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -2 + 2\mathrm{i}$ 及 $(1-\mathrm{i})^3 = -2\mathrm{i}(1-\mathrm{i}) = -2 - 2\mathrm{i}$，所以 $a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 4 = -3$；
- $abc = 1 \cdot (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 1 \cdot 2 = 2$。

(∗∗) 中四條方程全部成立。（這三個數的任何排列都同樣適用。）

驗算

- 第 (i) 部分取 $a = 1$、$b = 2$：$p = 3$、$q = 5$、$r = 9$，而 $3pq - p^3 = 45 - 27 = 18 = 2r$。

- 第 (iii) 部分取 $a,b,c = 1,2,3$：$s = 6$、$t = 14$、$u = 36$、$v = 6$，而 $s^3 - 3st + 2u = 216 - 252 + 72 = 36 = 6v$。三次式為 $6x^3 - 36x^2 + 66x - 36 = 6(x-1)(x-2)(x-3)$，與預期相符。
- 第 (i)–(iii) 部分的恆等式亦已用電腦對大量隨機複數 a、b、c 作驗證。

常見錯誤

- 在第 (iii) 部分直接說「a 和 b 是另外兩個根」，卻沒有指出三次式的係數對 a、b、c 是對稱的。
- 由根之積推出 $s^3 - 3st + 2u = 6v$，卻沒有利用三數互不相同來確定 a、b、c 就是全部的根。
- 在第 (iv) 部分只求出三次方程的根便停下：題目要求你明確驗證四條方程。

STEP 之外

這道題是牛頓恆等式（Newton's identities）的一個小特例。牛頓恆等式把冪和 $a^k + b^k + c^k$ 與初等對稱函數（elementary symmetric functions）$a+b+c$、$ab+bc+ca$、abc 聯繫起來。對稱多項式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）指出，每個對稱多項式都可以用初等對稱多項式表示，而這正是伽羅瓦理論（Galois theory）的起點。如欲深入了解，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

詳細解答

STEP II 2021，第 3 題

純數學 • 整數部分與小數部分

STEP II 2021，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

每個實數都可以唯一地分拆成一個整數部分（integer part）和一個位於 $[0,1)$ 的小數部分（fractional part）。所以當一條方程說「一個整數加上一個 $[0,1)$ 中的數等於 4.9」時，兩部分都被確定了：整數必定是 4，小數部分必定是 0.9。在 (ii) 和 (iii) 中，各方程互相糾纏，但把三條方程相加，就能讓每個 $\lfloor t\rfloor + \{t\}$ 重新組合成 t。這樣便得到一條簡潔的線性方程（linear equation），再從它減去每條原方程，就能把未知數分離成正好是「整數加小數部分」的形式。

解答

以下一直會用到：若 n 是整數，$0 \le f < 1$ 且 $n + f = c$，則 $n = \lfloor c\rfloor$ 及 $f = \{c\}$。這是因為 $n \le c < n+1$，從而 n 被確定為不超過 c 的最大整數。

第 (i) 部分

在第一條方程中，$\lfloor x\rfloor$ 是整數而 $0 \le \{y\} < 1$，所以

$$\lfloor x\rfloor = 4, \qquad \{y\} = 0.9.$$

在第二條方程中，$\lfloor y\rfloor$ 是整數而 $0 \le \{x\} < 1$，所以 $\lfloor y\rfloor = \lfloor -1.4\rfloor = -2$ 及 $\{x\} = -1.4 - (-2) = 0.6$。因此

$$x = 4 + 0.6 = 4.6, \qquad y = -2 + 0.9 = -1.1.$$

它們滿足兩條方程（$4 + 0.9 = 4.9$ 及 $0.6 - 2 = -1.4$），而我們已證明這是唯一的解。

第 (ii) 部分

把三條方程相加。x、y、z 各自單獨出現一次，另外又以 $\lfloor\cdot\rfloor+\{\cdot\}$ 的形式分拆在兩條不同的方程中出現一次：

$$(x+y+z)+\big(\{x\}+\lfloor x\rfloor\big)+\big(\lfloor y\rfloor+\{y\}\big)+\big(\{z\}+\lfloor z\rfloor\big)=3.9+5.3+5,$$

即 $2(x+y+z)=14.2$，所以

$$x+y+z=7.1.$$

想一想 既然已知 $x+y+z$，從中減去其中一條原方程後，還剩下甚麼？

從 $x+y+z=7.1$ 減去第一條方程，x 被消去，剩下 $y-\lfloor y\rfloor$ 和 $z-\{z\}$：

$$\{y\}+\lfloor z\rfloor=7.1-3.9=3.2,$$

這正是所求的結果。同樣地，減去第二和第三條方程，得

$$\lfloor x\rfloor+\{z\}=7.1-5.3=1.8,\qquad \{x\}+\lfloor y\rfloor=7.1-5=2.1.$$

每條都是「整數加小數部分」的形式，所以

$$\begin{aligned}\lfloor z\rfloor&=3, & \{y\}&=0.2,\\ \lfloor x\rfloor&=1, & \{z\}&=0.8,\\ \lfloor y\rfloor&=2, & \{x\}&=0.1.\end{aligned}$$

因此 $x=1.1$、$y=2.2$、$z=3.8$。這是唯一可能的解，而且確實成立：

$$1.1+2+0.8=3.9,\qquad 0.1+2.2+3=5.3,\qquad 1+0.2+3.8=5.$$

第 (iii) 部分

同樣的技巧依然奏效。把三條方程相加，並利用 $2\lfloor y\rfloor+2\{y\}=2y$，

$$2x+4y+2z=14.2,\qquad \text{所以}\qquad x+2y+z=7.1.$$

從這條方程依次減去每條原方程，得

$$2\{y\}+\lfloor z\rfloor=3.2,\qquad \lfloor x\rfloor+\{z\}=1.8,\qquad \{x\}+2\lfloor y\rfloor=2.1.$$

中間那條是熟悉的類型，所以 $\lfloor x\rfloor=1$ 及 $\{z\}=0.8$。

在第三條方程中，$2\lfloor y\rfloor$ 仍然是整數而 $0\le\{x\}<1$，所以先前的推理仍然適用：$2\lfloor y\rfloor=2$ 及 $\{x\}=0.1$。因此 $\lfloor y\rfloor=1$ 及 $x=1.1$。

想一想 第一條方程是否仍然確定唯一的答案？

不是。這裏 $2\{y\}$ 位於 $[0,2)$ 而非 $[0,1)$，所以把 3.2 寫成一個整數加上一個 $[0,2)$ 中的數，共有兩種方法：

- $\lfloor z\rfloor = 3$，$2\{y\} = 0.2$，所以 $\{y\} = 0.1$；
- $\lfloor z\rfloor = 2$，$2\{y\} = 1.2$，所以 $\{y\} = 0.6$。

（若 $\lfloor z\rfloor \geq 4$，則 $2\{y\} < 0$；若 $\lfloor z\rfloor \leq 1$，則 $2\{y\} \geq 2.2$；兩者皆不可能。）配合 $\lfloor y\rfloor = 1$ 及 $\{z\} = 0.8$，得到兩個候選解：

$$(x,y,z) = (1.1,\ 1.1,\ 3.8) \qquad 或 \qquad (x,y,z) = (1.1,\ 1.6,\ 2.8).$$

兩者都滿足原方程組：

$$\begin{aligned}(1.1,1.1,3.8):&\quad 1.1+2+0.8=3.9,\quad 0.1+2.2+3=5.3,\quad 1+0.2+3.8=5;\\ (1.1,1.6,2.8):&\quad 1.1+2+0.8=3.9,\quad 0.1+3.2+2=5.3,\quad 1+1.2+2.8=5.\end{aligned}$$

所以 (iii) 中的方程組恰好有這兩個解。

驗算

如上所示，把答案代回原方程：每條方程兩邊都相等。作為獨立的驗算，用電腦讓 x 和 y 取遍 $[-10,10]$ 中所有 0.1 的倍數進行搜尋，結果 (i) 恰有一個解，(ii) 恰有一個解，而 (iii) 恰有上述兩個解。留意對於 (ii) 的解，$\{y\} + \lfloor z\rfloor = 0.2 + 3 = 3.2$，與預期相符。

常見錯誤

- 算錯負數的下取整（floor）：$\lfloor -1.4\rfloor = -2$，而不是 -1，所以 (i) 中 $\{x\} = 0.6$。
- 在 (iii) 中誤以為 $2\{y\}$ 是一個小數部分，因而只找到一個解。它其實位於 $[0,2)$，這正是第二個解出現的原因。
- 沒有把候選解代回原方程檢驗。上面的推導只證明了它們是僅有的可能。

STEP 之外

把 x 寫成 $x = \lfloor x\rfloor + \{x\}$，等同於在模（modulo）1 之下運算：小數部分就是 x 在圓 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的像。下取整和小數部分在數論（number theory）中無處不在，例如計算整除 $n!$ 的質數（prime）最高次冪的勒讓德（Legendre）公式，以及研究當 α 為無理數（irrational

number）時，$n\alpha$ 的小數部分如何在 $[0,1)$ 上分佈。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是這一系列概念的一本絕佳入門書。

詳細解答

STEP II 2021，第 4 題

純數學 • Lambert W 函數

STEP II 2021，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 3.9 節創造一個新函數中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/lambert-w.html

關鍵思路

函數 g 是 xe^x 的逆運算，所以整道題的重點就是把每條方程重新整理成 $ue^u = c$ 的形式，其中 u 是某個新變量。一旦化成這個形式，第 (i) 部分的草圖就告訴我們一切：若 $c < -\frac{1}{e}$，則無解；若 $-\frac{1}{e} < c < 0$，則有兩個解，而 g 永遠只會選出滿足 $u \geq -1$ 的那一個。至於對數（logarithm），則以代換 $x = e^u$ 處理。

解答

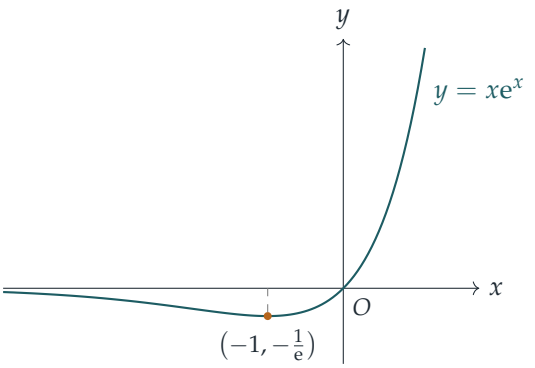
第 (i) 部分

設 $y = xe^x$。由乘積法則（product rule），

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)e^x,$$

由於 $e^x > 0$，這個導數（derivative）只在 $x = -1$ 處為零。當 $x < -1$ 時斜率（gradient）為負，當 $x > -1$ 時斜率為正，所以唯一的駐點（stationary point）是位於 $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ 的極小點（minimum）。

曲線的正負號與 x 相同，並且通過原點。當 $x \to \infty$ 時，$y \to \infty$，而且增長得很快。當 $x \to -\infty$ 時，e^x 壓倒 x，所以 $y \to 0$，並從下方趨近：負 x 軸是一條漸近線（asymptote）。



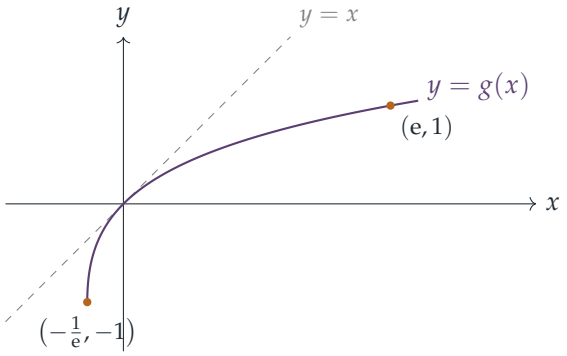
第 (ii) 部分

要 f 有反函數（inverse function），它在 $[a,\infty)$ 上必須是一一對應（one-to-one）的。若 $a<-1$，區間包含了 $x=-1$ 附近極小點兩側的點；由於 f 是連續的，並在 $(-\infty,-1]$ 上嚴格遞減、在 $[-1,\infty)$ 上嚴格遞增（strictly increasing），某個略大於 $-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 的值會被取到兩次。若 $a\geq -1$，則 f 嚴格遞增，因此是一一對應的。所以最小的可能值是

$$a=-1.$$

這時 f 把 $[-1,\infty)$ 映射到 $[-\frac{1}{\mathrm{e}},\infty)$ 上，所以 g 的定義域（domain）是 $[-\frac{1}{\mathrm{e}},\infty)$，值域（range）是 $[-1,\infty)$。

g 的圖像是第 (i) 部分右邊那一支沿直線 $y=x$ 的反射。它從 $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},-1\right)$ 開始，在該處有一條鉛垂切線（vertical tangent）（即極小點處水平切線的反射），然後通過原點，在原點的斜率是 1（因為 $f'(0)=1$），之後遞增得越來越慢：$g(\mathrm{e})=1$，而當 x 很大時，$g(x)$ 比 $\ln x$ 增長得更慢。



第 (iii) 部分會反覆用到兩個事實。對於 $c\geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$，$u=g(c)$ 是方程 $u\mathrm{e}^u=c$ 滿足 $u\geq -1$ 的那個解。另外，由第 (i) 部分的草圖可知，方程 $u\mathrm{e}^u=c$

- 若 $c<-\frac{1}{\mathrm{e}}$，則沒有實數解；

- 若 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$，則有兩個實數解，分別是 $g(c) \in (-1, 0)$ 和另一個小於 -1 的解；
- 若 $c \geq 0$，則恰有一個實數解 $g(c)$（因為當 $u < 0$ 時，左邊是負數）。

第 (iii) 部分

(a) 兩邊乘以 e^x（它永不為零），得

$$x\mathrm{e}^x = \tfrac{1}{5}.$$

由於 $\frac{1}{5} > 0$，恰有一個實根：

$$x = g\left(\tfrac{1}{5}\right).$$

(b) 要 $\ln x$ 有定義，須有 $x > 0$，所以設 $x = \mathrm{e}^u$，其中 $u = \ln x$ 為實數。方程變成

$$2u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{2}.$$

但對所有 u 都有 $u\mathrm{e}^u \geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$，而由於 $\mathrm{e} > 2$，所以 $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{\mathrm{e}}$。因此沒有實根。

(c) 同樣設 $x = \mathrm{e}^u$，

$$3u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{3}.$$

由於 $\mathrm{e} < 3$，所以 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$，因此 u 有兩個值，從而（因為 $u \mapsto \mathrm{e}^u$ 是一一對應的）x 有兩個實根。其中一個是

$$x = \mathrm{e}^{g(-1/3)}.$$

> **想一想** 這是較大的根還是較小的根？

u 的另一個值小於 -1，而 $g(-\frac{1}{3}) > -1$。由於 e^u 隨 u 遞增，根 $\mathrm{e}^{g(-1/3)}$ 是兩個根中較大的一個。

(d) 同樣有 $x > 0$。取指數，$x = 3\ln x \iff \mathrm{e}^{x/3} = x \iff x\mathrm{e}^{-x/3} = 1$。要得到 $u\mathrm{e}^u$ 的形式，前面的乘數必須與指數相配，所以設 $u = -\frac{x}{3}$，並兩邊乘以 $-\frac{1}{3}$：

$$\left(-\frac{x}{3}\right)\mathrm{e}^{-x/3} = -\frac{1}{3}.$$

與 (c) 一樣，$-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$，所以 u 有兩個值，兩者都是負數，從而得到兩個正根 $x = -3u$。其中一個根是

$$x = -3\,g\left(-\tfrac{1}{3}\right).$$

這次映射 $u \mapsto x = -3u$ 是遞減的。u 的另一個值小於 -1，所以另一個根大於 3，而我們求得的根滿足 $x = -3g(-\frac{1}{3}) < 3$。因此我們求得的根是兩者中較小的一個。

第 (iv) 部分

由於 $x > 0$，取對數：$x^x = 10 \iff x \ln x = \ln 10$。設 $x = \mathrm{e}^u$：

$$u\mathrm{e}^u = \ln 10.$$

由於 $\ln 10 > 0$，這方程只有一個解 $u = g(\ln 10)$，所以根是

$$x = \mathrm{e}^{g(\ln 10)}.$$

（等價地，由於當 $c \neq 0$ 時 $\mathrm{e}^{g(c)} = c/g(c)$，根也可寫成 $\dfrac{\ln 10}{g(\ln 10)}$。）

驗算

- 數值上，$g(-\frac{1}{3}) \approx -0.6191$。在 (c) 中，這給出 $x \approx 0.5384$，而 $3(0.5384)\ln(0.5384) \approx -1.000$；另一個根約為 0.2204，確實較小。
- 在 (d) 中，$x \approx 1.8572$，而 $3\ln 1.8572 \approx 1.8572$；另一個根約為 $4.536 > 3$，與預測相符。
- 在 (iv) 中，$g(\ln 10) \approx 0.9188$，所以 $x \approx 2.5062$，而 $2.5062^{2.5062} \approx 10.00$。
- 在 (b) 中，$2x \ln x + 1$ 的最小值是 $1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0.264 > 0$（在 $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 處取得），證實沒有根。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分取 $a = 0$，因為曲線在那裏「看起來」是一一對應的：其實轉向點（turning point）在 $x = -1$，而不在原點。
- 在 (d) 中忘記整條式乘以 $-\frac{1}{3}$，以致前面的因子與指數不相配，無法應用 g。
- 以為經 g 求得的根總是較大的那個：在 (c) 中確是如此，因為 $x = \mathrm{e}^u$ 隨 u 遞增；但在 (d) 中並非如此，因為 $x = -3u$ 把次序倒轉了。

STEP 之外

函數 g 是 *Lambert W* 函數（Lambert W function）的主支（principal branch），通常記作 W_0；當 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$ 時，$u\mathrm{e}^u = c$ 的另一個解來自第二個分支 W_{-1}。凡是未知數同時出現在指數函數之內和之外的地方，它都會出現：例如延遲微分方程（delay differential equations）、組合數學（combinatorics）（計算標號樹（labelled trees）的數目）以及物理學。把反函數延拓越過它不再一一對應的那一點，正是複分析（complex analysis）中

分支與分支點（branch points）理論的起點；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是初次接觸這些概念的絕佳讀物。

詳細解答

STEP II 2021，第 5 題

純數學 • 一階微分方程

STEP II 2021，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分是一條一階 (first-order) 微分方程，它既不是可分離變量 (separable) 的，也不是一眼就能看出、形式友善的線性 (linear) 方程；但題目建議的代換 (substitution) 能把它化為可以直接積分的方程。第 (ii) 部分看似是幾何題，可是一旦寫出切線 (tangent) 方程，並要求它通過 $(1, t)$，得到的正是第 (i) 部分中 $a = 1$ 的方程。之後的草圖可由導數（derivative）得出，而導數原來出奇地簡單。

解答

第 (i) 部分

方程只在 $x \neq a$ 時才有意義，所以我們在 $x > a$ 或 $x < a$ 的某個區間上處理。設 $y = (x-a)u$，由乘積法則（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + (x-a)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

代入方程，

$$(x-a)u + (x-a)^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (x-a)u - x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{(x-a)^2}.$$

含 u 的項互相抵消，這正是這個代換的用意所在。把 x 寫成 $x = (x-a) + a$，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x-a} - \frac{a}{(x-a)^2}, \qquad \text{故} \qquad u = -\ln|x-a| + \frac{a}{x-a} + c$$

其中 c 為常數。兩邊乘以 $x-a$，

$$\boxed{y = a + (x-a)\big(c - \ln|x-a|\big)}$$

其中常數 c 在 $x = a$ 兩側可以不同。

驗證：$y' = c - \ln|x-a| - 1$，所以 $(x-a)y' = (y-a) - (x-a) = y - x$，符合要求。

第 (ii) 部分

在 $\big(t, \mathrm{f}(t)\big)$ 處的切線為 $y = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(x-t)$。它通過 $(1,t)$ 當且僅當

$$t = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(1-t), \qquad \text{即} \qquad (t-1)\,\mathrm{f}'(t) = \mathrm{f}(t) - t.$$

把 t 改記為 x，這就是第 (i) 部分中 $a = 1$ 的方程，在 $x \neq 1$ 時成立。因此在 $x < 1$ 和 $x > 1$ 上分別有

$$\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)\big(c - \ln|x-1|\big),$$

而常數須在兩側各自確定。

> **想一想** 為甚麼單憑一個條件，例如 $\mathrm{f}(0) = 0$，不能確定整條曲線在所有 x 上的形狀？

方程在 $x = 1$ 處不提供任何資訊，所以 $x < 1$ 上的解與 $x > 1$ 上的解互不相關。這就是題目為每一小題分別給出條件的原因。

(a) 當 $x < 1$ 時，$|x-1| = 1 - x$。由條件 $\mathrm{f}(0) = 0$ 得 $0 = 1 + (-1)(c - \ln 1) = 1 - c$，故 $c = 1$，且

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)\big(1 - \ln(1-x)\big) \quad (x < 1).}$$

求導，$\mathrm{f}'(x) = 1 - \ln(1-x) + (x-1)\cdot\dfrac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$。因此：

- 只有當 $1 - x = 1$ 時 $\mathrm{f}'(x) = 0$，所以唯一的駐點（stationary point）是 $(0,0)$。由於當 $x < 1$ 時 $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{1}{1-x} > 0$，曲線是凸（convex）的，而 $(0,0)$ 是極小值（minimum）點。所以 $\mathrm{f}(x) \geq 0$，曲線在原點恰好與 x 軸相切。
- 當 $x \to 1^-$ 時，設 $z = x - 1 \to 0$：利用 $z\ln|z| \to 0$，得 $\mathrm{f}(x) = 1 + z - z\ln|z| \to 1$。斜率（gradient）$-\ln(1-x) \to +\infty$，所以曲線趨向 $(1,1)$，並在該處變為鉛垂。
- 當 $x \to -\infty$ 時，$x - 1$ 和 $1 - \ln(1-x)$ 都是絕對值很大的負數，所以 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$。

一些有用的點：$\mathrm{f}(1-\mathrm{e}) = 1$ 及 $\mathrm{f}(-1) = 2\ln 2 - 1 \approx 0.39$。

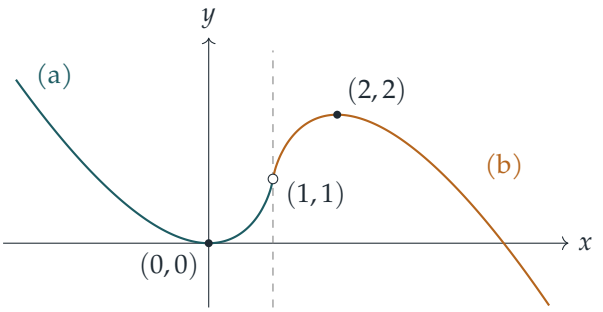
(b) 當 $x > 1$ 時，$|x-1| = x - 1$。由條件 $\mathrm{f}(2) = 2$ 得 $2 = 1 + 1\cdot(c - 0)$，所以同樣有 $c = 1$，且

$$\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)\big(1 - \ln(x-1)\big) \quad (x > 1), \qquad \mathrm{f}'(x) = -\ln(x-1).$$

- 唯一的駐點在 $x = 2$，即 $(2, 2)$。這裏 $\mathrm{f}''(x) = -\dfrac{1}{x-1} < 0$，所以曲線是凹（concave）的，而 $(2, 2)$ 是極大值（maximum）點。
- 當 $x \to 1^+$ 時，（由同一極限）$\mathrm{f}(x) \to 1$，且 $\mathrm{f}'(x) \to +\infty$：曲線以鉛垂方向離開 $(1, 1)$。
- 當 $x \to \infty$ 時，$1 - \ln(x-1) \to -\infty$，所以 $\mathrm{f}(x) \to -\infty$。曲線通過 $(1 + \mathrm{e}, 1)$，並在 $x \approx 4.59$ 附近與 x 軸相交一次。

想一想 做完 (a) 之後，有沒有更快捷的方法看出 (b) 的形狀？

有。設 $s = |x - 1|$，則 (a) 中的分支為 $\mathrm{f}(1 - s) = 1 - s(1 - \ln s)$，而 (b) 中的分支為 $\mathrm{f}(1 + s) = 1 + s(1 - \ln s)$。所以 $\mathrm{f}(1 + s) - 1 = -\big(\mathrm{f}(1 - s) - 1\big)$：(b) 的分支就是 (a) 的分支繞 $(1, 1)$ 旋轉半周所得。極小值點 $(0, 0)$ 被映射到極大值點 $(2, 2)$。



曲線在 $x = 1$ 處沒有定義（空心圓點），但兩條分支都以鉛垂切線趨近 $(1, 1)$。

驗算

- 直接檢驗切線性質。在 $t = 0$ 處，切線是水平的 $y = 0$，它確實通過 $(1, 0)$。在 $t = 2$ 處，切線是 $y = 2$，它通過 $(1, 2)$。
- 在 $t = -1$ 處：$\mathrm{f}(-1) \approx 0.386$，$\mathrm{f}'(-1) = -\ln 2 \approx -0.693$。切線在 $x = 1$ 處的高度為 $0.386 + 2(-0.693) \approx -1.000$，等於 t。
- 對稱性驗算：對每個 $s > 0$ 都有 $\mathrm{f}(1 + s) + \mathrm{f}(1 - s) = 2$，例如 $\mathrm{f}(4) + \mathrm{f}(-2) = (4 - 3\ln 3) + (3\ln 3 - 2) = 2$。

常見錯誤

- 忘記在 $\ln|x - a|$ 中加上絕對值（modulus），以致在第 (a) 部分無法處理 $x < 1$ 的情況。

- 以為 (a) 中求得的常數自動適用於 $x > 1$。這裏碰巧得出相同的值，但必須用 $f(2) = 2$ 加以驗證。
- 斷定當 $x \to 1$ 時 $f(x) \to 0$ 或趨於無窮。$(x-1)\ln|x-1|$ 這一項趨向 0，所以 $f \to 1$。趨於無窮的是斜率。

STEP 之外

把原點移到 $x = a$、$y = a$ 之後，方程 $(x-a)y' = y - x$ 就是齊次（homogeneous）方程：設 $X = x - a$ 及 $Y = y - a$，方程變為 $XY' = Y - X$。代換 $Y = Xu$ 正是解齊次方程的標準方法。使 y' 的係數為零的點 $x = a$ 是一個奇點（singular point），而奇點兩側的解之間可以毫無關係。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）對這兩個概念都有論述。

詳細解答

STEP II 2021，第 6 題

純數學 • 圓幾何的近似

> **STEP II 2021，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

一切都發生在同一個三角形之中：A、道路的圓心 O，以及騎車者所走圓弧的圓心 O'。由對稱性可知，O' 位於經過 O 並平分 $\angle AOB$ 的直線上，而相切（tangency）的條件則確定了距離 OO'。在這個三角形中運用餘弦定理（cosine rule）和正弦定理（sine rule），便可得出 d 和 $\alpha - \theta$。至於最後一部分，*遠小於 1* 的意思是我們只保留 w/R 的一階（first-order）項，並使用小角近似（small-angle approximation）。

解答

以 O 為原點，並使對稱軸成鉛直方向，於是 $A = \big(-(R+w)\sin\alpha,\ (R+w)\cos\alpha\big)$，而 B 是它的鏡像。道路就是區域 $R \le r \le R + w$，其中 r 是與 O 的距離。

第 (i) 部分

弦（chord）AB 上最接近 O 的點是它的中點 M，因為 $OM \perp AB$（三角形 OAB 是等腰（isosceles）三角形）。於是

$$OM = (R+w)\cos\alpha \le \tfrac{1}{2}(R+w) < \tfrac{1}{2}(R+R) = R,$$

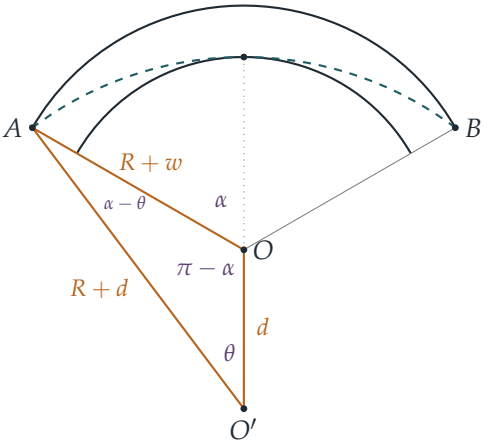
這裏先用了 $\cos\alpha \le \frac{1}{2}$（因為 $\frac{1}{3}\pi \le \alpha \le \frac{1}{2}\pi$），再用了 $w < R$。所以 M 嚴格位於內圓之內，即不在道路上。任何由 A 直線騎到 B 的路線都會經過 M，因此不可能一直留在道路上。

第 (ii) 部分

O' 在哪裏？該圓經過 A 和 B，所以其圓心與兩點等距，位於 AB 的垂直平分線（perpendicular bisector）上，也就是經過 O 的對稱軸。它與內圓相切，而且比內圓大（$R+d>R$），所以內圓位於它之內，與它內切（internally tangent）。對於內切的兩個圓，圓心之間的距離等於半徑之差：

$$OO' = (R+d) - R = d.$$

路線向外、即朝道路的方向凸出，所以 O' 位於 O 背向道路的一側，如圖所示。於是在三角形 AOO' 中，有 $OA = R+w$、$OO' = d$、$O'A = R+d$，而在 O 的角是 $\pi-\alpha$（它與 $\angle AOM = \alpha$ 互補（supplementary））。在 O' 的角是 $\frac{1}{2}\angle AO'B = \theta$，所以在 A 的角是 $\pi-(\pi-\alpha)-\theta = \alpha-\theta$。



(a) 在三角形 AOO' 中運用餘弦定理，並利用 $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$，得

$$\begin{aligned}(R+d)^2 &= (R+w)^2 + d^2 + 2(R+w)d\cos\alpha\\ R^2 + 2Rd &= R^2 + 2Rw + w^2 + 2(R+w)d\cos\alpha\\ 2d\big(R - (R+w)\cos\alpha\big) &= w(2R+w),\end{aligned}$$

所以

$$d = \frac{w(2R+w)}{2\big(R-(R+w)\cos\alpha\big)}.$$

由第 (i) 部分可知分母中的括號是正數，所以這是一個合理的正長度。

(b) 在同一個三角形中運用正弦定理，把角 $\alpha-\theta$（對邊為 $OO' = d$）與角 $\pi-\alpha$（對邊為 $O'A = R+d$）配對，得

$$\frac{\sin(\alpha-\theta)}{d} = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{R+d} \quad\Longrightarrow\quad \sin(\alpha-\theta) = \frac{d\sin\alpha}{R+d}.$$

第 (iii) 部分

記 $\varepsilon = w/R$，於是 $0 < \varepsilon \ll 1$。把 (a) 的結果除以 R，

$$\frac{d}{R} = \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2\big(1-(1+\varepsilon)\cos\alpha\big)}.$$

由於 $\cos\alpha \le \frac{1}{2}$，分母至少是 $2\big(1-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\big) = 1-\varepsilon$，所以

$$0 < \frac{d}{R} \le \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{1-\varepsilon} \approx 2\varepsilon,$$

這遠小於 1。（準確至一階，$d/R \approx \varepsilon/(1-\cos\alpha)$。）

想一想 正弦值很小，只告訴我們該角接近 0 或接近 π。究竟是哪一個？

由 (b)，$0 < \sin(\alpha-\theta) = \dfrac{(d/R)\sin\alpha}{1+d/R} < \dfrac{d}{R}$，這是很小的。角 $\alpha-\theta$ 是三角形 AOO' 的一個內角，所以是正數；又因為 $\theta > 0$，它小於 $\alpha \le \frac{1}{2}\pi$。在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上，正弦函數是遞增的，且 $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$，所以 $\alpha-\theta \le \frac{\pi}{2}\sin(\alpha-\theta) < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{R}$，這同樣遠小於 1。

第 (iv) 部分

我的朋友沿外邊緣騎行，那是一段半徑為 $R+w$、在 O 所對的角為 2α 的圓弧，所以他們的路線長度是 $L = 2\alpha(R+w)$。我的路線是半徑為 $R+d$ 的圓弧，位於 AB 背向 O' 的一側；它在 O' 所對的角為 2θ，所以長度是 $2\theta(R+d)$。因此

$$\begin{aligned} S &= 2\alpha(R+w) - 2\theta(R+d) \\ &= 2(R+d)(\alpha-\theta) + 2\alpha(R+w) - 2\alpha(R+d) \\ &= 2(R+d)(\alpha-\theta) + 2\alpha(w-d), \end{aligned}$$

正是所求（我們加上又減去了 $2\alpha(R+d)$）。

近似。現在我們準確至 ε 的一階，忽略相對於所保留各項而言為 ε^2 階的項。由 (iii)，$\alpha-\theta$ 很小，所以 $\alpha-\theta \approx \sin(\alpha-\theta)$，誤差為 $(\alpha-\theta)^3$ 階。由 (b)，

$$2(R+d)(\alpha-\theta) \approx 2(R+d)\cdot\frac{d\sin\alpha}{R+d} = 2d\sin\alpha.$$

因此

$$S \approx 2d\sin\alpha + 2\alpha w - 2\alpha d = 2\alpha w - 2d(\alpha-\sin\alpha).$$

現在利用 (iii) 中的 $d \approx \dfrac{w}{1-\cos\alpha}$：

$$S \approx 2w\left(\alpha - \frac{\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = 2w\cdot\frac{\alpha-\alpha\cos\alpha-\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2w(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}.$$

最後，$L = 2\alpha R(1+\varepsilon) \approx 2\alpha R$；由於 S 本身已經是 ε 的一階量，把 L 換成 $2\alpha R$ 只會在二階上改變 S/L。所以

$$\frac{S}{L} \approx \left(\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha(1-\cos\alpha)}\right)\frac{w}{R},$$

這就是所求的比例。

驗算

- 當 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ 時，該比例是 $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{w}{R} \approx 0.637\,\frac{w}{R}$；當 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ 時，約為 $0.654\,\frac{w}{R}$。兩者都是正數，這是必然的，因為 $\tan\alpha > \alpha$ 給出 $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$。
- 取 $R = 1$、$w = 0.01$、$\alpha = \frac{1}{2}\pi$：精確公式給出 $d \approx 0.01005$、$\alpha - \theta \approx 0.00995$ 及 $S/L \approx 0.006285$，而近似值是 0.006366。相對誤差約為 1%，屬於 w/R 的量級，理應如此；當 w 除以十時，誤差亦縮小至十分之一。
- 一項電腦驗算把 A 和 B 放在坐標上，直接求出相切的圓，並以數千組隨機選取的 R、w 和 α 證實了 d、$\sin(\alpha-\theta)$ 和 S 的公式。

常見錯誤

- 把距離取為 $OO' = R + d + R$ 或 $OO' = w$：兩圓是內切，所以圓心之間的距離是半徑之差，即 d。
- 在三角形 AOO' 中，對於在 O 的角錯用了 $\cos\alpha$ 而不是 $\cos(\pi-\alpha)$，這會令最後一項的正負號倒轉。
- 在 (iii) 中只說 $\sin(\alpha-\theta)$ 很小：你還需要 $\alpha - \theta$ 位於 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 內，才可以斷定角本身很小。

STEP 之外

「遠小於 1」是微擾理論（perturbation theory）的語言：以一個小參數 ε 展開，保留首項，並確保誤差確實是更高階的。在大學裏，這會借助泰勒定理（Taylor's theorem）和大 O 記號（big-O notation）嚴格化；在本題中，它會顯示 S/L 等於所給比例乘以 ε，再加上一個 ε^2 階的項。關於帶餘項的泰勒定理的嚴謹論述，可參看 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；如想做更多同類風格的題目，可參看 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學題集》）。

詳細解答

STEP II 2021，第 7 題

純數學 • 旋轉矩陣

STEP II 2021，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

2×2 旋轉矩陣（rotation matrix）的形狀非常固定：它必定是 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，因此它的每一列都是單位向量（unit vector）。要求 $\mathbf{R}+\mathbf{I}$ 保持這個形狀，就能把 ϕ 完全確定下來。對於一般滿足 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$ 的矩陣，有用的工具是行列式（determinant）（它具有乘性（multiplicative））以及關係式 $\mathbf{S}^2 = (a+d)\mathbf{S} - \mathbf{I}$；後者讓我們可以把 $\mathbf{S}$ 的任何冪寫成 $\mathbf{S}$ 與 $\mathbf{I}$ 的組合。

解答

第 (i) 部分

記 $c = \cos\phi$ 及 $s = \sin\phi$，於是

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1+c & -s \\ s & 1+c \end{pmatrix}.$$

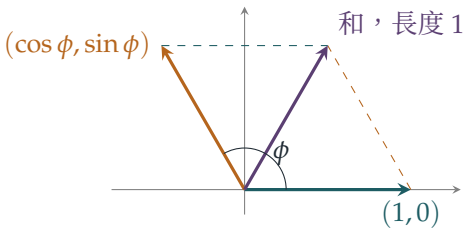
它本身已具有 $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ 的形式，而這樣的矩陣是旋轉，當且僅當 $p^2+q^2=1$（此時對某個 θ 有 $(p,q) = (\cos\theta, \sin\theta)$）。因此我們需要

$$(1+c)^2 + s^2 = 1 \iff 2+2c = 1 \iff \cos\phi = -\tfrac{1}{2}.$$

在 $0^\circ \le \phi < 360^\circ$ 的範圍內，得 $\phi = 120^\circ$ 或 $\phi = 240^\circ$。

從幾何角度看，$\mathbf{R}+\mathbf{I}$ 的第一列是單位向量 $(1,0)$ 與 $(\cos\phi, \sin\phi)$ 之和，而我們要求這個和也是單位向量：三個向量構成一個等邊三角形（equilateral triangle），如下圖（$\phi =$

120°）所示。



無論哪種情況，$\mathbf{R}^3$ 都是轉過 3ϕ 的旋轉，即 360° 或 720°，是整數圈。因此 $\mathbf{R}^3 = \mathbf{I}$。

第 (ii) 部分

行列式。由於 det 具有乘性，$(\det \mathbf{S})^3 = \det(\mathbf{S}^3) = \det \mathbf{I} = 1$。矩陣是實矩陣，所以 $\det \mathbf{S}$ 是一個立方等於 1 的實數，而這樣的實數只有 1。故 $\det \mathbf{S} = ad - bc = 1$。

二次關係式。展開得

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}, \qquad (a+d)\mathbf{S} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} a^2 + ad - 1 & ab + bd \\ ac + dc & ad + d^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

非對角元素（off-diagonal entries）相同，而對角元素亦相同，因為 $bc = ad - 1$（即 $\det \mathbf{S} = 1$）。因此 $\mathbf{S}^2 = (a+d)\mathbf{S} - \mathbf{I}$，得證。

跡。設 $t = a + d$（即跡（trace））。把關係式乘以 $\mathbf{S}$，再用一次該關係式：

$$\mathbf{S}^3 = t\mathbf{S}^2 - \mathbf{S} = t\big(t\mathbf{S} - \mathbf{I}\big) - \mathbf{S} = (t^2 - 1)\mathbf{S} - t\mathbf{I}.$$

令 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$，得

$$(t^2 - 1)\mathbf{S} = (t+1)\mathbf{I}.$$

? **想一想** 我們可以直接除以 $t^2 - 1$ 就完事嗎？

不可以掉以輕心：我們必須另外考慮 $t^2 - 1 = 0$ 的情況，而事實上正正就是這個情況會出現。

- 若 $t^2 \neq 1$，則 $\mathbf{S} = \dfrac{t+1}{t^2-1}\mathbf{I} = k\mathbf{I}$，其中 k 為實數。於是 $\mathbf{S}^3 = k^3\mathbf{I} = \mathbf{I}$ 迫使 $k^3 = 1$，所以 $k = 1$ 而 $\mathbf{S} = \mathbf{I}$，但這已被排除。
- 所以 $t^2 = 1$。方程變為 $\mathbf{0} = (t+1)\mathbf{I}$，故 $t = -1$（若 $t = 1$ 則會得出 $2\mathbf{I} = \mathbf{0}$，這是錯的）。

因此 $a + d = -1$。

第 (iii) 部分

首先，$\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$：否則 $\mathbf{S}+\mathbf{I} = 2\mathbf{I}$，其行列式為 4，而且會把長度加倍，所以不是旋轉。因此第 (ii) 部分適用，得 $a+d=-1$。

由於 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$ 是旋轉，設其轉角為 θ，則

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix}.$$

跡的條件給出 $2\cos\theta - 2 = -1$，所以 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 及 $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。於是

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

它具有旋轉的形式，且 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$。所以 $\mathbf{S}$ 是旋轉，其餘弦為 $-\frac{1}{2}$，正弦為 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。

轉角是 120°（當 $\theta = 60°$）或 240°（當 $\theta = 300°$）。兩者確實都會出現：由第 (i) 部分，這兩個旋轉都使 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$ 為旋轉，且 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$。（等價地，一旦知道 $\mathbf{S}$ 是旋轉，第 (i) 部分本身已列出所有可能的轉角。）

驗算

- 當 $\phi = 120°$，$\mathbf{R}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，即轉過 60° 的旋轉；當 $\phi = 240°$，它是轉過 300° 的旋轉。
- 矩陣 $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 滿足 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$（乘出來便知），但不是旋轉；它仍然有行列式 1 和跡 -1，與第 (ii) 部分的預測一致。它的 $\mathbf{S}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不是旋轉，與第 (iii) 部分相符。
- 用電腦檢查了大量滿足 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$、$\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$ 的隨機實矩陣，每次都確認行列式為 1、跡為 -1，且 $\mathbf{S}^2$ 的關係式成立；在第 (iii) 部分掃描 θ，只找到 $\theta = 60°, 300°$。

常見錯誤

- 除以 $t^2 - 1$ 而沒有檢查它會否為零；$t^2 = 1$ 的情況恰恰就是答案。
- 忘記在第 (iii) 部分中，必須先確立 $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$，才可以使用第 (ii) 部分。

- 以為 $\det(\mathbf{S}+\mathbf{I}) = 1$ 就足以令 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$ 成為旋轉；在這裏它是自動成立的，所以不提供任何資訊。

STEP 之外

關係式 $\mathbf{S}^2 = (a+d)\mathbf{S} - (\det \mathbf{S})\mathbf{I}$ 是凱萊－哈密頓定理（Cayley–Hamilton theorem）在 2×2 情況下的特例：每個方陣都滿足它自己的特徵多項式（characteristic polynomial）。第 (ii) 部分說明，一個階為 3 的 2×2 實矩陣，其特徵值（eigenvalue）是兩個非實數的三次單位根（cube roots of unity），而這樣的矩陣必定相似（similar）於轉過 120° 的旋轉，但不一定等於它。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）對特徵值和相似性有深入的發展。

詳細解答

STEP II 2021，第 8 題

純數學 • 積分遞推關係

STEP II 2021，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 2.9 節逐步逼近 e 的分數中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/e-approximations.html

關鍵思路

函數 $t^n(1-t)^n$ 是單一個二次式 $u=t(1-t)$ 的冪，所以對它求導只不過是用兩次鏈式法則（chain rule）。這個函數及其一階導數（derivative）在 $t=0$ 和 $t=1$ 處都等於零，所以把它與 e^t 一起進行兩次分部積分（integration by parts）時，所有邊界項（boundary terms）都會消失，而第 (i) 部分的二階導數就直接變成一條遞推關係（recurrence）。這些積分被夾在 0 與一個極小的數之間，由此迫使分數 $-a_n/b_n$ 成為 e 的極佳近似。

解答

第 (i) 部分

設 $u=t(1-t)=t-t^2$，於是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=1-2t$，$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=-2$，且

$$(1-2t)^2=1-4t+4t^2=1-4u.$$

設 $f(t) = t^n(1-t)^n = u^n$，由鏈式法則得 $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$。再用乘積法則（product rule）求導一次（對 $n \geq 2$ 成立，此時 u^{n-2} 是多項式），

$$\begin{aligned} f''(t) &= n(n-1)u^{n-2}(1-2t)^2 - 2nu^{n-1} \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1)(1-4u) - 2u\big] \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1) - (4n-2)u\big] \\ &= nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\big[(n-1) - 2(2n-1)t(1-t)\big], \end{aligned}$$

這正是所求的結果。

第 (ii) 部分

仍設 $f(t) = t^n(1-t)^n$，其中 $n \geq 2$，於是 $n!\,T_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$。進行兩次分部積分，每次都對多項式求導、對 e^t 積分，

$$\int_0^1 f\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[f\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 - \Big[f'\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 + \int_0^1 f''\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

想一想 為甚麼兩個邊界項都會消失？

因為 $f(t) = u^n$ 和 $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$ 都含有因子 $u = t(1-t)$（這裏用到 $n \geq 2$，故 $n-1 \geq 1$），而在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 處都有 $u = 0$。所以

$$n!\,T_n = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

現在代入第 (i) 部分的結果，把它寫成 $f'' = n(n-1)u^{n-2} - 2n(2n-1)u^{n-1}$：

$$\begin{aligned} n!\,T_n &= n(n-1)\int_0^1 u^{n-2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t - 2n(2n-1)\int_0^1 u^{n-1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= n(n-1)\,(n-2)!\,T_{n-2} - 2n(2n-1)\,(n-1)!\,T_{n-1} \\ &= n!\,T_{n-2} - 2(2n-1)\,n!\,T_{n-1}, \end{aligned}$$

這裏用到 $\int_0^1 u^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = k!\,T_k$。兩邊除以 $n!$ 得

$$T_n = T_{n-2} - 2(2n-1)T_{n-1} \qquad (n \geq 2),$$

即為所求。

第 (iii) 部分

首先，$T_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1$。

至於 $T_1 = \int_0^1 (t-t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$，可以透過求導驗證 $\int t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t$ 及 $\int t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t^2 - 2t + 2)\mathrm{e}^t$，所以

$$\int_0^1 (t-t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[(-t^2+3t-3)\mathrm{e}^t\Big]_0^1 = -\mathrm{e} + 3,$$

即 $T_1 = 3 - \mathrm{e}$。

因此 $T_0 = a_0 + b_0\mathrm{e}$，其中 $(a_0, b_0) = (-1, 1)$；$T_1 = a_1 + b_1\mathrm{e}$，其中 $(a_1, b_1) = (3, -1)$，全部都是整數。假設對某個 $n \geq 2$，T_{n-2} 和 T_{n-1} 都具有這種整數係數的形式。由第 (ii) 部分，

$$T_n = \big(a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}\big) + \big(b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1}\big)\mathrm{e},$$

由於 $2(2n-1)$ 是整數，兩個括號內都是整數。由（強）歸納法（strong induction），每個 $n \geq 0$ 的 T_n 都可寫成 $a_n + b_n\mathrm{e}$，其中 $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$。

第 (iv) 部分

上下界。當 $0 < t < 1$ 時，有 $0 < t(1-t) \leq \frac{1}{4} < 1$，所以 $0 < t^n(1-t)^n \leq 1$，而且 $0 < \mathrm{e}^t < \mathrm{e}$。因此在開區間 $(0, 1)$ 上

$$0 < \frac{t^n(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t < \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

被積函數（integrand）是連續的，所以把這些嚴格不等式在 $[0, 1]$（一個長度為 1 的區間）上積分後，不等式仍然是嚴格的：

$$0 < T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!} \qquad (n \geq 0).$$

（當 $n = 0$ 時，左邊的因子就是 1，嚴格性來自 $\mathrm{e}^t < \mathrm{e}$。）

極限。由於 $b_n \neq 0$，把 $T_n = a_n + b_n\mathrm{e}$ 除以 b_n：

$$-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e} = -\frac{T_n}{b_n}, \qquad \text{所以} \qquad \left|-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e}\right| = \frac{T_n}{|b_n|} \leq T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

這裏用到 b_n 是非零整數，所以 $|b_n| \geq 1$。當 $n \to \infty$ 時，$\mathrm{e}/n! \to 0$，所以 $-a_n/b_n \to \mathrm{e}$。

事實上，這個界非常寬鬆。由遞推關係得 $(a_2, b_2) = (-19, 7)$ 及 $(a_3, b_3) = (193, -71)$，給出近似值 $\frac{19}{7} \approx 2.714$ 和 $\frac{193}{71} \approx 2.71831$，而 $\mathrm{e} \approx 2.71828$。

驗算

- 在第 (i) 部分代入 $n = 2$：$t^2(1-t)^2 = t^2 - 2t^3 + t^4$ 的二階導數是 $2 - 12t + 12t^2$，而公式給出 $2\big[1 - 6t(1-t)\big] = 2 - 12t + 12t^2$。
- $T_1 = 3 - \mathrm{e} \approx 0.2817$ 是正數且小於 $\mathrm{e}/1!$，正如第 (iv) 部分所要求。接着 $T_2 = T_0 - 6T_1 = 7\mathrm{e} - 19 \approx 0.0280$；用電腦計算積分可確認這個值，並確認 n 直至 11 時遞推關係和上下界都成立。
- 當 $n = 4, 5, 6$ 時，$-a_n/b_n$ 的值分別是 $\frac{2721}{1001}$、$\frac{49171}{18089}$、$\frac{1084483}{398959}$，與 e 分別相差約 10^{-7}、3×10^{-10} 和 5×10^{-13}：比單憑 $\mathrm{e}/n!$ 所預示的快得多。

常見錯誤

- 忘記說明邊界項為何消失，或沒有留意這需要 $n \geq 2$：當 $n = 1$ 時，導數 $1 - 2t$ 在兩端都不為零。
- 在第 (iv) 部分只用了 $b_n \neq 0$，而沒有用 $|b_n| \geq 1$。一個非零實數可以非常小；正是因為 b_n 是整數，T_n / b_n 才不會變得無限大。

STEP 之外

這正是埃爾米特（Hermite）在 1873 年證明 e 是無理數（irrational）、甚至是超越數（transcendental）的方法的核心：構造一些非零但趨向零的整數組合 $a_n + b_n\mathrm{e}$。若 $\mathrm{e} = p/q$，則 $q(a_n + b_n\mathrm{e}) = qa_n + b_n p$ 會是一個小於 $q\mathrm{e}/n!$ 的正整數，而當 n 足夠大時這是不可能的；同樣的多項式 $t^n(1-t)^n$ 亦出現在 Beukers 證明 $\zeta(3)$ 是無理數的著名證明中。若想進一步了解數能被分數逼近到甚麼程度，可閱讀 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）。

詳細解答

STEP II 2021，第 9 題

力學 • 靜力學

STEP II 2021，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

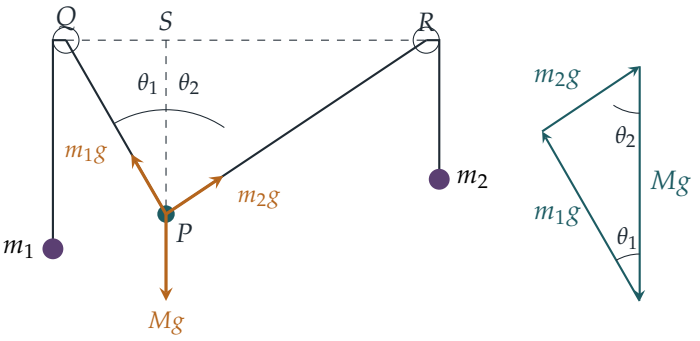
www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

由於滑輪（pulley）是光滑的，每段繩的張力（tension）都等於其遠端所懸掛質點的重量，所以作用在 P 上的三個力，大小之比為 $m_1 : m_2 : M$。這三個力首尾相接，組成一個力三角形（triangle of forces），三邊分別為 $m_1 g$、$m_2 g$ 和 Mg，而各內角則由 θ_1 和 θ_2 構成。對這個三角形應用餘弦定律（cosine rule），便能得出所有結果：題中的不等式來自要求該三角形存在且兩個角均為銳角（acute），而所求的比則來自 $\tan\theta_1$ 和 $\tan\theta_2$。

解答

模型。各質點（particle）視為點質量，繩是輕而不可伸長的，滑輪細小且光滑。因此 PQ 段的張力等於支撐 m_1 的鉛直段的張力，而 m_1 處於平衡（equilibrium），故 $T_1 = m_1 g$。同理，PR 段的張力為 $T_2 = m_2 g$。記 $h = SP$。



第 (i) 部分

在 P 點沿水平和鉛直方向分解（並約去 g）：

$$m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2, \qquad m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2 = M. \tag{$*$}$$

等價地說，把三個力首尾相接，會組成一個封閉三角形，三邊為 $m_1 g$、$m_2 g$、Mg（見圖右方）。邊 Mg 是鉛直的，所以邊 Mg 與邊 $m_1 g$ 之間的夾角為 θ_1（與邊 $m_2 g$ 相對），而 Mg 與 $m_2 g$ 之間的夾角為 θ_2（與 $m_1 g$ 相對）。第三個角與 Mg 相對，大小為 $180^\circ - \theta_1 - \theta_2$。

如果你較喜歡用代數而非圖形，同樣的結果亦可直接由 $(*)$ 得出：寫成 $m_1 \cos\theta_1 = M - m_2 \cos\theta_2$ 及 $m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2$，兩式平方後相加：

$$m_1^2 = M^2 + m_2^2 - 2Mm_2 \cos\theta_2, \quad \text{所以} \quad \cos\theta_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2Mm_2},$$

再把兩邊的角色互換，得

$$\cos\theta_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2Mm_1}.$$

(a) 力三角形是一個真正的（非退化的）三角形，因為 $\theta_1 + \theta_2$ 嚴格介於 0° 與 180° 之間。因此三角不等式（triangle inequality）是嚴格的，由此得 $M < m_1 + m_2$。

至於下界，我們利用 θ_2 是銳角這一事實，即 $\cos\theta_2 > 0$。由於 $2Mm_2 > 0$，上面的公式給出

$$M^2 + m_2^2 - m_1^2 > 0 \iff M^2 > m_1^2 - m_2^2 \iff M > \sqrt{m_1^2 - m_2^2},$$

其中最後一步成立，是因為 $M > 0$ 且 $m_1^2 - m_2^2 > 0$。合起來，

$$\sqrt{m_1^2 - m_2^2} < M < m_1 + m_2.$$

? **想一想** 為甚麼重要的是關於 θ_2 的條件，而不是關於 θ_1 的條件？

在三角形中，較長的邊對着較大的角。由於 $m_1 > m_2$，角 θ_2（與 $m_1 g$ 相對）大於 θ_1（與 $m_2 g$ 相對）。所以只要 θ_2 是銳角，θ_1 自然也是銳角；真正起限制作用的只有 θ_2。（事實上，由於 $m_1 > m_2$，對任何 $M > 0$ 都有 $\cos\theta_1 > 0$。）

(b) 在直角三角形 QSP 和 RSP 中，$SP = h$，

$$QS = h\tan\theta_1, \qquad SR = h\tan\theta_2.$$

因此

$$\begin{aligned} r = \frac{QS}{SR} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} &= \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \\ &= \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{M^2+m_2^2-m_1^2}{2Mm_2}\cdot\frac{2Mm_1}{M^2+m_1^2-m_2^2} \quad \text{（利用 } (*) \text{ 及上述餘弦式）} \\ &= \frac{M^2-m_1^2+m_2^2}{M^2-m_2^2+m_1^2}, \end{aligned}$$

這正是所求的比。由 (a) 部，分子分母兩個式子均為正，所以 $r > 0$；又因 $m_1 > m_2$，故 $r < 1$：點 S 較接近 Q，與圖中所示一致。

第 (ii) 部分

對力三角形中的邊 Mg 應用餘弦定律，其對角為 $180^\circ - (\theta_1+\theta_2)$，得

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos(\theta_1+\theta_2).$$

（用代數方法：把 $(*)$ 中兩條方程平方後相加。）由 $M^2 = m_1^2+m_2^2$，必然有 $\cos(\theta_1+\theta_2) = 0$。由於 θ_1 和 θ_2 均為銳角，$0^\circ < \theta_1+\theta_2 < 180^\circ$，唯一的可能是

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ.$$

所以繩在 P 點成直角。（這個 M 值確實落在 (a) 部的範圍內，因此這個構型是存在的。）

此時餘弦式得以簡化：$\cos\theta_1 = \dfrac{2m_1^2}{2Mm_1} = \dfrac{m_1}{M}$ 及 $\cos\theta_2 = \dfrac{m_2}{M}$。由於 $\theta_2 = 90^\circ - \theta_1$，得 $\sin\theta_1 = \cos\theta_2 = m_2/M$，所以

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2}{m_1}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{1}{\tan\theta_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

因此

$$\frac{QR}{SP} = \frac{h\tan\theta_1 + h\tan\theta_2}{h} = \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1^2+m_2^2}{m_1m_2},$$

即 $QR : SP = (m_1^2+m_2^2) : m_1m_2$。

驗算

- 取 $m_1 = 5$、$m_2 = 3$、$M = 6$（在 $4 < M < 8$ 之內），以數值方法解 $(*)$，得 $\theta_1 \approx 29.93^\circ$ 及 $\theta_2 \approx 56.25^\circ$。於是 $\tan\theta_1/\tan\theta_2 \approx 0.3846 = \frac{5}{13}$，與 $r = \frac{36-25+9}{36-9+25} = \frac{20}{52}$ 吻合。
- 在範圍的兩端：當 $M \to \sqrt{m_1^2-m_2^2}$ 時，$\theta_2 \to 90^\circ$ 且 $r \to 0$（繩 PR 變成水平）；當 $M \to m_1+m_2$ 時，兩個角都趨向 0，而 P 會下沉至遠低於 QR 的位置。
- 第 (ii) 部分取 $m_1 = 4$、$m_2 = 3$、$M = 5$：$\tan\theta_1 = \frac{3}{4}$，$\tan\theta_2 = \frac{4}{3}$，且 $QR/SP = \frac{25}{12}$。驗證 $(*)$：$4\cdot\frac{3}{5} = 3\cdot\frac{4}{5}$ 及 $4\cdot\frac{4}{5} + 3\cdot\frac{3}{5} = 5$。

常見錯誤

- 誤把力三角形中與 Mg 相對的角當作 $\theta_1 + \theta_2$，而不是 $180^\circ - (\theta_1 + \theta_2)$，結果令餘弦定律中的正負號反轉。
- 使用非嚴格的三角不等式，或忘記下界需要用到兩個角均為銳角這個條件。
- 把比倒轉：$r = QS/SR$，而 QS 是靠近較重質點的那一邊。

STEP 之外

力三角形是一個一般事實的最簡單情況：處於平衡的各力之和為零向量，所以把它們首尾相接畫出來，會組成一個封閉多邊形。工程師利用這個想法（即「力多邊形」（force polygon））來分析桁架結構；而在大學一年級的力學中，它以靜力學（statics）的向量形式再次出現，並配合力矩（moment）亦須平衡的條件。如欲深入了解，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

詳細解答

STEP II 2021，第 10 題

力學 • 非慣性參考系

STEP II 2021，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 11.5 節加速火車中的重力中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/accelerating-frame.html

關鍵思路

坐標軸隨列車移動，所以它們並不構成慣性參考系（inertial frame）。最乾淨利落的處理方法，是求出珠子的眞實加速度：即珠子相對於列車的加速度，加上列車本身的加速度。這樣牛頓第二定律（Newton's second law）便成立；又因為鋼線光滑（smooth），反作用力（reaction）垂直於鋼線，所以它沿珠子的路徑不做功。把運動方程與珠子的（相對）速度取點積，便能消去未知的反作用力，剩下一個類似能量、而且守恆的量。

解答

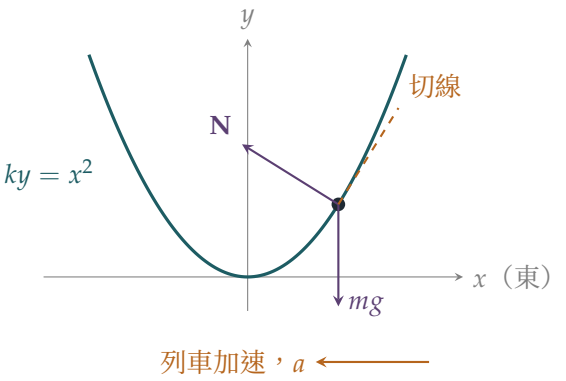
把珠子視為質量為 m 的質點，並把鋼線視為光滑，因此鋼線對珠子的反作用力 $\mathbf{N}$ 恆垂直於鋼線。設 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 分別為指向東方和向上的單位向量（unit vector）。

列車向西加速，所以它的加速度是 $-a\mathbf{i}$。珠子相對於列車的位置是 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$，因此它的真實（地面參考系中的）加速度是

$$(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+\ddot{y}\,\mathbf{j}.$$

作用於珠子的力只有重力 $-mg\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{N}$，所以由牛頓第二定律得

$$m(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+m\ddot{y}\,\mathbf{j}=\mathbf{N}-mg\,\mathbf{j}. \qquad (*)$$



第 (i) 部分

假設珠子相對於列車一直停留在原點。那麼它便與列車有相同的加速度 $-a\mathbf{i}$，因此需要一個水平力 $-ma\mathbf{i}$，其中 $a > 0$。但在原點處，鋼線 $y = x^2/k$ 的斜率為 $2x/k = 0$，即鋼線在該處是水平的，而光滑鋼線的反作用力垂直於鋼線，也就是鉛直方向。重力同樣是鉛直的。既然沒有任何水平力作用，珠子便不可能隨列車一起加速；它必定相對於列車移動。（珠子的真實水平加速度是 0，而列車的加速度是向西的 a，所以珠子開始沿鋼線向東滑動，即朝 x 的正方向移動。）

第 (ii) 部分

珠子沿鋼線移動時，由於鋼線固定在列車上，珠子相對於列車的速度 $\dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j}$ 與鋼線相切。由於 $\mathbf{N}$ 垂直於鋼線，

$$\mathbf{N} \cdot (\dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j}) = 0.$$

把 $(*)$ 改寫為 $m(\ddot{x} - a)\,\mathbf{i} + m(\ddot{y} + g)\,\mathbf{j} = \mathbf{N}$，然後兩邊與 $\dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j}$ 取純量積（scalar product），再除以 m，得

$$\dot{x}(\ddot{x} - a) + \dot{y}(\ddot{y} + g) = 0,$$

此即所求。左邊恰好是一個導數（exact derivative）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ax + gy\right) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - a\dot{x} + g\dot{y} = 0,$$

所以在整個運動過程中，$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ax + gy$ 是常數。

? **想一想** 既然反作用力在地面參考系中會做功，為甚麼與相對速度取點積是合理的？

在地面參考系中，珠子的速度多了一項 $-at\,\mathbf{i}$，它並不沿着鋼線方向，所以 $\mathbf{N}$ 在該參考系中會做功。但恆等式 $\mathbf{N} \cdot \mathbf{u} = 0$ 純粹是幾何事實：對任何與鋼線相切的向量 $\mathbf{u}$ 都成立，而相對速度正是這樣的向量。我們用到的就只有這一點。

第 (iii) 部分

開始時 $x = y = 0$ 且 $\dot{x} = \dot{y} = 0$，所以該常數為 0。設 v 為相對於列車的速率，並利用 $y = x^2/k$，得

$$\tfrac{1}{2}v^2 = ax - gy = ax - \frac{gx^2}{k} = \frac{g}{k}\,x\Big(\frac{ak}{g} - x\Big). \qquad (\dagger)$$

由於 $v^2 \geq 0$，珠子被限制在 $0 \leq x \leq ak/g$ 之內，而且只有在這個區間的兩個端點才有 $v = 0$。由第 (i) 部分，珠子開始時朝 x 的正方向移動。當 $0 < x < ak/g$ 時，它的速率為正，所以它沿鋼線一直朝同一方向移動，直至到達 $x = ak/g$，在該處瞬間靜止。（珠子確實會在該處折返：$(*)$ 在該點的切向分量（tangential component）不為零，因為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax - gx^2/k) = a - 2a = -a \neq 0$。）之後珠子在 $x = 0$ 與 $x = ak/g$ 之間來回振盪（oscillate）。

在這個區間上，$y = x^2/k$ 是 x 的遞增函數，所以最大高度在 $x = ak/g$ 處達到：

$$b = \frac{1}{k}\Big(\frac{ak}{g}\Big)^2 = \frac{a^2k}{g^2}.$$

第 (iv) 部分

由 $(\dagger)$，$v^2 = 2\big(ax - gx^2/k\big)$，這是 x 的二次函數，其最大值出現在兩根 0 與 ak/g 的中點，所以相對於列車的速率在以下位置最大：

$$x = \frac{ak}{2g}.$$

在該處

$$v^2 = 2\Big(\frac{a^2k}{2g} - \frac{a^2k}{4g}\Big) = \frac{a^2k}{2g}, \qquad \text{所以} \qquad v_{\max} = a\sqrt{\frac{k}{2g}}.$$

驗算

- 極限情況：若 $a = 0$，珠子只會停留在鋼線的最低點；而的確 $b = 0$ 且 $v_{\max} = 0$。
- 有效重力（effective gravity）：在列車中，珠子感受到的有效重力是 $(a, -g)$，向東傾斜。速率最大的位置 $x = ak/(2g)$，恰好是鋼線斜率 $2x/k$ 等於 a/g 之處，因此該處的切線垂直於有效重力：這正是鋼線在傾斜重力場中的「最低點」。折返點 $x = ak/g$ 與原點的距離是它的兩倍，這與在一個關於 x 為二次的勢能中作對稱振盪的情況一致。
- 量綱（dimensions）：k 是長度，所以 a^2k/g^2 是長度，而 $a\sqrt{k/g}$ 是速率。
- 數值驗證：取 $a = 2$、$k = 1.5$ 及 $g = 9.8$（國際單位制），用電腦逐步推進運動，得

到最大高度為 0.06247 m，最大速率為 $0.5533\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，出現在 $x = 0.1531$ m，分別與 a^2k/g^2、$a\sqrt{k/(2g)}$ 和 $ak/(2g)$ 吻合。

常見錯誤

- 把 $\ddot{x}$ 當作珠子的真實水平加速度。$\ddot{x}$ 只是珠子相對於列車的加速度，必須再加上列車本身的加速度 $-a$。
- 弄錯 a 的正負號：列車向西加速，所以在列車中珠子被推向東，即朝 x 的正方向。
- 以為速率在鋼線的最低點 $x = 0$ 處最大。在列車中，有效的「向下」方向是傾斜的，所以速率最大的位置其實是 $x = ak/(2g)$。

STEP 之外

第 (ii) 部分讓你初嘗非慣性參考系（non-inertial frame）中的力學：在列車的參考系中，$-ax$ 這一項就像一個向東、大小為 ma 的均勻「虛擬力」（fictitious force）所對應的勢能（potential energy），把它與重力合併，便得到傾斜的有效重力。到了大學，這套想法會推廣至旋轉參考系，屆時會出現離心力（centrifugal force）和科里奧利力（Coriolis force）；亦會推廣至拉格朗日力學（Lagrangian mechanics），在那裏像 **N** 這樣的約束力（constraint force）從一開始便被消去。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）有一章很好地講解了非慣性系統和虛擬力。

詳細解答

STEP II 2021，第 11 題

概率與統計 • 條件概率的遞推關係

STEP II 2021，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 12.5 節最後一位乘客的座位中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/airline-seat.html

關鍵思路

以 T_1 坐在哪裏為條件（condition on）。若 T_1 坐了自己的座位 S_1，其他人都不受影響；若 T_1 坐了 S_k，那麼 $T_2, \ldots, T_{k-1}$ 都能安然入座，而 T_k 就成了新的「隨機選座者」。關鍵的觀察是：此時 T_k 的處境與當初的 T_1 完全相同，只是列車變小了，而空着的座位 S_1 則扮演 T_k 自己座位的角色。這樣問題便轉化為一條遞推關係（recurrence）。

解答

全文中，「T_r 被擠走」指 T_r 到達時發現 S_r 已被人坐了。只有被擠走的乘客（或 T_1）才會隨機選座。

第 (i) 部分

當 $n = 2$ 時，T_1 各以概率（probability）$\frac{1}{2}$ 坐 S_1 或 S_2，而 T_2 能坐到 S_2 恰好當 T_1 坐了 S_1。所以

$$P_2 = \frac{1}{2}.$$

當 $n = 3$ 時，以 T_1 的座位為條件，每種情況的概率均為 $\frac{1}{3}$：

- S_1：T_2 和 T_3 都發現自己的座位空着，所以 T_3 坐到 S_3。
- S_3：T_3 必定坐不到 S_3。

► S_2：T_2 被擠走，在 S_1 和 S_3 之間隨機選擇；T_3 坐到 S_3 恰好當 T_2 選了 S_1，概率為 $\frac{1}{2}$。

因此

$$P_3 = \tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{1}{3}\cdot 0 + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

第 (ii) 部分

假設 T_1 坐在 S_k，其中 $2 \le k \le n-1$。那麼 $T_2, \ldots, T_{k-1}$ 都發現自己的座位空着並坐下。當 T_k 到達時，空座位是

$$S_1,\ S_{k+1},\ S_{k+2},\ \ldots,\ S_n,$$

共 $n-k+1$ 個座位，而 T_k 在其中均勻隨機地選擇。尚未到達的乘客是 $T_{k+1}, \ldots, T_n$，各人都想坐自己的座位，而尚未到達的人之中沒有人被分配到 S_1。

? **想一想** 為甚麼這恰好就是有 $n-k+1$ 個座位的原問題？

重新標記：把 T_k 稱為「第一位乘客」，並當作 S_1 是 T_k 獲分配的座位。在有 m 個座位的原問題中，第一位乘客從全部 m 個座位中均勻地選擇，之後每位乘客若自己的座位空着便坐下，否則從空座位中均勻地選擇，而第一位乘客獲分配的座位沒有其他人想要。這裏取 $m = n-k+1$，乘客 $T_k, T_{k+1}, \ldots, T_n$ 在座位 $S_1, S_{k+1}, \ldots, S_n$ 上正好遵循這些規則，而 S_1 沒有其他人想要。這些規則除了用來判斷乘客自己的座位是否空着之外，從不用到座位的標籤，所以兩個過程的概率完全相同。在較小的問題中，T_n 仍是最後一位乘客，所以

$$\mathrm{P}(T_n \text{ 坐在} S_n \mid T_1 \text{ 坐在} S_k) = P_{n-k+1}.$$

現在，對 $n \ge 3$，以 T_1 的座位為條件，$S_1, \ldots, S_n$ 每個的概率均為 $\frac{1}{n}$。若是 S_1，T_n 必定坐到 S_n；若是 S_n，T_n 必定坐不到。所以由全概率公式（law of total probability），

$$P_n = \frac{1}{n}\cdot 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1} P_{n-k+1} + \frac{1}{n}\cdot 0 = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{r=2}^{n-1} P_r\right),$$

其中我們代入了 $r = n-k+1$，當 k 由 2 變到 $n-1$ 時，它由 $n-1$ 遞減至 2。這就是所求的結果。

第 (iii) 部分

我們斷言對每個 $n \ge 2$ 都有 $P_n = \frac{1}{2}$。我們使用強歸納法（strong induction）。

*基本情況。*由第 (i) 部分得 $P_2 = \frac{1}{2}$。

*歸納步驟。*設 $n \ge 3$，並假設對 $r = 2, 3, \ldots, n-1$ 有 $P_r = \frac{1}{2}$。第 (ii) 部分中的和有 $n-2$ 項，每項都等於 $\frac{1}{2}$，所以

$$P_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n-2}{2}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2} = \frac{1}{2}.$$

因此對 $r = 2, \ldots, n$ 有 $P_r = \frac{1}{2}$，由歸納法，對所有 $n \geq 2$ 都有 $P_n = \frac{1}{2}$。（第 (i) 部分的 $P_3 = \frac{1}{2}$ 與此吻合。）

第 (iv) 部分

當 $n = 2$ 時，$T_{n-1} = T_1$，他以概率 $\frac{1}{2}$ 坐在 S_1。所以 $Q_2 = \frac{1}{2}$。

現在設 $n \geq 3$，於是 T_{n-1} 不是 T_1，再次以 T_1 的座位 S_k 為條件：

- $k = 1$：每個人都坐到自己的座位，所以 T_{n-1} 坐到 S_{n-1}。
- $k = n$：$T_2, \ldots, T_{n-1}$ 都發現自己的座位空着，所以 T_{n-1} 同樣坐到 S_{n-1}。
- $k = n-1$：T_{n-1} 必定坐不到 S_{n-1}。
- $2 \leq k \leq n-2$：與第 (ii) 部分完全一樣，餘下的旅程就是以 T_k 為首、有 $m = n - k + 1$ 個座位的原問題。在這列較小的列車中，T_{n-1} 是倒數第二位乘客，所以概率為 Q_{n-k+1}。這裏 m 取遍 $3, 4, \ldots, n-1$。

因此，對 $n \geq 3$，

$$Q_n = \frac{1}{n}\left(2 + \sum_{m=3}^{n-1} Q_m\right).$$

當 $n = 3$ 時和為空，故 $Q_3 = \frac{2}{3}$。若對 $3 \leq m \leq n-1$ 有 $Q_m = \frac{2}{3}$，則

$$Q_n = \frac{1}{n}\left(2 + \frac{2(n-3)}{3}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n}{3} = \frac{2}{3},$$

所以由強歸納法，對每個 $n \geq 3$ 都有 $Q_n = \frac{2}{3}$。總結：

$$Q_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad Q_n = \tfrac{2}{3} \quad (n \geq 3).$$

> **想一想** 有沒有方法不用任何遞推關係就看出 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{2}{3}$？

有的。每當有人隨機選座時，S_1 與每個後來乘客仍然空着的座位都受到同等對待，所以在過程結束之前，S_1 和 S_n 兩者中先被坐的那個是哪一個，可能性相等；T_n 成功恰好當 S_1 先被坐，得 $\frac{1}{2}$。對於 T_{n-1}（其中 $n \geq 3$），考慮 S_1, S_{n-1}, S_n 之中哪一個最先被隨機選座者坐了；每個的可能性相等，而 T_{n-1} 只有在那個是 S_{n-1} 時才會被擠走，得 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$。

驗算

- $n = 3$ 的情況可以用手列舉：(T_1, T_2, T_3) 的結果是 (S_1, S_2, S_3)，概率為 $\frac{1}{3}$；(S_3, S_2, S_1)，概率為 $\frac{1}{3}$；以及 (S_2, S_1, S_3)、(S_2, S_3, S_1)，概率各為 $\frac{1}{6}$。所以 T_3 坐到 S_3 的概率為 $\frac{1}{2}$，T_2 坐到 S_2 的概率為 $\frac{2}{3}$，與所求得的一致。

- 用電腦對 $n = 2, \ldots, 8$ 精確列舉每一種可能的旅程，得出 $P_n = \frac{1}{2}$ 全部成立、對 $n \geq 3$ 有 $Q_n = \frac{2}{3}$，並證實第 (ii) 部分的條件概率（conditional probability）對每個 k 都成立。以 $n = 20$ 模擬 10^5 次旅程，得到 0.500 和 0.668。

常見錯誤

- 忘記 T_1 本身可以選 S_1，這正是遞推關係中「$1+$」的來源。
- 在第 (iv) 部分漏掉 T_1 坐了 S_n 的情況：這對 T_{n-1} 是好消息，所以常數是 2 而不是 1。
- 在 $n = 2$ 時套用 Q 的遞推關係，但此時 T_{n-1} 就是 T_1，答案是 $\frac{1}{2}$ 而不是 $\frac{2}{3}$。

STEP 之外

這裏的遞推關係是一種首步分析（first-step analysis）：以第一次隨機選擇為條件，並認出同一問題的較小版本。同樣的技巧可以求出馬爾可夫鏈（Markov chain）的命中概率（hitting probability）和期望命中時間（expected hitting time），這是大學一年級概率論的核心課題。上面的對稱性論證讓人初嘗一個選得好的「哪件事先發生？」問題如何取代冗長的計算。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對這兩種思路都有闡述。

詳細解答

STEP II 2021，第 12 題

概率與統計 • 賭徒破產問題

STEP II 2021，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

每場比賽都會不斷回到之前出現過的局面。因此，我們不去把無窮多種獲勝方式逐一加起來，而是設 P 為從該局面出發獲勝的概率（probability），再按下一步發生的事情作條件分析（conditioning），得出一條 P 同時出現在兩邊的方程。同樣的技巧用在謹慎玩法上，就能把它化為第 (ii) 部分的比賽。

解答

第 (i) 部分

設 P 為 A 贏得整場比賽的概率。按第一局的結果作條件分析。A 以概率 p_{A} 贏得該局，比賽隨即結束。B 以概率 p_{B} 贏得該局，A 便輸了。否則該局打和，概率為 $1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}}$；由於各局相互獨立（independent），比賽重新開始，所以 A 從該處獲勝的機會仍然是 P。因此

$$P = p_{\mathrm{A}} + (1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})P \quad\Longrightarrow\quad (p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}})P = p_{\mathrm{A}} \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{p_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}}},$$

這裏兩邊除以 $p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}} > 0$。（等價地，A 在第 k 局獲勝的概率為 $(1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})^{k-1}p_{\mathrm{A}}$，而由於 $0 < p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}} < 1$，這個幾何級數（geometric series）收斂。）

第 (ii) 部分

設 D 為進行若干局後 A 的勝局數減去 B 的勝局數。每一局使 D 改變 $+1$ 或 -1，而比賽在首次出現 $|D| = 2$ 時結束。

長度爲偶數。進行 n 局後，若 A 勝 a 局、B 勝 b 局，則 $a+b=n$ 且 $D=a-b=n-2b$，

所以 D 與 n 的奇偶性（parity）相同。比賽在 $D = \pm 2$ 時結束，而這是偶數，所以 n 是偶數。

概率。把各局兩兩成對來看。比賽開始時雙方打平（$D = 0$），而由於比賽只能在偶數局後結束，每一對未能結束比賽的局之後，雙方又會再次打平。從打平的局面出發，接下來兩局是 AA 的概率為 p^2（A 勝），是 BB 的概率為 q^2（B 勝），是 AB 或 BA 的總概率為 $2pq$，此時比賽再次打平。設 P 為 A 從打平局面出發獲勝的概率，則

$$P = p^2 + 2pq\,P \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{p^2}{1-2pq}.$$

由於 $p + q = 1$，有 $1 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$，所以 $1 - 2pq = p^2 + q^2$，且

$$P = \frac{p^2}{p^2+q^2},$$

即為所求。這裏 $p^2 + q^2 > 0$，所以除法沒有問題。

第 (iii) 部分

謹慎玩法。籌碼數目每輪增加或減少一個，由 1 開始，到 0（輸）或 4（贏）時停止。它不能跳過 4，所以玩家獲勝當且僅當籌碼數目先到達 4 而不是先到達 0。

> **想一想** 從 2 個籌碼出發，玩家需要做到甚麼？我們以前見過這種情況嗎？

從 2 個籌碼出發，玩家要在輸的輪數比贏的輪數多出兩輪（到達 0）之前，先做到贏的輪數比輸的輪數多出兩輪（到達 4），才能獲勝。這正是第 (ii) 部分的比賽，其中玩家是 A，碰運氣的遊戲是 B。所以從 2 個籌碼出發，獲勝的概率為 $\dfrac{p^2}{p^2+q^2}$。

從 1 個籌碼出發，第一輪必須贏，否則玩家跌至 0 而輸掉。所以第一輪以概率 p 使玩家到達 2 個籌碼，而各輪相互獨立，因此

$$P_{\text{cautious}} = p \cdot \frac{p^2}{p^2+q^2} = \frac{p^3}{p^2+q^2}.$$

（如果你偏好用方程：設 P_k 為從 k 個籌碼出發獲勝的概率，則 $P_1 = pP_2$、$P_2 = pP_3 + qP_1$ 及 $P_3 = p + qP_2$ 會給出相同的答案。）

大膽玩法。從 1 個籌碼出發，數目變為 2 或 0；從 2 個出發，數目變為 4 或 0。所以玩家只有贏得頭兩輪才能獲勝：

$$P_{\text{bold}} = p^2.$$

比較。兩個概率都是正數，所以我們把它們的比與 1 作比較：

$$\frac{P_{\text{cautious}}}{P_{\text{bold}}} = \frac{p}{p^2+q^2}.$$

由於 $p^2+q^2>0$，這個比大於 1 當且僅當

$$p>p^2+q^2 \iff p-p^2>q^2 \iff pq>q^2 \iff p>q,$$

最後一步除以 $q>0$（因為 $p<1$，所以成立）。而 $p>q=1-p$ 恰好在 $p>\frac{1}{2}$ 時成立。同理，這個比小於 1 恰好在 $p<q$，即 $p<\frac{1}{2}$ 時成立。所以當 $\frac{1}{2}<p<1$ 時謹慎玩法較好，當 $0<p<\frac{1}{2}$ 時大膽玩法較好。（在 $p=\frac{1}{2}$ 時兩者都給出 $\frac{1}{4}$。）

驗算

- 在 $p=\frac{1}{2}$ 時，謹慎玩法是一個公平的隨機漫步（random walk），從 1 出發先到達 4 而不是先到達 0 的機會是 $\frac{1}{4}$。我們的公式給出 $\frac{1}{8}/\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，與大膽玩法的 $p^2=\frac{1}{4}$ 一致。
- 在 $p=0.7$ 時：謹慎玩法給出 $0.343/0.58\approx 0.591$，大膽玩法給出 0.49。在 $p=0.3$ 時：謹慎玩法給出 $0.027/0.58\approx 0.0466$，大膽玩法給出 0.09。兩者都與逐輪追蹤籌碼分佈的電腦驗算相符。
- 在第 (ii) 部分，$p=\frac{1}{2}$ 給出 $\frac{1}{2}$，正如對稱性所要求的。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分，把「AB」和「BA」當作同一個概率為 pq 的結果，而不是 $2pq$。
- 忘記說明為何一對未結束比賽的局總會使比賽回到打平狀態。理由是比賽不可能在奇數局後結束。
- 在比較時，沒有說明有關的量是正數便展開相乘或相除。

STEP 之外

謹慎玩法正是賭徒破產（gambler's ruin）問題。它是一個帶有吸收壁（absorbing barriers）的隨機漫步；當 $p\neq q$ 時，從 k 出發、目標為 N 的一般答案是 $\dfrac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N}$。在不利的遊戲中大膽玩法最好、在有利的遊戲中保守玩法最好，這個結果可追溯至 Dubins 和 Savage 對最優賭博策略的研究。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）正是用這種「按第一步作條件分析」的方法來處理隨機漫步和賭徒破產問題。

詳細解答

STEP III 2021，第 1 題

純數學 • 參數曲線的法線

STEP III 2021，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

兩部分都依循同一套步驟：先對參數方程（parametric equations）求導，再取 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的負倒數（negative reciprocal），得出法線（normal）的斜率（gradient），然後整理方程。整理的過程正是最有趣的地方。把整條方程乘開以消去分數，三角函數項便會化簡成一條簡短而對稱的直線方程。一旦直線寫成 $x\sin\phi + y\cos\phi = \ldots$ 或 $x\cos\phi + y\sin\phi = \ldots$ 的形式，它的幾何性質（截距（intercepts）、與原點的距離）便一眼可見。

解答

第 (i) 部分

對 t 求導，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 12\cos^2 t\,\sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 12\cos t - 12\sin^2 t\cos t = 12\cos t\,(1-\sin^2 t) = 12\cos^3 t.$$

因此，當 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$（此時 $\sin t$ 和 $\cos t$ 均不為零），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{12\cos^3 t}{12\cos^2 t\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

在 $t = \phi$ 處，切線（tangent）的斜率為 $\cot\phi$，所以法線的斜率為 $-\tan\phi = -\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$。因此法線為

$$y - 12\sin\phi + 4\sin^3\phi = -\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\left(x + 4\cos^3\phi\right).$$

乘以 $\cos\phi$，並把 x 和 y 項移到左方：

$$\begin{aligned} x\sin\phi + y\cos\phi &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin^3\phi\cos\phi - 4\cos^3\phi\sin\phi \\ &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin\phi\cos\phi\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\ &= 8\sin\phi\cos\phi. \end{aligned}$$

所以法線為

$$\boxed{x\sin\phi + y\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi} \qquad \text{或等價地} \qquad \frac{x}{\cos\phi} + \frac{y}{\sin\phi} = 8.$$

第二種形式顯示法線與兩軸相交於 $(8\cos\phi, 0)$ 和 $(0, 8\sin\phi)$。

相切。設 $P = (8\cos^3\phi,\ 8\sin^3\phi)$。我們需要證明三件事。

P 在曲線 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 上。由於 $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$，兩個坐標都是正數，所以其實數立方根（cube root）分別是 $2\cos\phi$ 和 $2\sin\phi$。因此 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4\cos^2\phi + 4\sin^2\phi = 4$。

P 在法線上。代入可得

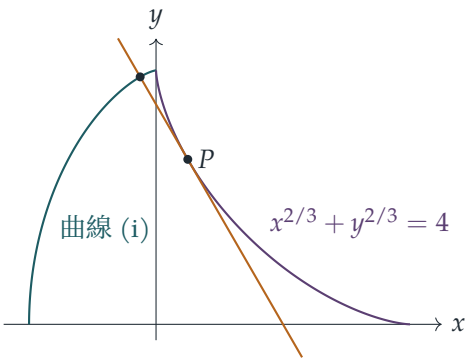
$$8\cos^3\phi\sin\phi + 8\sin^3\phi\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = 8\sin\phi\cos\phi.$$

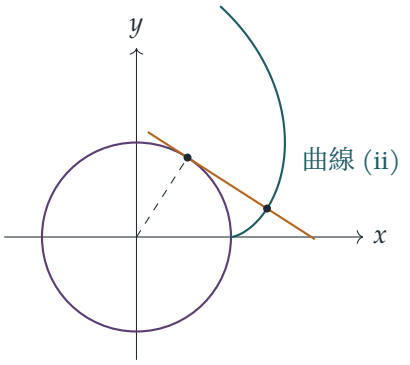
兩者在 P 處的斜率相同。對 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 進行隱函數微分（implicit differentiation）（當 $x, y > 0$ 時成立），

$$\tfrac{2}{3}x^{-1/3} + \tfrac{2}{3}y^{-1/3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} = -\frac{2\sin\phi}{2\cos\phi} = -\tan\phi \ \text{ 在}P,$$

這正好是法線的斜率。

一條穿過曲線上某點、且斜率與曲線在該點的斜率相同的直線，就是曲線在該點的切線。所以法線是 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 在 P 處的切線，得證。





兩幅圖中，曲線（青色）上某點的法線（琥珀色）都與第二條曲線（紫紅色）相切；兩幅圖都是就某個特定的 ϕ 值繪製的。

第 (ii) 部分

對 t 求導（對 $t\sin t$ 和 $t\cos t$ 項使用乘積法則（product rule）），

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

當 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ 時，$t\cos t \neq 0$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{t\sin t}{t\cos t} = \tan t$。在 $t = \phi$ 處，法線的斜率為 $-\cot\phi = -\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}$，其方程為

$$y - \sin\phi + \phi\cos\phi = -\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\big(x - \cos\phi - \phi\sin\phi\big).$$

乘以 $\sin\phi$，

$$y\sin\phi - \sin^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi = -x\cos\phi + \cos^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi.$$

兩邊的 $\phi\sin\phi\cos\phi$ 項互相抵消，再利用 $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$，剩下

$$\boxed{x\cos\phi + y\sin\phi = 1}.$$

想一想 怎樣可以不求垂足（foot of the perpendicular）而求出原點到一條直線的距離？

點 (x_0, y_0) 到直線 $ax + by = c$ 的距離是 $\dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$。這裏 $(x_0, y_0) = (0,0)$、$a = \cos\phi$、$b = \sin\phi$ 及 $c = 1$，所以距離為

$$\frac{|-1|}{\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}} = 1.$$

你也可以直接看出來：$(\cos\phi, \sin\phi)$ 是垂直於該直線的單位向量（unit vector），而點 $(\cos\phi, \sin\phi)$ 本身亦滿足該方程。所以從 O 出發的垂足是 $(\cos\phi, \sin\phi)$，距離為 1。

該曲線。無論 ϕ 取何值，每條法線與原點的距離都是 1。一條與 O 相距 1 的直線，只會在垂足處與以 O 為圓心、半徑為 1 的圓相交，而且在該處與半徑垂直。因此它是該圓的切線。所以每條法線都是

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1},$$

的切線，切點為 $(\cos\phi, \sin\phi)$。

驗算

▶ 在 (i) 中取 $\phi = \frac{1}{3}\pi$。曲線上的點為 $(-\frac{1}{2},\ 6\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}) = (-0.5,\ 7.794)$，而法線 $2x + \frac{2}{\sqrt{3}}y = 8$ 與兩軸相交於 $(4,0)$ 和 $(0, 4\sqrt{3}) \approx (0, 6.928)$。點 $P = (1,\ 3\sqrt{3}) \approx (1,\ 5.196)$ 滿足 $2 + 6 = 8$，所以它在法線上，而且 $1^{2/3} + (3\sqrt{3})^{2/3} = 1 + 3 = 4$。

- 在 (ii) 中，當 $\phi \to 0$ 時，曲線從單位圓上的 $(1,0)$ 開始，而該處的法線趨向鉛垂線 $x = 1$，這確實是 $x^2 + y^2 = 1$ 的切線。
- 用電腦對一千個隨機的 ϕ 值進行驗算，在捨入誤差範圍內證實了所有法線方程、(i) 中的相切關係，以及 (ii) 中的單位距離。

常見錯誤

- 在 (i) 中把 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 算錯：$12\cos t - 12\sin^2 t\cos t$ 可化簡為 $12\cos^3 t$，正是這個因式分解（factorisation）令斜率變得如此簡單。
- 在 (i) 中只驗證 P 在法線上。一條穿過曲線上某點的直線不一定是該點的切線；斜率也必須相同。
- 在 (ii) 中只答「一個圓」，卻沒有給出它的方程、圓心和半徑。

STEP 之外

一條曲線所有法線的包絡線（envelope）稱為該曲線的*漸屈線*（evolute）。它是曲率中心（centres of curvature）的軌跡（locus）。因此第 (i) 部分顯示星形線（astroid）$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 是第一條曲線的漸屈線。在 (ii) 中，該曲線是單位圓的*漸開線*（involute）（即從線軲上拉緊解開的繩子末端所描出的路徑），而它的漸屈線就是該圓。圓的漸開線是大多數齒輪齒形的輪廓。這些概念屬於曲線的微分幾何（differential geometry）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）以優美的幾何方式探討這類平面曲線的推理，是很好的參考讀物。

詳細解答

STEP III 2021，第 2 題

純數學 • 行列式與不等式

STEP III 2021，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

將 x、y、z 各自的定義去分母後，都會得到一條關於 a、b、c 的線性（linear）方程。三條這樣的方程組成一個齊次線性方程組（homogeneous linear system），而它有非零解 (a,b,c)，所以係數矩陣（matrix of coefficients）必定是奇異（singular）的，即其行列式（determinant）為零。這個行列式正好就是我們想要的、關於 x、y、z 的對稱（symmetric）表達式。之後，只要把目標式改寫成 x、y、z 的式子，再運用平方和的基本性質和算術－幾何平均不等式（AM–GM），就能得出那些不等式。

解答

第 (i) 部分

由於 a、b、c 互不相同，所有分母都不為零。去分母，得

$$x(b-c)=a, \qquad y(c-a)=b, \qquad z(a-b)=c.$$

現在逐行展開矩陣乘積：

$$\begin{aligned} a-xb+xc &= a-x(b-c)=a-a=0,\\ ya+b-yc &= b-y(c-a)=b-b=0,\\ -za+zb+c &= c-z(a-b)=c-c=0, \end{aligned}$$

這正是所求的矩陣方程。

把這個 3×3 矩陣記作 M。由於 a、b、c 互不相同，它們不會全為零，所以 M 把一個非零向量（vector）映射到零向量。

想一想 為甚麼這樣就迫使 $\det M = 0$？

若 $\det M \neq 0$，則 M^{-1} 存在；在 $M\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 兩邊左乘 M^{-1}，便得 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$，與 $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ 矛盾。所以 $\det M = 0$。沿第一行展開，

$$\begin{aligned}\det M &= 1\cdot(1+yz) + x(y-yz) + x(yz+z)\\ &= 1 + yz + xy - xyz + xyz + xz\\ &= 1 + xy + yz + zx.\end{aligned}$$

令它等於零，即得 $yz + zx + xy = -1$。

至於不等式，左邊是 $x^2+y^2+z^2$。利用恆等式（identity）$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$，

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 + 2 \geq 2,$$

因為實數 $x+y+z$ 的平方是非負的。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

這裏的分母都是正數，去分母後得 $x(b+c) = 2a$，其餘類似。重新整理成關於 a、b、c 的線性方程：

$$\begin{pmatrix} -2 & x & x \\ y & -2 & y \\ z & z & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（第一行即 $-2a + x(b+c) = 0$，其餘兩行類似。）由於 $a,b,c > 0$，這個向量非零，所以與第 (i) 部分完全一樣，行列式為零：

$$\begin{aligned}0 &= -2(4-yz) - x(-2y-yz) + x(yz+2z)\\ &= -8 + 2yz + 2xy + xyz + xyz + 2xz\\ &= -8 + 2(xy+yz+zx) + 2xyz.\end{aligned}$$

兩邊除以 2，得 $xyz + yz + zx + xy = 4$。

第一個不等式。竅門是把左邊每個括號除以右邊對應的括號：

$$\frac{2a+b+c}{b+c} = \frac{2a}{b+c} + 1 = 1 + x,$$

另外兩個也類似。由於 $(b+c)(c+a)(a+b) > 0$，所求不等式等價於 $(1+x)(1+y)(1+z) > 5$。展開並利用剛證得的結果，

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 1 + (x+y+z) + (xy+yz+zx) + xyz = 5 + (x+y+z).$$

由於 x、y、z 都是正數，上式大於 5，第一個不等式得證。

第二個不等式。按同樣的計算，現在需要證明 $x+y+z>2$。記 $S=x+y+z$。

> ? **想一想** 我們知道 $xy+yz+zx+xyz=4$。這怎樣能迫使 S 不會太小？

$xy+yz+zx$ 和 xyz 都可以用 S 給出上界：

- $S^2-3(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\geq 0$，所以 $xy+yz+zx\leq \frac{1}{3}S^2$；
- 對正數 x、y、z 應用算術－幾何平均不等式，得 $xyz\leq\left(\frac{1}{3}S\right)^3=\frac{1}{27}S^3$。

兩式相加，

$$4=xy+yz+zx+xyz\leq\tfrac{1}{3}S^2+\tfrac{1}{27}S^3.$$

當 $S>0$ 時，右邊是 S 的遞增函數（increasing function），而當 $S=3$ 時它等於 $3+1=4$。所以若 $S<3$，右邊便會小於 4，這是不可能的。因此 $S\geq 3$，而

$$\frac{(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}=5+S\geq 8>7,$$

第二個不等式得證（事實上更得出較強的下界 8，當 $a=b=c$ 時取得）。

驗算

- 在第 (ii) 部分取 $a=b=c=1$：左邊為 $4^3=64$，而 $(b+c)(c+a)(a+b)=8$，所以比值為 8，與 $x=y=z=1$、$S=3$ 時的 $5+S$ 吻合。此外 $xyz+xy+yz+zx=1+3=4$。
- 在第 (i) 部分取 $(a,b,c)=(0,1,2)$：則 $x=0$、$y=\frac{1}{2}$、$z=-2$，而 $xy+yz+zx=-1$，符合要求；平方和為 $\frac{17}{4}\geq 2$。
- 用電腦對 20 000 組隨機有理數三元組驗算，兩條恆等式都準確成立；第 (ii) 部分找到的最小比值約為 8.0001，而當 $a=b=1$、$c=10^{-6}$ 時比值約為 9.0，所以下界 8 確實是最小值，遠高於 7。

常見錯誤

- 斷言 $\det M=0$ 卻不說明理由：關鍵在於 (a,b,c) 是非零向量，這在第 (i) 部分需要「互不相同」，在第 (ii) 部分需要「正數」。
- 把 $2a+b+c$ 除以 $b+c$ 時得出 $1+\frac{1}{2}x$ 而不是 $1+x$：記住 x 本身已經包含因數 2。

- 用 $xy + yz + zx < 4$（一個上界）去嘗試給 S 找下界；不等式的方向必須反過來，如上文所示。

STEP 之外

方陣把某個非零向量映射到零，當且僅當其行列式為零——這是線性代數（linear algebra）的核心：特徵值（eigenvalues）正是透過 $\det(A - \lambda I) = 0$ 求得的。第 (ii) 部分中的下界 $S \geq 3$ 其實就是改頭換面的 Nesbitt 不等式（Nesbitt's inequality）$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$。線性代數方面，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）；若想多做這類不等式，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題集》）是極佳的練習材料。

詳細解答

STEP III 2021，第 3 題

純數學 • 積分不等式

STEP III 2021，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

對被升至 n 次冪的那個式子求導。對於 $u = \sec x + \tan x$，其導數(derivative)是 $u \sec x$，這使 $u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 可以直接積分，所以要做的就是把 $I_{n+1} + I_{n-1}$ 的被積函數（integrand）改寫成這個形式。至於不等式（inequality），則來自比較被積函數 $u^n = u^{n-1} \cdot u$ 與可直接積分的 $u^{n-1} \cdot u'$：若 $u < u'$，則積分（integral）小於 $\left[u^n/n\right]$。

解答

第 (i) 部分

設 $u = \sec x + \tan x$。則

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x\left(\sec x + \tan x\right) = u \sec x.$$

此外，利用 $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$，

$$u^2 + 1 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x + 1 = 2\sec^2 x + 2\sec x \tan x = 2u \sec x = 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

因此對於 $n \geq 1$，

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_{n-1} &= \int_0^\beta u^{n-1}\left(u^2+1\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^\beta u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\left[u^n\right]_0^\beta \\ &= \frac{2}{n}\left(\left(\sec\beta + \tan\beta\right)^n - 1\right), \end{aligned}$$

因為在 $x = 0$ 時 $u = 1$。兩邊除以二，即得所求的恆等式（identity）。

想一想 恆等式涉及 I_{n+1} 和 I_{n-1}，但不等式卻是關於 I_n 的。怎樣才能把中間那一項夾進去？

比較 u^2+1 與 $2u$。我們有 $u^2+1-2u=(u-1)^2\geq 0$，而當 $0<x\leq\beta$ 時，$\sec x>1$ 且 $\tan x>0$，所以 $u>1$，不等式在該處嚴格成立。乘以 $u^{n-1}>0$，得在 $(0,\beta]$ 上 $u^{n+1}+u^{n-1}>2u^n$；積分後（被積函數連續，且不等式在一個長度為正的區間上嚴格成立）得

$$I_{n+1}+I_{n-1}>2I_n,\qquad \text{所以}\qquad I_n<\tfrac{1}{2}\left(I_{n+1}+I_{n-1}\right)=\frac{1}{n}\left((\sec\beta+\tan\beta)^n-1\right).$$

（等價地說：當 $x>0$ 時 $u'-u=u(\sec x-1)>0$，所以 $I_n=\int_0^\beta u^{n-1}u\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta u^{n-1}u'\,\mathrm{d}x$。正是這個觀點可以延用到第 (ii) 部分。）

第 (ii) 部分

記 $c=\cos\beta$，則 $0<c<1$，並設 $v=c\sec x+\tan x$。則

$$v'=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=c\sec x\tan x+\sec^2 x.$$

在端點處，$v(0)=c=\cos\beta$，而 $v(\beta)=1+\tan\beta$，正好是目標式中的兩個數。因此上界就是 $\frac{1}{n}\left[v^n\right]_0^\beta=\int_0^\beta v^{n-1}v'\,\mathrm{d}x$，只需證明在整個 $[0,\beta]$ 上 $v<v'$ 便足夠。

想一想 在第 (i) 部分中，u^2+1 恰好等於 $2u'$。對於 v，相應的關係是甚麼？

重複第 (i) 部分的計算，

$$v^2+1=c^2\sec^2x+2c\sec x\tan x+\tan^2x+1=(1+c^2)\sec^2x+2c\sec x\tan x,$$

所以

$$2v'-(v^2+1)=(1-c^2)\sec^2x=\sin^2\beta\,\sec^2x.$$

這不再是等式，但剩餘項是正的。結合 $v^2+1-2v=(v-1)^2$，

$$2(v'-v)=(v-1)^2+\sin^2\beta\,\sec^2x>0,$$

因為當 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ 時 $\sin\beta\neq 0$。故對每個 $x\in[0,\beta]$，$v<v'$。

最後，在 $[0,\beta]$ 上 $v>0$（因為 $c>0$、$\sec x>0$ 且 $\tan x\geq 0$），所以 $v^{n-1}>0$，從而 $v^n=v^{n-1}v<v^{n-1}v'$。在 $[0,\beta]$ 上積分，對於 $n\geq 1$，

$$J_n=\int_0^\beta v^n\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta v^{n-1}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\left[v^n\right]_0^\beta=\frac{1}{n}\left((1+\tan\beta)^n-\cos^n\beta\right),$$

得證。

驗算

- 當 $n = 1$ 時，(i) 中的恆等式說 $\frac{1}{2}(I_2 + \beta) = \sec\beta + \tan\beta - 1$。取 $\beta = 1$，數值積分（numerical integration）得兩邊均為 2.40822…。
- 取 $\beta = 1$、$n = 3$：數值上 $I_3 \approx 8.774$，而上界為 12.863；$J_3 \approx 3.326$，而上界為 5.523。
- 在 (ii) 中形式上代入 $\cos\beta = 1$，J_n 就變成 I_n，剩餘項 $\sin^2\beta\sec^2 x$ 亦隨之消失：第 (ii) 部分確實是第 (i) 部分的一個擾動（perturbation）。

常見錯誤

- 忘記檢查正負：把 $v < v'$ 乘以 v^{n-1} 需要 $v^{n-1} > 0$，這正是 $v > 0$ 之所以重要的原因。
- 只得出 $\leq$：嚴格不等式需要 $u > 1$（或 $\sin\beta \neq 0$）在一個區間上成立，而不僅僅在一點上成立。
- 計算 $v(\beta)$ 時粗心：$\sec\beta\cos\beta = 1$，$1 + \tan\beta$ 正是由此而來。

STEP 之外

「若逐點有 $0 < f \leq g$，且在某處嚴格成立，則 $\int f < \int g$」這個論證，就是積分的單調性（monotonicity），分析課程會從黎曼積分（Riemann integral）的定義出發把它仔細證明。把一個難處理的被積函數與一個精確的導數作比較，是估計積分和級數（series）上下界的標準方法，它亦會在積分判別法（integral test）等估計中再次出現。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）嚴謹地講述了積分以及這類比較論證。

詳細解答

STEP III 2021，第 4 題

純數學 • 向量與投影

STEP III 2021，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

這裏的一切都靠純量積（scalar product）完成：兩個向量之間的夾角可從 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\text{夾角})$ 讀出；而投影（projection）是線性（linear）的，所以 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ 的投影就是 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)$。第 (i) 部分證明兩個長度相等的向量的平均會平分（bisect）它們之間的夾角。在第 (iii) 部分，投影 $\mathbf{a}_1$ 與 $\mathbf{b}_1$ 的長度通常不同，所以除非出現某種特殊情況，否則我們應預期平分不成立。條件可以漂亮地因式分解（factorise），正好對應兩種特殊情況。

解答

第 (i) 部分

由於 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ 且 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \cos\theta$，

$$|\mathbf{m}|^2 = \tfrac{1}{4}\left(1 + 2\cos\theta + 1\right) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

所以 $|\mathbf{m}| = \cos\frac{\theta}{2}$，而因為 $0 < \theta < \pi$，它是正數。特別地，$\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$。此外

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{b}.$$

因此 $\mathbf{m}$ 與 $\mathbf{a}$ 之間夾角的餘弦是 $\cos^2\frac{\theta}{2}\big/\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$，對 $\mathbf{b}$ 亦然。所以兩個夾角都是 $\frac{\theta}{2}$。由於 $\mathbf{m}$ 位於 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 所在的平面上，而兩個夾角之和為 θ，故 $\mathbf{m}$ 平分 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 之間的夾角。

第 (ii) 部分

按定義，以 $\mathbf{c}$ 為單位法向量（unit normal），且 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \cos\alpha$，

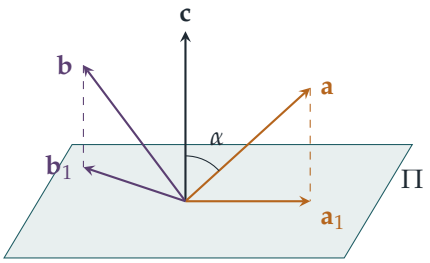
$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - \cos\alpha\,\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b} - \cos\beta\,\mathbf{c}.$$

於是 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c} = \cos\alpha - \cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) = 0$，因為 $|\mathbf{c}| = 1$。同理 $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c} = 0$。

由於 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c} = 0$，我們得到 $|\mathbf{a}_1|^2 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a} - \cos\alpha\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}$，而且

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

由於 α 是銳角，$\sin\alpha > 0$，所以 $|\mathbf{a}_1| = \sin\alpha$。同樣地 $|\mathbf{b}_1| = \sin\beta$。兩者皆非零，所以夾角 ϕ 有定義。



至於投影之間的夾角，再次利用 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c} = 0$ 消去一項：

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{b} - \cos\beta\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}) = \cos\theta - \cos\alpha\cos\beta.$$

除以 $|\mathbf{a}_1||\mathbf{b}_1| = \sin\alpha\sin\beta$，得

$$\cos\phi = \frac{\cos\theta - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

即為所求。

第 (iii) 部分

投影是線性的，所以

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m} - (\mathbf{m}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{c} = \tfrac{1}{2}\big(\mathbf{a} - \cos\alpha\,\mathbf{c}\big) + \tfrac{1}{2}\big(\mathbf{b} - \cos\beta\,\mathbf{c}\big) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1).$$

我們假設 $\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{0}$，否則它沒有方向，不可能平分任何東西。由於 $\mathbf{m}_1$ 是 $\mathbf{a}_1$ 與 $\mathbf{b}_1$ 的正係數組合，它位於兩者所在的平面上，並且夾在兩者之間。所以它平分該夾角，當且僅當它與 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{b}_1$ 所成的角相等：

$$\frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}.$$

（我們已約去公因子 $|\mathbf{m}_1|$，而 cos 在 $[0, \pi]$ 上是一一對應（one-to-one）的。）

想一想 為何不直接把第 (i) 部分應用於 $\mathbf{a}_1$ 與 $\mathbf{b}_1$？

第 (i) 部分需要 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$。這裏 $|\mathbf{a}_1| = \sin\alpha$，$|\mathbf{b}_1| = \sin\beta$，兩者通常不同。所以我們必須實際計算。

設 $P = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1$，$s = \sin\alpha$，$t = \sin\beta$。則

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \tfrac{1}{2}(s^2 + P), \qquad \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \tfrac{1}{2}(P + t^2).$$

兩邊乘以 $2st > 0$，條件變為

$$\begin{aligned} t(s^2 + P) = s(t^2 + P) &\iff st(s - t) - P(s - t) = 0 \\ &\iff (s - t)(st - P) = 0. \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{m}_1$ 平分該夾角，當且僅當 $s = t$ 或 $P = st$。

- $s = t$ 即 $\sin\alpha = \sin\beta$。由於 sin 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上嚴格遞增，而兩個角都是銳角，此式成立當且僅當 $\alpha = \beta$。
- 由第 (ii) 部分，$P = \cos\theta - \cos\alpha\cos\beta$。所以 $P = st$ 即

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

每一步都是等價（equivalence）關係，所以 $\mathbf{m}_1$ 平分 $\mathbf{a}_1$ 與 $\mathbf{b}_1$ 之間的夾角，當且僅當 $\alpha = \beta$ 或 $\cos\theta = \cos(\alpha - \beta)$。

從幾何角度看，第一種情況表示 $\mathbf{a}_1$ 與 $\mathbf{b}_1$ 長度相等，所以第 (i) 部分終究適用。第二種情況表示 $\cos\phi = 1$：兩個投影指向同一方向（當 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 與 $\mathbf{c}$ 共面（coplanar），且 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 位於 $\mathbf{c}$ 的同一側時）。此時夾角為零，平分是平凡成立的。

驗算

- 取 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$（本題不容許，但是一個有用的極限情況）。此時 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 本身已在平面上，公式給出 $\cos\phi = \cos\theta$，理應如此。
- 取 $\alpha = \frac{\pi}{3}$、$\beta = \frac{\pi}{4}$ 及 $\theta = \frac{\pi}{2}$，公式給出 $\cos\phi = -\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{6}/4} = -1/\sqrt{3} \approx -0.577$。這與明確構造出這些向量後的結果一致。
- $\cos\phi$ 的公式及因式分解後的平分條件，都已用電腦在數千組隨機單位向量三元組上驗證。

常見錯誤

- 忘記 $|\mathbf{a}_1| \neq 1$。單位向量的投影並非單位向量，所以分母 $\sin\alpha\sin\beta$ 不可缺少。
- 以為 $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ 的角平分線總是 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$。這只在長度相等時成立。一般而言，角平分線是 $\mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1| + \mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|$。
- 除以 $\sin\alpha - \sin\beta$ 而不是因式分解，因而遺漏了 $\alpha = \beta$ 的情況。

STEP 之外

投影到平面上是一個線性映射（*linear map*） $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$，其矩陣為 $I - \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$。線性映射保持和，但不保持長度或角度，這正是本題結果如此的原因。$\cos\phi$ 的公式其實是喬裝了的球面餘弦定理（spherical cosine rule）。這裏 ϕ 是以 **a**、**b** 及 **c** 為頂點的球面三角形（spherical triangle）在頂點 **c** 處的角，其三邊為 α、β 及 θ。關於投影與正交性（orthogonality），可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

詳細解答

STEP III 2021，第 5 題

純數學 • 極坐標曲線

STEP III 2021，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

兩條曲線都以 r 表示為 θ 的函數，所以它們在兩個 r 的表達式相等之處相交；若在該處兩個 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 的值亦相等，兩曲線便在該處相切（touch）。把一切寫成 $c=\cos\theta$ 的式子，相交條件便化為一個關於 c 的二次方程（quadratic）。這個二次方程的重根（repeated root）是相切的一種情況，但並非唯一的情況：由於 $\cos\theta$ 本身在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 處是平穩（stationary）的，所以在 $c=\pm1$ 處的單根（simple root）亦會給出 θ 的二重零點。

解答

全文設 $c=\cos\theta$，並記

$$f(\theta)=a+2\cos\theta,\qquad g(\theta)=2+\cos 2\theta=1+2\cos^2\theta.$$

注意對所有 θ 均有 $g(\theta)\geq 1$，所以第二條曲線永不經過原點 O。在 O 以外，一個 $r>0$ 的點有唯一的角 θ（相差 2π 的倍數除外）。因此兩曲線只可能在 r 和 θ 都相同的點相交。

第 (i) 部分

當 $f(\theta)=g(\theta)$ 時兩曲線相交，即 $a+2c=1+2c^2$，亦即

$$2\cos^2\theta-2\cos\theta+1-a=0,$$

此即所求。為兩者之差命名會方便一些：

$$h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)=-(2c^2-2c+1-a).$$

何時相切？在公共點上，半徑與切線（tangent）之間的夾角 ψ 滿足 $\tan\psi=r\big/\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$。所以兩條經過同一點 (r,θ) 的曲線在該點有相同切線，當且僅當它們的 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 亦相同。因此

兩曲線在 $h(\theta)=0$ 且 $h'(\theta)=0$ 之處相切。求導得

$$h'(\theta) = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta = 2\sin\theta\,(2\cos\theta - 1).$$

所以 $h'(\theta)=0$ 當且僅當 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 或 $\sin\theta = 0$。

> **想一想** 關於 c 的二次方程只在 $a=\frac{1}{2}$ 時有重根。那麼為何還有其他 a 值？

c 的重根足以導致相切，但並非必要。映射 $\theta \mapsto \cos\theta$ 在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 處是平穩的。所以只要 $c=\pm1$ 是根，h 在該處便有 θ 的二重零點。條件 $h'=0$ 把兩種可能都包括在內。

- $\cos\theta = \frac{1}{2}$：代入相交方程得 $\frac{1}{2} - 1 + 1 - a = 0$，所以 $a = \frac{1}{2}$。（等價地，判別式（discriminant）$4 - 8(1-a)$ 在 $a=\frac{1}{2}$ 時為零，此時重根為 $c=\frac{1}{2}$。）所以當 $a=\frac{1}{2}$ 時兩曲線相切，此即所求。
- $\theta = 0$，$c = 1$：需要 $2 - 2 + 1 - a = 0$，所以 $a = 1$。此時兩曲線上皆有 $r = 3$。
- $\theta = \pi$，$c = -1$：需要 $2 + 2 + 1 - a = 0$，所以 $a = 5$。此時兩曲線上皆有 $r = 5 - 2 = 3$，故 $r \geq 0$ 成立。

因此另外兩個值是 $a=1$ 和 $a=5$。

第二條曲線的特徵

三幅草圖都包含 $r = 2 + \cos 2\theta$，所以我們只描述一次。它在 $\theta \to -\theta$ 和 $\theta \to \pi - \theta$ 下不變，所以它對兩條坐標軸都對稱（symmetric）。這裏 r 由 $\theta = 0, \pi$ 處的最大值 3 變到 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處的最小值 1。它不是橢圓。在 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 附近，設 $s = \sin\theta$，

$$y = r\sin\theta = (3 - 2s^2)s = 3s - 2s^3, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 3 - 6s^2 = -3 \text{ 當} s = 1.$$

所以當 θ 離開 $\frac{1}{2}\pi$（而 s 降到 1 以下）時，y 反而增大。曲線在 $(0, \pm1)$ 處有一個光滑的凹陷（dimple），而不是尖點（cusp），因為該處 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -2\sin 2\theta = 0$，切線是水平的。相比之下，$x = r\cos\theta = c + 2c^3$ 關於 c 遞增，所以 $(\pm3, 0)$ 兩端只是圓滑的。

第一條曲線 $r = a + 2\cos\theta$ 關於初始線（initial line）對稱，因為它在 $\theta \to -\theta$ 下不變。它在 $\theta = 0$ 處有 $r = a + 2$，在 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處有 $r = a$，而（當 $a \geq 2$ 時）在 $\theta = \pi$ 處有 $r = a - 2$。當 $a < 2$ 時，限制 $r \geq 0$ 使曲線在 $\cos\theta = -\frac{1}{2}a$ 處被截斷，曲線沿這兩個方向到達 O。

第 (ii) 部分

當 $a = \frac{1}{2}$ 時，

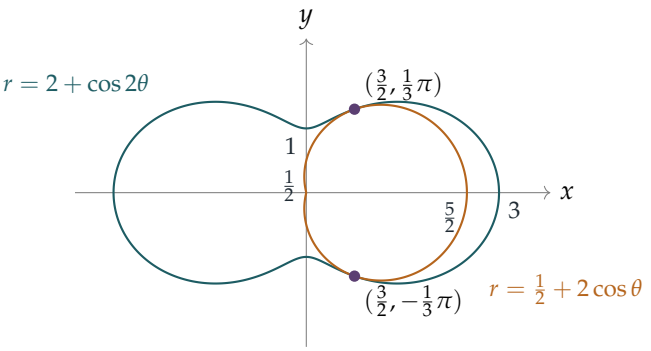
$$h(\theta) = -\left(2c^2 - 2c + \tfrac{1}{2}\right) = -2\left(c - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

所以第一條曲線處處位於第二條曲線之內，並只在 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 處與之相交。兩者相切於

$$\theta = \pm\tfrac{1}{3}\pi, \qquad r = \tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{3}{2}.$$

（驗算：$2 + \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}$，且在 $\theta = \frac{1}{3}\pi$ 處兩個 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 的值都等於 $-\sqrt{3}$。）

第一條曲線只在 $\cos\theta \geq -\frac{1}{4}$ 時存在，即 $|\theta| \leq \arccos(-\frac{1}{4}) \approx 104.5°$。它由初始線上的 $r = \frac{5}{2}$ 出發，經過 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處的 $r = \frac{1}{2}$，一直到達 O。它沿直線 $\theta = \pm\arccos(-\frac{1}{4})$ 到達 O，所以在原點處有一個角點（corner，即尖端），位置剛好在 y 軸左側。

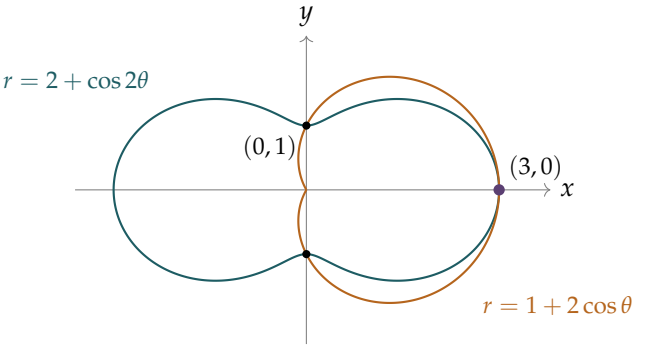


第 (iii) 部分

$a = 1$ 的情況。此時 $h(\theta) = -(2c^2 - 2c) = 2c(1-c)$。兩曲線在 $c = 1$ 或 $c = 0$ 處相交。

- 它們在 $\theta = 0$、$r = 3$ 處相切，即點 $(3, 0)$。在 $\theta = 0$ 附近有 $0 < c < 1$，所以 $h > 0$，第一條曲線在切點兩側都略為位於第二條曲線之外。
- 在 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處，兩曲線上皆有 $r = 1$：即點 $(0, \pm 1)$，也就是凹陷的底部。這裏 h 隨 c 變號，所以兩曲線相交而穿過。第一條曲線在 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ 時位於外側，在 $|\theta| > \frac{1}{2}\pi$ 時位於內側。

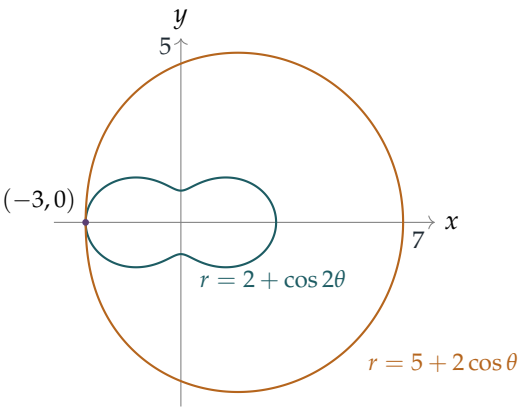
第一條曲線在 $\cos\theta \geq -\frac{1}{2}$ 時存在，即 $|\theta| \leq \frac{2}{3}\pi$。它沿直線 $\theta = \pm\frac{2}{3}\pi$ 到達 O，並在該處形成一個角點。



$a = 5$ 的情況。此時 $h(\theta) = -(2c^2 - 2c - 4) = 2(2 - c)(1 + c) \geq 0$，等號只在 $c = -1$ 時成立。所以第一條曲線完全位於第二條曲線之外，並只在

$$\theta = \pi, \qquad r = 3,$$

處與之相切，即點 $(-3, 0)$。由於 $a > 2$，現在處處有 $r > 0$，所以第一條曲線是一條閉合環線（一條沒有凹陷的蚶線（limaçon），因為 $a \geq 4$）。它在 $\theta = 0$ 處有 $r = 7$，在 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處有 $r = 5$，在 $\theta = \pi$ 處有 $r = 3$。



驗算

- 在每個切點，比較兩個 r 值和兩個 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 值。對於 $a = 1$ 在 $\theta = 0$ 處，兩者皆 $r = 3$，兩個導數皆為 0；$a = 5$ 在 $\theta = \pi$ 處亦同樣成立。
- 以電腦在 $-3 \leq a < 9$ 範圍內以 0.01 為步長掃描，只在 $a = \frac{1}{2}$、1 和 5 時找到 $h = h' = 0$（且 $r \geq 0$）。這與因式分解（factorisation）$h' = 2\sin\theta(2\cos\theta - 1)$ 吻合。
- 點 $(0, 1)$ 位於第二條曲線上，而附近 $\theta = \frac{1}{2}\pi + 0.1$ 處的點有 $y \approx 1.015 > 1$。這證實了凹陷的存在。

常見錯誤

- 只做到判別式便停下，因而漏掉 $a = 1$ 和 $a = 5$。關於 $c = \cos\theta$ 的單根，仍然可以是關於 θ 的二重根。
- 把 $r = 2 + \cos 2\theta$ 畫成橢圓，或在 $(0, \pm 1)$ 處畫成尖點而不是光滑的凹陷。
- 在 $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = 1$ 時畫出蚶線的內環。該內環上 $r < 0$，題目已將之排除。

STEP 之外

相切實際上是關於重數（multiplicity）的命題。兩條曲線在其方程之差沿曲線有重零點之處相切，而參數化（parametrisation）可以製造或隱藏這類零點，正如本題中的 $\cos\theta$ 一樣。在大學第一門關於曲線的課程中，這會發展成接觸階（order of contact）的概念，而極坐標（polar）曲線的曲率（curvature）$\left(r^2+2r'^2-rr''\right)/\left(r^2+r'^2\right)^{3/2}$ 正好解釋了 $2+\cos 2\theta$ 的凹陷從何而來。如想進一步了解參數曲線及其幾何，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）；至於光滑性與相切背後的分析，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2021，第 6 題

純數學 • 反函數與導數

STEP III 2021，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

兩個函數看起來都令人望而生畏，但它們的導數（derivative）原來都非常簡單。導數為 $\frac{1}{1+x^2}$ 的函數必定是 $\tan^{-1} x$ 加上一個常數，而導數為零的函數是常數，但只是在它有定義的每一個區間（interval）上各自成立。所以真正的工作是利用一個方便的數值或一個極限，求出每一段上各自的常數，並留意函數在無定義之點的跳躍。

解答

第 (i) 部分

設 $t = \tan\alpha$，則 $t > 0$；再設 $u = \dfrac{xt+1}{t-x}$，於是 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} u$。由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{t(t-x)+(xt+1)}{(t-x)^2} = \frac{1+t^2}{(t-x)^2},$$

而且

$$1+u^2 = \frac{(t-x)^2+(xt+1)^2}{(t-x)^2} = \frac{t^2+x^2+x^2t^2+1}{(t-x)^2} = \frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t-x)^2}.$$

所以由鏈式法則（chain rule），

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2},$$

即所求。

想一想 這是否表示 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + c$，其中 c 是單一個常數？

不是。函數在 $x = \tan\alpha$ 處無定義，所以定義域（domain）是兩個分開的區間；在每一個區間上，$f_\alpha(x) - \tan^{-1} x$ 的導數為零，因此是常數，但兩個常數不一定相同。

當 $x < \tan\alpha$ 時：在 $x = 0$ 處，我們有 $f_\alpha(0) = \tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$，因為 $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$。因此

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x < \tan\alpha).$$

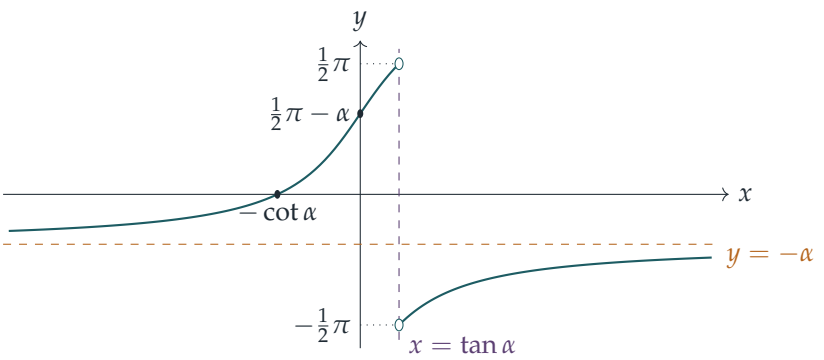
當 $x > \tan\alpha$ 時：當 $x \to \tan\alpha$ 而 x 從上方趨近時，分子 $xt + 1$ 趨於 $1 + t^2 > 0$，而分母 $t - x$ 經負值趨於 0，所以 $u \to -\infty$，且 $f_\alpha(x) \to -\frac{1}{2}\pi$。由於 $\tan^{-1} x \to \alpha$，常數是 $-\frac{1}{2}\pi - \alpha$：

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x - \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x > \tan\alpha).$$

（從下方用同樣的極限論證，可得 $u \to +\infty$ 及數值 $\frac{1}{2}\pi$，與第一條公式一致。）

所以這個圖像就是 $y = \tan^{-1} x$ 的圖像分成兩段，一段向上平移 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$，另一段向下平移 $\frac{1}{2}\pi + \alpha$。它的特徵如下：

- 在每一段上都是遞增的，斜率（gradient）為 $\frac{1}{1+x^2}$；
- 當 $x \to \pm\infty$ 時，$y \to -\alpha$（左端從上方趨近，右端從下方趨近），所以 $y = -\alpha$ 是兩端的漸近線（asymptote）；
- 左段由 $-\alpha$ 上升至 $x = \tan\alpha$ 處的 $\frac{1}{2}\pi$（不能達到），在 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 與 y 軸相交，並在 $\tan^{-1} x = \alpha - \frac{1}{2}\pi$ 之處，即 $x = -\cot\alpha$，與 x 軸相交；
- 右段在 $x = \tan\alpha$ 處從略高於 $-\frac{1}{2}\pi$ 的位置開始，上升至 $-\alpha$；它整段位於 x 軸下方；
- 在 $x = \tan\alpha$ 處有一個 $-\pi$ 的跳躍，而兩段在該處的斜率都是 $\cos^2\alpha$。

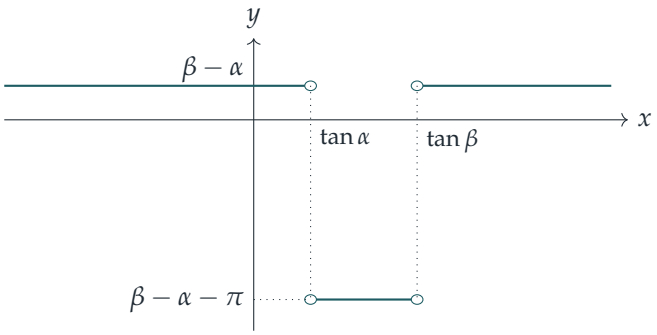


兩者之差。由於 $0 < \alpha < \beta < \frac{1}{2}\pi$，我們有 $\tan\alpha < \tan\beta$，所以共有三個區間。利用每個函數的兩條公式：

- 當 $x < \tan\alpha$ 時：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$；

- 當 $\tan\alpha < x < \tan\beta$ 時：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha - \pi$；
- 當 $x > \tan\beta$ 時：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (-\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$。

$\tan^{-1} x$ 項互相抵消，所以圖像是一個階梯函數（step function）：它是水平線 $y = \beta - \alpha$（位於 0 與 $\frac{1}{2}\pi$ 之間），但在 $\tan\alpha$ 與 $\tan\beta$ 之間的區間上則下降 π，變為 $y = \beta - \alpha - \pi$（位於 $-\pi$ 與 $-\frac{1}{2}\pi$ 之間）。函數在 $x = \tan\alpha$ 及 $x = \tan\beta$ 處無定義。



第 (ii) 部分

逐項求導。由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tanh^{-1} s = \dfrac{1}{1-s^2}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh^{-1}(\sin x) = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x,$$

又由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sinh^{-1} s = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(\tan x) = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{|\sec x|} = |\sec x|.$$

這裏的平方根取正值，所以才會出現絕對值（modulus）。因此 $g'(x) = \sec x - |\sec x|$。當 $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ 時，$\cos x < 0$，所以 $|\sec x| = -\sec x$，從而

$$g'(x) = 2\sec x,$$

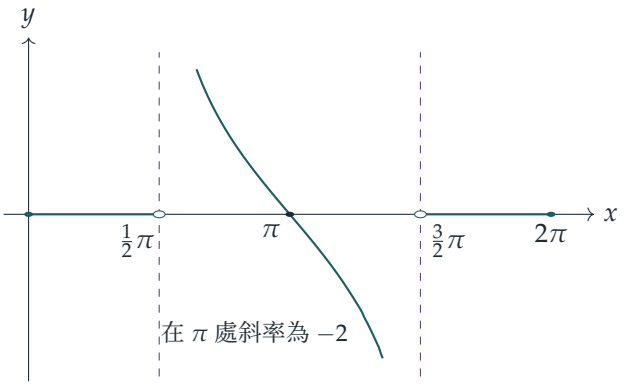
即所求。在另外兩個區間 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ 及 $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$ 上，$\cos x > 0$，所以同樣的計算得出 $g'(x) = 0$。

外側的區間。在這裏 g 在每個區間上都是常數。由於 $g(0) = \tanh^{-1} 0 - \sinh^{-1} 0 = 0$，同樣 $g(2\pi) = 0$，我們得到當 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ 及 $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$ 時，$g(x) = 0$。

中間的區間。在這裏 $g'(x) = 2\sec x < 0$，所以 g 嚴格遞減（strictly decreasing）。在中點處，$g(\pi) = \tanh^{-1} 0 - \sinh^{-1} 0 = 0$，且 $g'(\pi) = 2\sec\pi = -2$。在兩端：

- 當 $x \to \frac{1}{2}\pi^+$ 時，$\sin x \to 1$，所以 $\tanh^{-1}(\sin x) \to +\infty$，而 $\tan x \to -\infty$，所以 $-\sinh^{-1}(\tan x) \to +\infty$；因此 $g(x) \to +\infty$；
- 當 $x \to \frac{3}{2}\pi^-$ 時，$\sin x \to -1$ 且 $\tan x \to +\infty$，所以兩項都令 $g(x) \to -\infty$。

此外 $g''(x) = 2\sec x \tan x$。當 $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ 時，$\sec x$ 和 $\tan x$ 都是負數，所以 $g'' > 0$；當 $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ 時，$\sec x < 0 < \tan x$，所以 $g'' < 0$。因此 $(\pi, 0)$ 是一個拐點（point of inflection），該處斜率為 -2，而曲線關於這一點旋轉對稱（rotational symmetry）（事實上 $g'(2\pi - x) = g'(x)$ 且 $g(\pi) = 0$）。其實，由於 g 與 $2\tanh^{-1}(\sin x)$ 在這個區間上有相同的導數，而且兩者在 π 處都等於零，所以在該區間上 $g(x) = 2\tanh^{-1}(\sin x) = 2\ln|\sec x + \tan x|$。



驗算

- 取 $\alpha = 0.6$：$f_\alpha(0) = \tan^{-1}(\cot 0.6) \approx 0.9708 = \frac{1}{2}\pi - 0.6$，而 $f_\alpha(\pm 10^9) \approx -0.6$，與漸近線的預測一致。
- $g(1) = \tanh^{-1}(\sin 1) - \sinh^{-1}(\tan 1) = 1.2261 - 1.2261 = 0$，證實了平坦的部分。用電腦檢驗數以千計的隨機點，結果與上述所有公式的誤差都在 10^{-6} 以內。

常見錯誤

- 寫成 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + c$，處處只用一個常數。導數為零只能在一個區間上推出常數。
- 寫成 $\sqrt{\sec^2 x} = \sec x$。它其實是 $|\sec x|$，而正是這個符號，令 g 在兩個區間上為零，在第三個區間上卻不是。

STEP 之外

在一個區間上導數為零就迫使函數為常數，這是中值定理（Mean Value Theorem）的一個推論；而在不是區間的集合上，這個結論並不成立，兩個部分都顯示了這一點。第 (i) 部分其實就是 $\tan^{-1}$ 的加法公式（addition formula）連同 $\pm\pi$ 的修正，這種分支（branch）的記賬工作在複分析（complex analysis）中十分重要。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對中值定理及其推論有細緻的論述。

詳細解答

STEP III 2021，第 7 題

純數學 • 幾何中的複數

STEP III 2021，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

把單位圓(unit circle)上的兩點相加或相減，即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 時，先抽出「平均」因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}$。剩下的部分就是純粹的餘弦或純粹的正弦，第 (i) 部分正是靠這一點得以成立。第 (i) 部分的結論是 $(a+b)/(a-b)$ 為純虛數 (purely imaginary)，而在複平面 (complex plane) 上，「比值為純虛數」就代表「互相垂直 (perpendicular)」。之後的一切，不過是對 a、b、c、d 的各種和作整理而已。

解答

第 (i) 部分

設 $\alpha = \frac{1}{2}(\theta+\phi)$ 及 $\beta = \frac{1}{2}(\theta-\phi)$，於是 $\theta = \alpha+\beta$ 而 $\phi = \alpha-\beta$。那麼

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\right) = 2\cos\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\right) = 2\mathrm{i}\sin\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.$$

條件 $\theta-\phi \neq 2n\pi$ 正好表示 β 不是 π 的倍數，因此 $\sin\beta \neq 0$，分母不為零。兩式相除，得

$$z = \frac{2\cos\beta}{2\mathrm{i}\sin\beta} = -\mathrm{i}\cot\beta = -\mathrm{i}\cot\left(\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)\right) = \mathrm{i}\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right),$$

這裏用到 $1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$，以及 cot 是奇函數（odd function）這一事實。這就是所求的結果。

由於 $\cot\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right)$ 是實數，z 位於虛軸上：

$$|z| = \left|\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right)\right|, \qquad \arg z = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{若 } \cot\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right) > 0, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{若 } \cot\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right) < 0. \end{cases}$$

若 $\cot\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right)=0$，即 $\phi-\theta$ 是 π 的奇數倍，則 $z=0$，其輻角（argument）沒有定義。（這種情況出現在兩點位於直徑兩端時，此時兩者之和為零。）

第 (ii) 部分

由於 A 和 B 都在以原點為圓心的單位圓上，可記 $a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及 $b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$。兩點相異，所以 $\theta-\phi$ 不是 2π 的倍數，第 (i) 部分適用：

$$\frac{x}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}=\mathrm{i}k, \qquad k=\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right)\in\mathbb{R}.$$

因為 $x=a+b\neq 0$，所以 $k\neq 0$。於是 $x=\mathrm{i}k\,(a-b)$：向量 $\overrightarrow{OX}$（由 x 表示）就是把向量 $\overrightarrow{BA}$（由 $a-b$ 表示）旋轉一個直角，再乘以非零實數 k 所得。等價地說，$\arg x-\arg(a-b)=\pm\frac{1}{2}\pi$。因此 OX 垂直於 AB。

> **想一想** 為甚麼需要 $a+b\neq 0$？

若 $a+b=0$，則 X 就是原點本身。這時根本沒有直線 OX，也就談不上垂直。在代數上，這對應於 $k=0$ 的情況，此時 x 的輻角沒有定義。

第 (iii) 部分

設 $h=a+b+c$，則

$$h-a=b+c.$$

複數 $h-a$ 表示向量 $\overrightarrow{AH}$。分兩種情況。

- 若 $b+c=0$，則 $h-a=0$，故 $h=a$。
- 若 $b+c\neq 0$，則對單位圓上的相異兩點 B 和 C 應用第 (ii) 部分，可知由 $b+c$ 表示的向量垂直於 BC。這個向量正是 $\overrightarrow{AH}$，所以 AH 垂直於 BC。（此時 $H\neq A$，故 AH 確實是一條直線。）

所以 $h=a$ 或 $AH\perp BC$，即為所求。由對稱性，BH 與 CA、CH 與 AB 亦有同樣結論，所以 H 確實位於三條高（altitude）上。$h=a$ 的情況就是 BC 為直徑的時候：三角形在 A 處是直角，其垂心（orthocentre）就是頂點 A。

第 (iv) 部分

根據垂心的定義，

$$p=a+b+c, \qquad q=b+c+d, \qquad r=c+d+a, \qquad s=d+a+b.$$

AQ 的中點是

$$\tfrac{1}{2}(a+q)=\tfrac{1}{2}(a+b+c+d).$$

這個式子對 a, b, c, d 是對稱的，所以它同時也是 BR、CS 及 DP 的中點：

$$\tfrac{1}{2}(b+r) = \tfrac{1}{2}(c+s) = \tfrac{1}{2}(d+p) = \tfrac{1}{2}(a+b+c+d).$$

設 M 為由 $m = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ 表示的點。那麼

$$q = 2m - a, \qquad r = 2m - b, \qquad s = 2m - c, \qquad p = 2m - d.$$

所以單一個映射

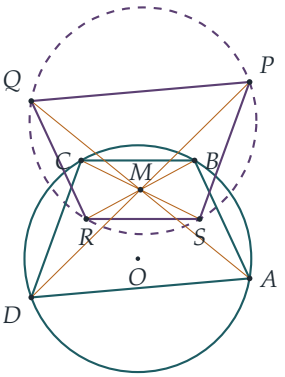
$$T : w \longmapsto 2m - w$$

把 $A \mapsto Q$、$B \mapsto R$、$C \mapsto S$ 及 $D \mapsto P$。因此它把四邊形 $ABCD$ 逐個頂點地映射到 $QRSP$。

要描述 T，可把它寫成 $T(w) - m = -(w - m)$。相對於 M 的位移被反向，也就是以 M 為中心乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$。所以

T 是繞複數爲 $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ 的點 M 旋轉（*rotation*）180°（即半周旋轉）。

等價地說，T 是關於點 M 的點反射（point reflection）。特別地，$QRSP$ 與 $ABCD$ 全等（congruent），而且由於旋轉保持定向，Q, R, S, P 同樣按逆時針方向排列。四個垂心都位於以複數 $a+b+c+d$ 所表示的點為圓心的單位圓上，這個圓就是經過 A, B, C, D 的圓的像。



驗算

- 第 (i) 部分：取 $\theta = 0$、$\phi = \frac{1}{2}\pi$，得 $z = (1+\mathrm{i})/(1-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$，而 $\mathrm{i}\cot\frac{1}{4}\pi = \mathrm{i}$。所以 $|z| = 1$ 且 $\arg z = \frac{1}{2}\pi$。
- 第 (iv) 部分：取 $a = 1$、$b = \mathrm{i}$、$c = -1$、$d = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$。則 $m = 0.3 + 0.1\mathrm{i}$，而 $q = b + c + d = -0.4 + 0.2\mathrm{i}$，正如所言等於 $2m - a$。對於正方形 $(a, b, c, d = 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i})$，得 $m = 0$，而 Q, R, S, P 恰好就是 C, D, A, B：半周旋轉的中心是 O。
- 四個部分亦已用電腦在圓上數以千計的隨機點上驗證過。

常見錯誤

- 只答 $\arg z = \frac{1}{2}\pi$。餘切的正負號決定答案是 $\pm\frac{1}{2}\pi$ 中的哪一個，而 $z = 0$ 則沒有輻角。
- 在第 (iv) 部分把頂點的對應次序弄錯。A 對應的是 Q，不是 P：與每個頂點相對的垂心，是不包含該頂點的那個三角形的垂心。
- 把映射描述為「一個旋轉」卻沒有說明中心和角度，或描述為「比例因子為 -1 的放大（enlargement）」卻沒有說明中心。兩種描述都可以，但都必須包含齊兩項資料。

STEP 之外

簡潔的公式 $h = a + b + c$（外心（circumcentre）位於原點時）是一整套複數幾何手法的起點。例如，形心（centroid）是 $\frac{1}{3}(a + b + c)$，所以 O、形心與 H 共線，這條直線就是歐拉線（Euler line）。第 (iv) 部分是同一故事在圓內接四邊形（cyclic quadrilateral）上的一個小片段。Tristan Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）全書都把複數乘法看作旋轉與縮放，是極佳的下一步讀物。

詳細解答

STEP III 2021，第 8 題

純數學 • 遞推關係與極限

STEP III 2021，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 2.8 節平方再減二中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/squaring-minus-two.html

關鍵思路

一切都建基於把遞推關係（recurrence）因式分解（factorise）。兩邊減去 2，得 $x_{n+1} - 2 = (x_n - 2)(x_n + 2)$，所以一旦各項都大於 2，它們與 2 的距離在每一步都會被乘以一個大於 4 的數。由此得到第 (i) 部分，第 (ii) 部分亦隨之而來。至於第 (iii) 部分，從 x_{n+1}^2 減去 4 同樣可以漂亮地因式分解，而正正是這一點令乘積 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 可以逐項相消（telescope）。

解答

第 (i) 部分

我們對 n 使用數學歸納法（induction）。當 $n = 1$ 時，命題變成 $x_1 \geq 2 + 4^0(a-2) = a$，這是成立的，而且取等號（注意 $4^0 = 1$）。

假設對某個 $n \geq 1$ 有 $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$。由於 $a > 2$，右方大於 2，所以 $x_n > 2$。於是

$$x_{n+1} - 2 = x_n^2 - 4 = (x_n - 2)(x_n + 2).$$

這裏 $x_n - 2 > 0$ 而且 $x_n + 2 > 4$，所以 $(x_n - 2)(x_n + 2) \geq 4(x_n - 2)$。利用歸納假設（inductive hypothesis）$x_n - 2 \geq 4^{n-1}(a-2)$，

$$x_{n+1} - 2 \geq 4(x_n - 2) \geq 4 \cdot 4^{n-1}(a-2) = 4^n(a-2),$$

這正是 $n+1$ 時的命題。由歸納法，對所有 $n \geq 1$ 都有 $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$。

我們從來沒有把不等式平方。把 $x_n \geq$ (界) 兩邊平方，只有在兩邊都非負時才成立，而因式分解的形式完全避開了這個顧慮。

第 (ii) 部分

若 $|a| > 2$。此時 $x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$。數列（sequence）$x_2, x_3, \ldots$ 服從同一個遞推關係，而且首項大於 2，所以以 x_2 代替 a（把下標平移一位）應用第 (i) 部分，得

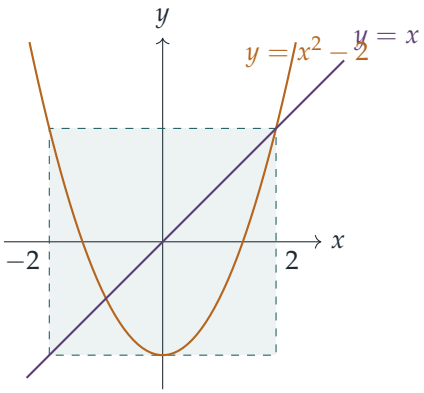
$$x_n \geq 2 + 4^{n-2}(x_2 - 2) \qquad (n \geq 2).$$

由於 $x_2 - 2 > 0$ 而且 $4^{n-2} \to \infty$，得 $x_n \to \infty$。

若 $|a| \leq 2$。我們用歸納法證明對每個 n 都有 $-2 \leq x_n \leq 2$。這在 $n = 1$ 時成立。若 $-2 \leq x_n \leq 2$，則 $0 \leq x_n^2 \leq 4$，所以 $-2 \leq x_n^2 - 2 \leq 2$，即 $-2 \leq x_{n+1} \leq 2$。因此這個數列有界（bounded），不可能趨向無限大。

> **想一想** 在 $|a| \leq 2$ 的情況下，只證明對所有 n 都有 $x_n \leq 2$ 足夠嗎？

不足夠。單有上界並不夠，因為若某一項小於 -2，它的平方便會大於 4，於是下一項就會大於 2。這就是為甚麼歸納過程必須同時帶着兩個界。圖像說明了為何這樣可行：拋物線（parabola）$y = x^2 - 2$ 把區間 $[-2, 2]$ 映射到它自身上。



綜合兩種情況，$x_n \to \infty$ 當且僅當 $|a| > 2$。

第 (iii) 部分

推動這部分一切的因式分解是

$$x_{n+1}^2 - 4 = (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^4 - 4x_n^2 = x_n^2\,(x_n^2 - 4).$$

由於 $a > 2$，第 (i) 部分給出對所有 n 都有 $x_n > 2$，所以 $x_n > 0$ 而且 $x_n^2 - 4 > 0$。取正平方根，

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4}.$$

重複應用這個關係（嚴格來說，是對 n 用歸納法），

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4} = x_n x_{n-1} \sqrt{x_{n-1}^2 - 4} = \cdots = x_1 x_2 \cdots x_n \sqrt{a^2 - 4}.$$

因此，對每個 $n \geq 1$，

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{a^2 - 4}\, x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}},$$

與 y_n 的定義比較，可見所求的公式對所有 n 成立，當且僅當 $A = \sqrt{a^2 - 4}$。

求 a。 $A = \sqrt{a^2 - 4}$ 這個值是必然的。在 $n = 1$ 時，所求的公式變成 $Aa/x_2 = a\sqrt{a^2 - 4}/x_2$，由於 $a > 0$ 而且 $x_2 > 0$，得 $A = \sqrt{a^2 - 4}$。反過來，在 $a > 2$ 之下 $A = \sqrt{a^2 - 4}$ 表示 $A^2 = a^2 - 4$，所以

$$a = \sqrt{A^2 + 4}.$$

這個值確實滿足 $a > 2$，因為 $A > 0$ 給出 $A^2 + 4 > 4$。取這個 a，便有 $\sqrt{a^2 - 4} = A$，而上面列出的恆等式（identity）就變成對所有 $n \geq 1$ 都有 $y_n = \sqrt{x_{n+1}^2 - 4} \,/\, x_{n+1}$，正如所求。

收斂性。 取這個 a 值，由於 $x_{n+1} > 0$，

$$y_n = \frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \sqrt{1 - \frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

由於 $a > 2$，第 (ii) 部分給出 $x_{n+1} \to \infty$，所以 $4/x_{n+1}^2 \to 0$，因而 $y_n \to 1$。第二個數列收斂（converges），其極限（limit）是 1。

驗算

- 取 $A = 1$，則 $a = \sqrt{5} \approx 2.236$。於是 $x_2 = 3$、$x_3 = 7$，而且 $y_1 = \sqrt{5}/3 \approx 0.745$。由公式得 $\sqrt{9-4}/3 = \sqrt{5}/3$，兩者吻合。接着，$y_2 = \sqrt{5} \cdot 3/7 \approx 0.958$，而 $\sqrt{49-4}/7 = 3\sqrt{5}/7$，同樣吻合。$y_3 \approx 0.99909$ 和 $y_4 \approx 0.9999996$ 這兩項正飛快地趨向 1。
- 以 $t > 1$ 作代換 $a = t + 1/t$，可得 $x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}$。這顯示了增長實際上有多快（雙重指數（doubly exponential）增長，遠快於第 (i) 部分的 4^{n-1}），而且與上面每個結果都一致。
- 第 (i) 部分的界和第 (ii) 部分的有界性，亦已用電腦以大量隨機起始值測試過。

常見錯誤

- 未先檢查兩邊是否非負，就把歸納假設中的不等式平方。
- 在第 (ii) 部分，當 $|a| \leq 2$ 時只證明 $x_n \leq 2$。你還需要 $x_n \geq -2$，否則下一項可能跳到 2 以上。
- 倒推求出 a，卻從未確認這個值對所有 n 都適用，並且滿足 $a > 2$。

STEP 之外

映射（map）$x \mapsto x^2 - 2$ 是二次映射族（quadratic family）$x \mapsto x^2 + c$ 中最著名的成員。在 $[-2, 2]$ 上，代入 $x = 2\cos\theta$ 會把它變成倍角映射 $\theta \mapsto 2\theta$，這是混沌動力學（chaotic dynamics）的標準入門例子。在這個區間以外，每條軌道（orbit）都會逃逸到無限大。當 $a > 2$ 時，同樣的想法可用 $x = 2\cosh u$ 實現，而第 (iii) 部分的乘積就是經典的 $\prod \cos(\theta/2^k)$ 逐項相消的雙曲（hyperbolic）版本。想了解這裏的極限和歸納法背後的分析學，可閱讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2021，第 9 題

力學 • 斜碰撞與恢復係數

STEP III 2021，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

幾何部分是在兩個角落三角形 CPQ 和 BRP 中各用一次正弦定理（sine rule）；把兩式相乘時，QR 離 CB 的共同高度會互相抵消。至於反彈，光滑（smooth）的牆會保留沿牆方向的速度分量，並把垂直於牆的分量乘以 e，因此路徑在反彈前後與牆所成的角滿足 $\tan(\text{反彈後}) = e\tan(\text{反彈前})$。每次反彈各給出第一個結果中的一個括號。

解答

幾何恆等式

設 h 為直線 QR 與 BC 的距離。由於 $QR \parallel CB$，三角形 AQR 是等邊三角形，所以 $CQ = BR = h/\sin 60^\circ = 2h/\sqrt{3}$。

在三角形 CPQ 中，C 處的角是 60°，P 處的角是 θ，所以 Q 處的角是 $120^\circ - \theta$。由正弦定理得

$$\frac{CP}{\sin(120^\circ - \theta)} = \frac{CQ}{\sin\theta} \quad\Longrightarrow\quad (a-x)\sin\theta = \frac{2h}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\right).$$

兩邊除以 $\sin\theta$（因 $0 < \theta < 180^\circ$，故非零）並整理，得

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{\sqrt{3}\,(a-x)}{h}.$$

在三角形 BRP 中，B 處的角是 60°，R 處的角是 ϕ，P 處的角是 $120^\circ - \phi$。由正弦定理得

$$\frac{BP}{\sin\phi} = \frac{BR}{\sin(120^\circ - \phi)} \quad\Longrightarrow\quad x\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi + \tfrac{1}{2}\sin\phi\right) = \frac{2h}{\sqrt{3}}\sin\phi,$$

因此

$$\sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{4h}{\sqrt{3}\,x}.$$

把兩個結果相乘，h 和 $\sqrt{3}$ 都抵消掉：

$$(\sqrt{3}\cot\phi + 1)(\sqrt{3}\cot\theta + 1) = \frac{4(a-x)}{x},$$

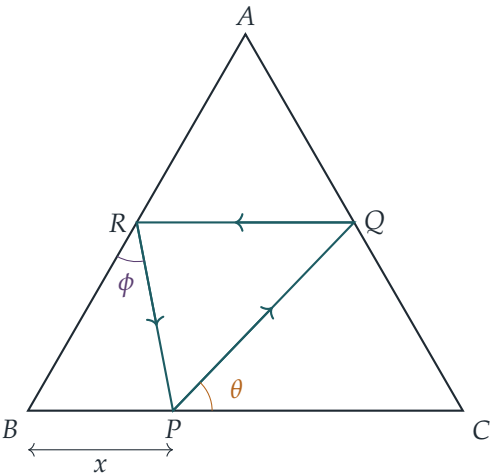
兩邊乘以 x 即得所求的恆等式。

反彈

把球視為在光滑桌面上運動的質點，因此它在兩次碰撞之間沿直線行進；框架亦是光滑的，所以每次碰撞只產生垂直於牆的衝量（impulse）。設球以速率 u、與牆成角 α 撞向牆，並以速率 v、與牆成角 β 離開。沿牆的分量不變，垂直於牆的分量則反向並乘以 e：

$$v\cos\beta = u\cos\alpha, \qquad v\sin\beta = eu\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \tan\beta = e\tan\alpha.$$

球沿牆的運動方向亦保持不變，所以從該方向量度時，α 和 β 都是銳角。（我們需要 $e > 0$，否則第一次碰撞後球便會沿着牆滑行。）



在 Q 點。球沿 PQ 到達，與牆 CA 成角 $\angle PQC = 120^\circ - \theta$，朝 A 方向移動。它沿 QR 離開，與牆成角 $\angle AQR = 60^\circ$（因 $QR \parallel CB$，兩者為同位角（corresponding angles））。所以

$$\tan 60^\circ = e\tan(120^\circ - \theta).$$

利用差角公式及 $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$，再把分子分母同乘以 $\cot\theta$，得

$$\tan(120^\circ - \theta) = \frac{-\sqrt{3} - \tan\theta}{1 - \sqrt{3}\tan\theta} = \frac{\sqrt{3}\cot\theta + 1}{\sqrt{3} - \cot\theta}.$$

記 $c = \sqrt{3}\cot\theta$。反彈條件 $\sqrt{3}(\sqrt{3} - \cot\theta) = e(\sqrt{3}\cot\theta + 1)$ 變成 $3 - c = e(c+1)$，即 $4 - (c+1) = e(c+1)$，所以

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{4}{1+e}.$$

在 R 點。球沿 QR 到達，與牆 AB 成角 $\angle ARQ = 60°$，朝 B 方向移動，然後沿 RP 離開，所成角為 $\angle BRP = \phi$。所以

$$\tan\phi = e\tan 60° = \sqrt{3}e, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{3}\cot\phi = \frac{1}{e}, \qquad \sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{1+e}{e}.$$

求 x。把兩個括號代入恆等式，

$$\frac{1+e}{e}\cdot\frac{4}{1+e}\cdot x = 4(a-x) \quad\Longrightarrow\quad x = e(a-x) \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{ae}{1+e},$$

正如所求。

再繞一圈

想一想 在 P 點必須發生甚麼，球才會再一次沿 PQ 出發？

球沿 RP 到達 P。在三角形 BRP 中，這條路徑與 BC 成角 $\angle RPB = 120° - \phi$，所以只有當這個角是銳角時，球到達時才是朝 C 方向移動。要重走 PQ，球必須以與 PC 成角 θ 離開，因此我們需要

$$\tan\theta = e\tan(120° - \phi).$$

由在 Q 點的計算，$\sqrt{3}\cot\theta = \frac{4}{1+e} - 1 = \frac{3-e}{1+e}$，所以 $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e}$，此值為正：$PQ$ 確實是朝 C 那一側前進。

把在 Q 點用過的同一公式中的 θ 換成 ϕ，並用 $\sqrt{3}\cot\phi = \frac{1}{e}$，得

$$\tan(120° - \phi) = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\cot\phi + 1)}{3 - \sqrt{3}\cot\phi} = \frac{\sqrt{3}\,(1+e)/e}{(3e-1)/e} = \frac{\sqrt{3}(1+e)}{3e-1}.$$

若 $e \le \frac{1}{3}$，則 $120° - \phi \ge 90°$，所以碰撞後球會垂直離開 BC，或折返朝 B 方向移動。這樣它便不可能沿着向 C 傾斜的 PQ 前進。所以 $e > \frac{1}{3}$，而條件變為

$$\frac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e} = \frac{\sqrt{3}\,e(1+e)}{3e-1} \quad\Longleftrightarrow\quad 3e - 1 = 3e - e^2 \quad\Longleftrightarrow\quad e^2 = 1.$$

由於 $e > 0$，得 $e = 1$，正如所求。球的速率在每次碰撞時都會改變（除非 $e = 1$），但速率在這裏毫不相干：重要的只是方向。

驗算

- 當 $e = 1$：$x = \frac{a}{2}$ 且 $\tan\theta = \tan\phi = \sqrt{3}$，所以 $\theta = \phi = 60°$，而 PQR 是連接各邊中點的三角形。由對稱性，這是一條閉合的完全彈性軌道，與預期相符。
- 取 $a = 1$、$e = \frac{1}{2}$：$x = \frac{1}{3}$ 且 $\theta \approx 46.10°$。用電腦逐步模擬球經過三次碰撞，它會準確地回到 P。下一次碰撞後，它以與 BC 約成 $68.95°$ 的角離開，而不是 $46.10°$，所以不會再繞 PQR 一圈。
- 當 $e \to 0$，$x \to 0$：P 滑向角落 B。這與球在每道牆上幾乎失去全部垂直於牆的速度相吻合。

常見錯誤

- 把 e 乘到整個速度上，或乘到沿牆的分量上。只有垂直於光滑牆的分量會改變。
- 從法線量度入射角，卻使用 $\tan\beta = e\tan\alpha$；這條式只適用於從牆量度的角。若從法線量度，定律應為 $\cot\beta = e\cot\alpha$。
- 在最後一部分，忘記 $120° - \phi$ 可能是鈍角，或忘記必須捨去 $e = -1$。

STEP 之外

球在一個區域內反彈的路徑，是數學撞球（mathematical billiards）的研究對象。當 $e = 1$ 時，連接各邊中點的三角形就是法尼亞諾（Fagnano）軌道。在任何銳角三角形中，這條軌道連接三條高的垂足，而且它是周長最短的內接三角形（inscribed triangle）。當 $e < 1$ 時，每次反彈都會使路徑向牆壓平；正如我們在這裏發現的，球無法重複一條閉合路線。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對衝量和碰撞有仔細的討論。至於撞球問題本身，Tabachnikov 的 *Geometry and Billiards*（《幾何與撞球》）是很好的下一步。

詳細解答

STEP III 2021，第 10 題

力學 • 纏繞繩的運動

> **STEP III 2021，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

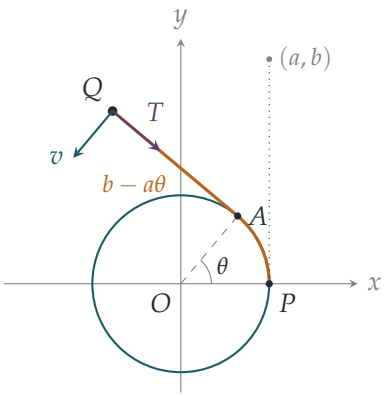
關鍵思路

用繩子直線部分轉過的角度 θ 來描述一切。繩子沿切線（tangent）離開圓柱（cylinder），所以質點的位置等於切點加上一個長度為 $b - a\theta$ 的切向量。求導後可見質點的速度永遠與繩子垂直，因此張力（tension）不做功（work），速率始終不變。在每一瞬間，質點都在一個以繩子離開圓柱之點為圓心的圓上運動，而張力提供所需的向心力（centripetal force）。

解答

我們把質點視為在光滑（smooth）水平桌面上運動的一點，因此它所受的唯一水平力就是輕而不可伸長的繩（light inextensible string）中的張力 T（重量由桌面的法向反作用力（normal reaction）平衡）。整個過程中繩子都保持拉緊。

要令繩子繞到圓柱上，衝量（impulse）必須使質點從 (a, b) 沿 x 負方向出發，於是繩子按逆時針（anticlockwise）方向轉動。設 A 為時刻 t 時繩子直線部分離開圓柱之點。



第 (i) 部分

由於通往 P 的半徑已轉過 θ，點 A 為 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$。繞在圓柱上的繩長就是弧 PA，長度為 $a\theta$，所以直線部分的長度為 $b-a\theta$。它沿着 A 點的切線、朝 θ 增大的方向伸出，即單位向量（unit vector）$(-\sin\theta, \cos\theta)$ 的方向。（當 $\theta = 0$ 時這向量是 $(0,1)$，與初始位置 (a,b) 吻合。）因此質點位於

$$x = a\cos\theta - (b-a\theta)\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta + (b-a\theta)\cos\theta.$$

利用積法則（product rule）及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b-a\theta) = -a\dot{\theta}$，對 t 求導，得

$$\dot{x} = -a\dot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta}\sin\theta - (b-a\theta)\dot{\theta}\cos\theta = -(b-a\theta)\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$\dot{y} = a\dot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}\cos\theta - (b-a\theta)\dot{\theta}\sin\theta = -(b-a\theta)\dot{\theta}\sin\theta.$$

因此 $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (b-a\theta)^2\dot{\theta}^2$；又因 $b - a\theta > 0$ 且 $\dot{\theta} > 0$（繩子正在繞上去），速率為

$$v = (b-a\theta)\dot{\theta}.$$

第 (ii) 部分

> ? **想一想** 為甚麼速率應該一直等於 u？繩子明明一直在拉着質點。

由第 (i) 部分，速度為 $-(b-a\theta)\dot{\theta}\,(\cos\theta, \sin\theta)$，與半徑 OA 平行，因此與方向為 $(-\sin\theta, \cos\theta)$ 的繩子垂直。張力沿繩子作用，所以它做功的速率 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}$ 在每一瞬間都是零。沒有其他水平力作用，所以動能（kinetic energy）以至速率都保持不變。初始速率為 u，故

$$\dot{\theta}\,(b-a\theta) = u,$$

即為所求。

第 (iii) 部分

由 (ii)，速度為 $\mathbf{v} = -u(\cos\theta, \sin\theta)$，其中 u 為常數，所以加速度為

$$\dot{\mathbf{v}} = -u\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta).$$

它的大小為 $u\dot{\theta}$，方向由質點指向 A，恰好沿着繩子。（等價地說：在每一瞬間，質點以速率 u 繞 A 在半徑為 $b - a\theta$ 的圓上運動，所以它的加速度是指向 A 的 $u^2/(b - a\theta)$。）沿繩子方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$T = mu\dot{\theta} = \frac{mu^2}{b - a\theta}.$$

餘下要做的是把 $b - a\theta$ 以 t 表示。將 (ii) 對 t 積分，並利用 $t = 0$ 時 $\theta = 0$，得

$$b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = ut.$$

於是

$$(b - a\theta)^2 = b^2 - 2a\left(b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2\right) = b^2 - 2aut,$$

又因 $b - a\theta > 0$，我們取正根，$b - a\theta = \sqrt{b^2 - 2aut}$。因此

$$T = \frac{mu^2}{\sqrt{b^2 - 2aut}},$$

即為所求。

驗算

- 當 $t = 0$ 時張力為 mu^2/b：質點起初以速率 u 繞 P 在半徑為 b 的圓上運動，與預期一致。
- 當 $a\theta = b$ 時繩子完全繞上，這發生在 $t = b^2/(2au)$；此時 $b^2 - 2aut = 0$，張力無限增大，因為在速率不變的情況下，瞬時圓的半徑縮小至零。
- 量綱（dimensions）：b^2 和 aut 都是面積，而 mu^2/長度 是力。
- 我們用電腦驗證了結果：對 a、b、u、m 的多組隨機取值，以數值方法逐步模擬運動，並以數值方法對位置求導；速率保持為 u，而量得沿繩方向的力與 $mu^2/\sqrt{b^2 - 2aut}$ 相符，相對誤差約為 3×10^{-5}。

常見錯誤

- 假設繞 O 的角動量（angular momentum）守恆。其實並不守恆：張力沿圓柱的切線作用，而這條切線不經過 O，所以張力對 O 有力矩（moment）。這裏守恆的量是能量。

- 把直線部分的長度當作 b 而非 $b - a\theta$，忘記了已經繞在圓柱上的那段繩子。
- 在計算張力時，把質點路徑的半徑 OQ，而非直線長度 AQ，當作曲率半徑（radius of curvature）。

STEP 之外

繩子從一條曲線上解開(或繞上去)時，繩端描出的路徑稱為漸開線(involute)；圓的漸開線是大多數齒輪齒形的形狀，因為它能令互相嚙合的齒輪平穩地傳遞運動。這道題也展示了大學一年級力學中會遇到的一個普遍原理：與速度垂直的約束力（constraint force）不做功，所以即使動量（momentum）和角動量不守恆，能量仍可以守恆。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這類問題有很好的討論。

詳細解答

STEP III 2021，第 11 題

概率與統計 • 指數分佈

STEP III 2021，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 12.18 節無記憶性中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/memoryless.html

關鍵思路

所有關於 Y 和 Z 的問題，其實都是在問 X 落在哪一個區間（interval）。事件 $Y = n$ 就是 $n \le X < n+1$，而事件 $Z < z$ 可拆成一系列互斥（disjoint）的部分 $n \le X < n+z$，每個 n 對應一部分。指數分佈（exponential distribution）的尾概率（tail probability）$\mathrm{P}(X \ge x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$ 會把每一部分變成一個幾何級數（geometric series）中的項。

解答

全文記 $q = \mathrm{e}^{-\lambda}$；由於 $\lambda > 0$，故 $0 < q < 1$。對 $x \ge 0$，

$$\mathrm{P}(X \ge x) = \int_x^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\lambda x},$$

又因 X 是連續（continuous）隨機變量，對 $0 \le a < b$ 有 $\mathrm{P}(a \le X < b) = \mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$。

第 (i) 部分

Y 是 X 的整數部分（integer part），所以 $Y = n$ 當且僅當 $n \le X < n+1$。因此

$$\mathrm{P}(Y = n) = \mathrm{e}^{-n\lambda} - \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda} = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})\mathrm{e}^{-n\lambda},$$

即為所求。（所以 Y 服從由 0 開始、公比為 q 的幾何分佈（geometric distribution）。）

第 (ii) 部分

$Z = X - Y$ 是 X 的小數部分（fractional part），所以 $0 \leq Z < 1$。取 $0 \leq z \leq 1$。事件 $Z < z$ 發生，當且僅當對整數 $n = Y$ 有 $n \leq X < n + z$。對 $n = 0, 1, 2, \ldots$，這些事件兩兩互斥，所以

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z < z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(n \leq X < n + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-n\lambda} - \mathrm{e}^{-n\lambda - \lambda z}\right) \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-\lambda z}) \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda z}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}, \end{aligned}$$

這裏把幾何級數求和，而因 $0 < q < 1$，該級數收斂（converges）。這就是所求的結果。

第 (iii) 部分

把 (ii) 的分佈函數（distribution function）求導，得 Z 的概率密度（probability density）為

$$g(z) = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \qquad (0 \leq z \leq 1),$$

其餘情況 $g(z) = 0$。取 $u = z$ 及 $\mathrm{d}v = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z$ 進行分部積分（integration by parts），

$$\int_0^1 z\lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z = \left[-z\mathrm{e}^{-\lambda z}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}.$$

除以 $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$，

$$\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda} - 1}.$$

第 (iv) 部分

設 $0 \leq z_1 < z_2 \leq 1$。事件 $\{Y = n \text{ 及} z_1 < Z < z_2\}$ 恰好就是 $n + z_1 < X < n + z_2$，所以

$$\mathrm{P}(Y = n \text{ 及} z_1 < Z < z_2) = \mathrm{e}^{-\lambda(n+z_1)} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+z_2)} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\left(\mathrm{e}^{-\lambda z_1} - \mathrm{e}^{-\lambda z_2}\right).$$

? 想一想 要判斷是否獨立，我們需要拿這個結果跟甚麼比較？

跟乘積 $\mathrm{P}(Y = n)\,\mathrm{P}(z_1 < Z < z_2)$ 比較。由於 Z 是連續的，$\mathrm{P}(Z = z_1) = 0$，故由 (ii)

$$\mathrm{P}(z_1 < Z < z_2) = \mathrm{P}(Z < z_2) - \mathrm{P}(Z < z_1) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda z_1} - \mathrm{e}^{-\lambda z_2}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}.$$

乘以 (i) 中的 $\mathrm{P}(Y = n) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})\mathrm{e}^{-n\lambda}$，因子 $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$ 互相抵消，正好得到上面的聯合概率（joint probability）。所以

$$\mathrm{P}(Y = n \text{ 及} z_1 < Z < z_2) = \mathrm{P}(Y = n)\,\mathrm{P}(z_1 < Z < z_2)$$

對每個非負整數 n 及每個區間 $(z_1, z_2) \subseteq [0,1]$ 都成立。由於 Y 只取非負整數值，而 Z 只取 $[0,1)$ 中的值，這類事件決定了整個聯合分佈。因此 Y 和 Z 是獨立（independent）的：知道 X 落在哪一個單位區間，並不會告訴我們它落在該區間內的哪個位置。

驗算

- 在 (ii) 中代入 $z = 1$，得 $\mathrm{P}(Z < 1) = 1$，理應如此；代入 $z = 0$ 則得 0。
- 當 $\lambda \to 0$ 時，X 的密度在每個單位區間上幾乎是平的，所以 Z 應接近 $[0,1]$ 上的均勻分佈（uniform distribution）。事實上，由 $\mathrm{e}^{\lambda} - 1 = \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \cdots$ 得 $\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}-1} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} + O(\lambda)$，所以 $\mathrm{E}(Z) \to \frac{1}{2}$。當 $\lambda \to \infty$ 時，X 幾乎總是非常小，而 $\mathrm{E}(Z) \to 0$。
- 當 $\lambda = 1$ 時，$\mathrm{E}(Z) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}-1} \approx 0.4180$，這與以電腦模擬 200 000 個 X 值的結果吻合；(iv) 中模擬所得的聯合頻率亦與邊際分佈（marginal distributions）的乘積吻合。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{P}(Z < z) = \mathrm{P}(X < z)$，忘記了 $Z < z$ 可以在每一個單位區間發生，而不只是第一個。
- 只憑一組 n、z_1、z_2 的取值就斷定獨立：因式分解必須對所有取值都成立。

STEP 之外

(iv) 中的獨立性，其實是指數分佈無記憶性（memoryless property）的一個影子：已知 $X \geq n$，無論 n 是多少，超出部分 $X - n$ 仍然服從相同參數的指數分佈。這正是指數分佈用來描述泊松過程（Poisson process）中等候時間的原因，也是它的整數部分服從幾何分佈——即離散的無記憶分佈——的原因。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對這兩種分佈及泊松過程都有詳細闡述。

詳細解答

STEP III 2021，第 12 題

概率與統計 • 和的方差

> **STEP III 2021，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 12.4 節兩兩獨立，卻非相互獨立中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/pairwise-independence.html

關鍵思路

把全隊的得分寫成一些指示型變量（indicator variable）之和，每對球員對應一個變量，然後展開這個和的方差（variance）。一切都取決於兩個不同的球員對之間如何相互影響。如果兩對沒有共同的球員，它們顯然是獨立（independent）的，所以真正要處理的是共有一名球員的兩對。在 (i) 中，這樣的兩對原來是獨立的，所以交叉項消失。在 (iii) 中則不然，而 (ii) 中的恆等式正是計算它們貢獻的工具。

解答

第 (i) 部分

每顆骰子都是公正的，各球員獨立擲骰。不論兩名指定球員中的第一人擲出甚麼，二人擲出相同點數的概率都是 $\frac{1}{6}$。所以

$$\mathrm{P}(X_{12}=1)=\mathrm{P}(X_{23}=1)=\tfrac{1}{6}.$$

$X_{12}=1$ 和 $X_{23}=1$ 同時發生，當且僅當球員 1、2、3 都擲出相同點數，所以

$$\mathrm{P}(X_{12}=1,\ X_{23}=1)=\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36}=\mathrm{P}(X_{12}=1)\,\mathrm{P}(X_{23}=1).$$

從邊際概率（marginal probability）中減去這個值，便得到其餘三格。例如 $\mathrm{P}(X_{12}=1,X_{23}=0)=\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$；同理 $\mathrm{P}(X_{12}=0,X_{23}=1)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$，以及 $\mathrm{P}(X_{12}=0,X_{23}=$

$0) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$。所以聯合分佈（joint distribution）等於邊際分佈的乘積，X_{12} 與 X_{23} 是獨立的。

想一想 為甚麼知道 $X_{12} = 1$ 對 X_{23} 毫無資訊？

已知球員 1 與 2 點數相同，球員 2 的點數在 $\{1, \ldots, 6\}$ 上仍然是均勻分佈（uniform）的，而球員 3 與之相同的概率是 $\frac{1}{6}$，跟之前完全一樣。由於每一面出現的機會均等，共有的那名球員並不帶來任何資訊。

設 $T = \sum_{i<j} X_{ij}$ 為總得分，它是 $N = \binom{n}{2}$ 項之和。每個 X_{ij} 都是參數為 $\frac{1}{6}$ 的伯努利（Bernoulli）變量，所以 $\mathrm{E}(X_{ij}) = \frac{1}{6}$，$\mathrm{Var}(X_{ij}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$。因此

$$\mathrm{E}(T) = \frac{N}{6} = \frac{n(n-1)}{12}.$$

至於方差，任取兩個不同的球員對。如果它們沒有共同球員，它們取決於互不相交的兩組骰子，所以是獨立的。如果它們共有一名球員，那麼把球員重新編號後，由上面的論證可知它們也是獨立的。所以各 X_{ij} 是成對獨立（pairwise independent）的，每個協方差（covariance）都是零，和的方差等於方差之和：

$$\mathrm{Var}(T) = N \cdot \frac{5}{36} = \frac{5n(n-1)}{72}.$$

第 (ii) 部分

設 $S = Y_1 + \cdots + Y_m$。由線性（linearity）得 $\mathrm{E}(S) = 0$，所以 $\mathrm{Var}(S) = \mathrm{E}(S^2) - 0^2 = \mathrm{E}(S^2)$。展開平方，每個 Y_i^2 出現一次，而每個 $i < j$ 的乘積 $Y_i Y_j$ 出現兩次：

$$S^2 = \sum_{i=1}^{m} Y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} Y_i Y_j.$$

取期望值（expectation）並利用線性，便得到所求的公式。

第 (iii) 部分

對兩名球員而言，$\mathrm{P}(\text{擲出相同的偶數}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$，同樣 $\mathrm{P}(\text{擲出相同的奇數}) = \frac{1}{12}$。所以

$$\mathrm{P}(Z_{ij} = 1) = \mathrm{P}(Z_{ij} = -1) = \tfrac{1}{12}, \qquad \mathrm{P}(Z_{ij} = 0) = \tfrac{5}{6}.$$

不獨立。如果 $Z_{12} = 1$ 且 $Z_{23} = -1$，球員 2 的點數便要既是偶數又是奇數。所以

$$\mathrm{P}(Z_{12} = 1,\ Z_{23} = -1) = 0 \neq \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{1}{12} = \mathrm{P}(Z_{12} = 1)\,\mathrm{P}(Z_{23} = -1),$$

因此 Z_{12} 與 Z_{23} 並不獨立。

平均值。由對稱性，$\mathrm{E}(Z_{ij}) = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$，所以總得分 $U = \sum_{i<j} Z_{ij}$ 的平均值為 0。

方差。每個 Z_{ij} 的平均值都是零，所以可以對這 $N = \binom{n}{2}$ 個變量 Z_{ij} 應用 (ii)。我們需要兩類期望值。

- 平方項：Z_{ij}^2 等於 1 當且僅當球員 i 與 j 點數相同，所以 $\mathrm{E}(Z_{ij}^2) = \frac{1}{6}$。
- 兩個不同球員對的乘積。如果兩對沒有共同球員，兩個變量獨立且平均值為零，所以 $\mathrm{E}(Z_{ij}Z_{kl}) = \mathrm{E}(Z_{ij})\,\mathrm{E}(Z_{kl}) = 0$。如果它們共有一名球員，例如 $Z_{12}Z_{23}$，那麼只有當三名球員都擲出相同點數時乘積才非零。這時兩個因子同為 $+1$（偶數）或同為 -1（奇數），所以乘積是 1。因此 $\mathrm{E}(Z_{12}Z_{23}) = \frac{1}{36}$。

想一想 有多少個無序的「球員對之對」恰好共有一名球員？

先以 n 種方法選出共有的球員，再從其餘 $n-1$ 名球員中以 $\binom{n-1}{2}$ 種方法選出他的兩個搭檔。這樣得到 $n\binom{n-1}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ 個這樣的「球員對之對」，每個只計算一次，正是 (ii) 中雙重求和所需要的。

綜合起來，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(U) &= \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{1}{36}\\ &= \frac{n(n-1)}{36}\big(3+(n-2)\big)\\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{36} = \frac{1}{36}n(n^2-1),\end{aligned}$$

得證。

驗算

- 以例子中的擲骰結果 $3,3,3,3,6,6,2$ 為例，配對計數得 $6+1=7$，帶符號計數得 $-6+1=-5$，與題目一致。
- 當 $n=2$ 時只有一對，所以 $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{E}(Z_{12}^2) = \frac{1}{6}$，而公式給出 $\frac{2\cdot3}{36} = \frac{1}{6}$。
- 當 $n=3$ 時，若三顆骰子點數全部相同，則 $U = \pm3$（各自概率為 $\frac{1}{72}$）。否則恰好有一對點數相同，$U = \pm1$，總概率為 $\frac{15}{36}$。所以 $\mathrm{E}(U^2) = 9\cdot\frac{1}{36} + \frac{15}{36} = \frac{2}{3}$，與 $\frac{3\cdot8}{36}$ 相符。以電腦精確列舉 $n \le 6$ 的所有結果，證實了兩個平均值和兩個方差；例如 $n=6$ 時，(i) 得 $\frac{25}{12}$，(iii) 得 $\frac{35}{6}$。

常見錯誤

- 只檢查了一格便聲稱 X_{12} 與 X_{23} 獨立，卻沒有說明為何其他格也隨之成立。對於只取兩個值的變量，其他格確實隨之成立，但要把這一點說出來。

- 在 (iii) 中，忘記了共有一名球員的兩對不論共同點數是偶數還是奇數，貢獻都是 $+\frac{1}{36}$。負號在乘積中互相抵消。
- 數錯有重疊的「球員對之對」的數目，例如用了 $n(n-1)(n-2)$（有序）之後再乘以 2。

STEP 之外

第 (i) 部分是一個經典例子：變量成對獨立，卻並非相互獨立（mutually independent）：若 $X_{12} = X_{23} = 1$，則必然 $X_{13} = 1$。計算方差只需要成對獨立，這個想法應用於隨機化算法（randomised algorithms）和生日問題（birthday problem）之中。第 (iii) 部分展示了當各項相依時，利用協方差計算和的方差的一般方法。兩者在 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）中均有詳細闡述。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2021 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。