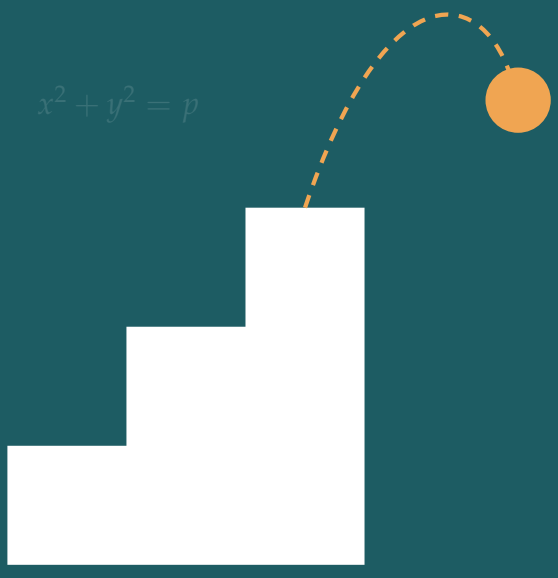
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP II 及 III

2020 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP II 及 III

2020 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2020 年詳細解答

2020 年 STEP 試卷（STEP II 及 III）全部 24 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP II

第 1 題 代換積分法 純數學 . . . 3

第 2 題 可分離變量微分方程 純數學 . . . 7

第 3 題 對數凹數列 純數學 . . . 12

第 4 題 三角不等式 純數學 . . . 16

第 5 題 數字和與整除性 純數學 . . . 20

第 6 題 矩陣的冪與跡 純數學 . . . 23

第 7 題 複數變換 純數學 . . . 27

第 8 題 多項式與積分 純數學 . . . 31

第 9 題 相撞的拋體 力學 . . . 35

第 10 題 能量與平衡 力學 . . . 39

第 11 題 擲硬幣中的游程 概率與統計 . . . 43

第 12 題 不公平骰子的不等式 概率與統計 . . . 47

STEP III

第 1 題 歸約公式 純數學 . . . 50

第 2 題 雙曲函數曲線描繪 純數學 . . . 53

第 3 題 幾何中的複數 純數學 . . . 58

第 4 題 反射矩陣與旋轉矩陣 純數學 . . . 62

第 5 題 部分分式 純數學 . . . 66

第 6 題 極坐標曲線與面積 純數學 . . . 70

第 7 題 二階微分方程 純數學 . . . 75

第 8 題 數列與遞降法 純數學 . . . 78

第 9 題 剛體平衡 力學 . . . 82

第 10 題 簡諧運動 力學 . . . 86

第 11 隨機變量的函數 概率與統計 90
第 12 幾何分佈的獨立性 概率與統計 94

詳細解答

STEP II 2020，第 1 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP II 2020，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

每個被積函數（integrand）都是兩個線性因子的冪的乘積，而且指數之和為 -2。對於這類被積函數，合適的代換（substitution）是兩個線性因子的比（ratio）（或其平方根）：它能一次過吸收兩個括號，剩下的只是一個簡單的冪或標準的反正切（arctangent）。第 (i) 部分利用題目給出的代換展示這個過程，第 (ii) 部分要求你仿效這個技巧，而第 (iii) 部分則要求你自行發現它。

解答

第 (i) 部分

設 $x = \dfrac{1}{1-u}$，則有

$$x - 1 = \frac{1-(1-u)}{1-u} = \frac{u}{1-u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{(1-u)^2}.$$

當 u 取遍 $(0,1)$ 時，x 取遍 $(1,\infty)$，且 $u = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$。由於 $0 < u < 1$，所有根號內的量都是正數，因此

$$x^{3/2}(x-1)^{1/2} = \frac{1}{(1-u)^{3/2}} \cdot \frac{u^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{u^{1/2}}{(1-u)^2}.$$

這時 $(1-u)^2$ 的因子恰好與 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ 互相抵消：

$$\int \frac{1}{x^{3/2}(x-1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-u)^2}{u^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2u^{1/2} + c = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + c.$$

第 (ii) 部分

在第 (i) 部分中，$u = \frac{x-1}{x}$ 正是兩個線性因子之比。這裏我們仿效這個想法，取

$$u = \frac{x-2}{x+1}, \qquad \text{等價地} \qquad x+1 = \frac{3}{1-u}, \quad x-2 = \frac{3u}{1-u},$$

因為 $x-2 = (x+1)-3$。當 $x > 2$ 時，得 $0 < u < 1$，且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \dfrac{3}{(1-u)^2}$。於是

$$(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2} = \frac{3^{3/2}u^{3/2}}{(1-u)^{3/2}} \cdot \frac{3^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{9u^{3/2}}{(1-u)^2},$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(1-u)^2}{9u^{3/2}} \cdot \frac{3}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int u^{-3/2}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{3}u^{-1/2} + c = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + c.\end{aligned}$$

求導可以驗證這個結果。設 $f = \frac{x+1}{x-2}$，則 $f' = -\frac{3}{(x-2)^2}$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\tfrac{2}{3}\sqrt{f}\right) = -\frac{f'}{3\sqrt{f}} = \frac{1}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}.$$

第 (iii) 部分

這次題目沒有給出代換。由於多了一個因子 $x-1$，被積函數並不是某個比的純冪，但兩個平方根與之前屬同一類型。

> **想一想** 前兩個答案都是線性因子之比的平方根。如果把這樣一個平方根取作新變量，會發生甚麼事？

試設

$$t = \sqrt{\frac{x-2}{3x-2}}.$$

當 x 由 2 增加至 ∞ 時，$\frac{x-2}{3x-2} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3(3x-2)}$ 由 0 遞增並趨向 $\frac{1}{3}$，所以 t 由 0 遞增至 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，並且始終有 $0 \le t < \frac{1}{\sqrt{3}}$。由 $t^2(3x-2) = x-2$ 解出 x，得

$$x = \frac{2(1-t^2)}{1-3t^2},$$

其中 $1-3t^2 > 0$。由此，

$$x-1 = \frac{1+t^2}{1-3t^2}, \qquad 3x-2 = \frac{4}{1-3t^2},$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2[-2t(1-3t^2)+6t(1-t^2)]}{(1-3t^2)^2} = \frac{8t}{(1-3t^2)^2}.$$

由於 $\sqrt{x-2} = t\sqrt{3x-2}$，兩個平方根可以整齊地合併：

$$(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2} = t\,(3x-2) = \frac{4t}{1-3t^2}.$$

所以整個分母是

$$(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2} = \frac{4t(1+t^2)}{(1-3t^2)^2},$$

而一切再次與 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 互相抵消：

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2}} &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{(1-3t^2)^2}{4t(1+t^2)} \cdot \frac{8t}{(1-3t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\arctan t\Big]_0^{1/\sqrt{3}} = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3},\end{aligned}$$

此即所求。

原積分在兩端都是反常積分（improper integral），但它是收斂（converge）的。在 $x=2$ 附近，被積函數的表現類似 $\frac{1}{2}(x-2)^{-1/2}$；當 x 很大時，則類似 $\frac{1}{\sqrt{3}}x^{-2}$。代換把它變成一個連續函數在有限區間上的普通積分，因此無需另外取極限。

驗算

- 對 (i) 和 (ii) 的答案求導。就 (i) 而言，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\sqrt{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2} = x^{-3/2}(x-1)^{-1/2}$。
- 正負號：(ii) 的被積函數是正數，所以原函數（antiderivative）必須遞增。事實的確如此，因為當 x 增大時，$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ 遞減並趨向 1。
- 數值驗算：用辛普森法則（Simpson's rule）計算 (i) 中的 $\int_{1.5}^{3}$ 和 (ii) 中的 $\int_{2.5}^{4}$，結果與原函數給出的數值一致（0.47829… 和 0.70974…）。把 (iii) 的積分在 $x=3$ 處分拆後直接計算，得 $1.0471975\ldots = \frac{\pi}{3}$。

常見錯誤

- 在 (iii) 中忘記更改積分上下限。上限是 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$，而不是 ∞；$\frac{\pi}{6}$ 正是由此而來。
- 把 (i) 或 (ii) 的答案寫成 u 的式子，而沒有按題目要求換回 x。
- 處理 $1-u$ 的半次冪時出錯。要小心合併：$(1-u)^{-3/2}(1-u)^{-1/2} = (1-u)^{-2}$。

STEP 之外

由 $\sqrt{(x-a)(x-b)}$ 構成的被積函數，總可以用類似我們的代換化為有理函數。這屬於積分 x 與 $\sqrt{\text{二次式}}$ 的有理函數（rational function）的經典理論（歐拉（Euler）代換）。第 (iii) 部分同時也是一個在無限區間上的反常積分，而用極限來為這類積分賦予意義，是大學一年級分析（analysis）的標準課題。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對反常積分有細緻的處理，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）則收錄了更多這類 STEP 積分題。

詳細解答

STEP II 2020，第 2 題

純數學 • 可分離變量微分方程

> **STEP II 2020，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

這條微分方程（differential equation）可以分離變量（separation of variables）；積分之後，最自然要考察的是乘積 xy，而它原來是 2 的冪。接着利用恆等式（identity）$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$，便可把一切改寫成以和 $s=x+y$ 及差 $d=x-y$ 表示。在這兩個變量下，每條曲線都變成「d^2 等於某個 s 的函數」，而描繪曲線的關鍵，就在於找出該函數在哪裏非負。

解答

第 (i) 部分

先把右方因式分解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1-ky}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{kx-1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

積分得 $\ln|y|-ky=kx-\ln|x|+c$，即

$$\ln|xy|=k(x+y)+c.$$

在兩條曲線上，x 與 y 皆同號，所以 $|xy|=xy$。由於 $k=\ln 2$，取指數得 $xy=A\,2^{x+y}$，其中 A 為正常數。

曲線 C_1。在 $(1,1)$ 處得 $1=4A$，所以 $A=\frac{1}{4}$，且 $4xy=2^{x+y}$。又 $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$，故

$$(x-y)^2=(x+y)^2-2^{x+y},$$

其中 $x,y>0$。這就是所求的結果。

曲線 C_2。在 $(-1,-1)$ 處得 $1 = A \cdot 2^{-2}$，所以 $A = 4$，且 $4xy = 16 \cdot 2^{x+y} = 2^{x+y+4}$。因此

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 2^{x+y+4},$$

其中 $x, y < 0$。

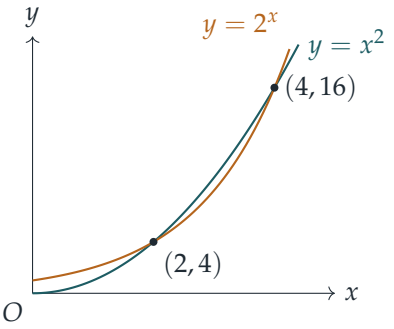
對稱性。把 x 與 y 互換，$x+y$ 不變，$(x-y)^2 = (y-x)^2$ 亦不變，所以每條方程都不變。符號條件（$x, y > 0$ 或 $x, y < 0$）同樣不變。因此只要 (a, b) 在曲線上，它關於 $y = x$ 的反射點 (b, a) 也在曲線上。故 $y = x$ 是每條曲線的對稱軸（line of symmetry）。

第 (ii) 部分

當 $x \geq 0$ 時，曲線 $y = x^2$ 與 $y = 2^x$ 相交於 $(2,4)$ 及 $(4,16)$，而且只有這兩個交點。要說明這一點，可比較對數：設 $x > 0$ 時 $g(x) = 2\ln x - x\ln 2$。則 $g'(x) = \frac{2}{x} - \ln 2$，所以 g 在 $x = 2/\ln 2$ 之前遞增，之後遞減。因此 g 至多有兩個零點，而 $g(2) = g(4) = 0$。故

$$x^2 \geq 2^x \iff 2 \leq x \leq 4 \qquad (x > 0),$$

而在 $[0,2)$ 及 $(4,\infty)$ 上，2^x 位於 x^2 之上。



現在取 C_1 上一點，並設 $s = x + y > 0$。C_1 方程的左方是一個平方，所以

$$s^2 - 2^s = (x-y)^2 \geq 0, \qquad \text{即} \qquad s^2 \geq 2^s.$$

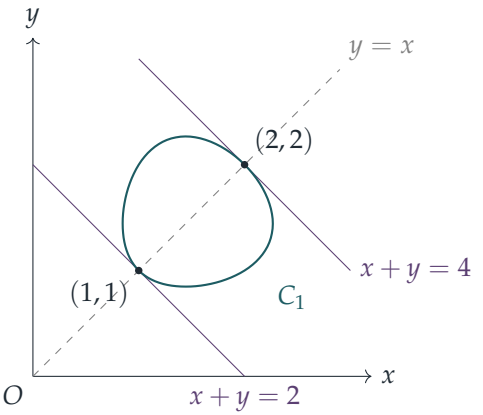
由上圖可見，這迫使 $2 \leq s \leq 4$。所以 C_1 位於直線 $x + y = 2$ 與 $x + y = 4$ 之間。

? **想一想** $[2,4]$ 中每一個 s 值是否真的都能取到？曲線在兩端又是甚麼樣子？

對每個 $s \in [2,4]$，設 $d = \pm\sqrt{s^2 - 2^s}$，以及 $x = \frac{1}{2}(s+d)$、$y = \frac{1}{2}(s-d)$。由於 $2^s > 0$，有 $|d| < s$，所以 x 與 y 皆為正。因此每個這樣的 s 都對應 C_1 上的點，當 $2 < s < 4$ 時更對應兩點。所以這條曲線是一個閉環：

- 當 $s = 2$ 及 $s = 4$ 時 $d = 0$，得出 $y = x$ 上的點 $(1,1)$ 及 $(2,2)$。兩點都滿足 $kxy - y = -(x - kxy)$，所以該處的斜率 (gradient) 為 -1。閉環在這兩點分別與直線 $x + y = 2$ 及 $x + y = 4$ 相切。
- 在 $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$ 處斜率為 0，在 $y = 1/\ln 2$ 處斜率為無窮大。在 $x = 1/\ln 2$ 處，閉環上有 $y \approx 0.85$（最低點）及 $y \approx 2.27$（最高點）。
- 它橫跨 $y = x$ 的最大寬度出現在 $s^2 - 2^s$ 取最大值之處，即 $s \approx 3.21$，此時 $|d| \approx 1.02$。

這個閉環是一個卵形，關於 $y = x$ 對稱，夾在兩條直線之間：



第 (iii) 部分

現在 $s = x + y < 0$。設 $t = -s > 0$。與之前一樣，我們需要

$$s^2 \geq 2^{s+4} \iff t^2 \geq 2^{4-t} \iff t^2 2^t \geq 16.$$

函數 $t^2 2^t$ 在 $t > 0$ 時遞增，且在 $t = 2$ 時等於 16。所以條件是 $t \geq 2$，即 $x + y \leq -2$。(等價地，在 $x < 0$ 時描繪 $y = x^2$ 與 $y = 2^{x+4}$，只有當 $x \leq -2$ 時拋物線才在上方。) 對每個 $s \leq -2$，用與 (ii) 相同的構造可得兩個滿足 $x, y < 0$ 的點，唯獨 $s = -2$ 只給出單一點 $(-1,-1)$。所以這次 C_2 是無界的：

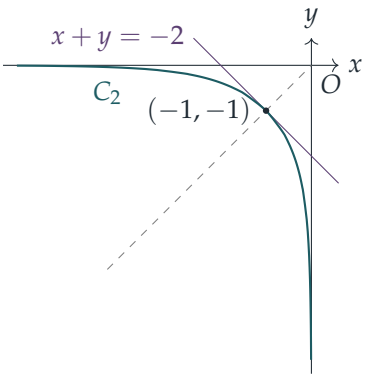
- 它只在 $(-1,-1)$ 與 $y = x$ 相交，該處斜率同樣是 -1，所以它在該點與直線 $x + y = -2$ 相切。
- 當 $x, y < 0$ 時，$kx - 1 < 0$ 且 $1 - ky > 0$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} < 0,$$

因為分子為正而分母為負。所以隨着 x 增加，y 持續遞減。

- 由 $xy = 4 \cdot 2^{x+y}$：當 $x \to -\infty$ 時，乘積 xy 趨向 0，所以 $y \to 0^-$（事實上 $y \approx 4 \cdot 2^x / x$）。由對稱性，當 $x \to 0^-$ 時 $y \to -\infty$。負半軸都是漸近線（asymptote）。

所以 C_2 看起來像第三象限中直角雙曲線（rectangular hyperbola）的一支，但它貼近坐標軸的程度緊密得多：



驗算

- 對 $4xy = 2^{x+y}$ 作隱函數求導（implicit differentiation）：$4y + 4xy' = k\,2^{x+y}(1 + y') = 4kxy(1 + y')$。整理後得 $y' = \dfrac{kxy - y}{x - kxy}$，正是原方程。$C_2$ 的情況同樣成立。
- $(2,2)$ 在 C_1 上：$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 2^4$。在 C_2 上，滿足 $x + y = -4$ 的點約為 $(-3.936, -0.064)$，此時 $xy \approx 0.252$，而 $4 \cdot 2^{-4} = 0.25$。上文所引卵形的極端點已用電腦核實。

常見錯誤

- 積分 $1/x$ 和 $1/y$ 時忘記加上絕對值符號（modulus）。對 C_2 而言這一點很重要，常數應得 $A = 4$，而不是 $\frac{1}{4}$。
- 只證明 $(x+y)^2 \geq 2^{x+y}$ 便停下來。你還必須解釋為何這把 $x + y$ 限制在 $[2, 4]$ 之內，而這正是 x^2 與 2^x 的比較圖派上用場之處。
- 把 C_2 畫成穿過坐標軸。在 C_2 上兩個坐標都保持為負，而坐標軸是漸近線。

STEP 之外

把坐標轉換為 $s = x + y$、$d = x - y$，可將一條對稱的方程化為「$d^2 = f(s)$」。曲線恰好存在於 $f(s) \geq 0$ 之處：若該集合是有界區間，曲線便是閉環；若是半直線，曲線便是

無界的。同樣的推理可以從守恆量（conserved quantity）描繪相圖（phase portrait）：$\ln(xy) - k(x+y)$ 沿每條解都是常數，正如 Lotka–Volterra 捕食者—獵物方程（predator–prey equations）中的能量一樣；該方程的軌道也正因同樣的理由而是閉環。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵蓋了這兩個概念。

詳細解答

STEP II 2020，第 3 題

純數學 • 對數凹數列

> **STEP II 2020，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

性質 L 表示每個比值 u_{r+1}/u_r 都不大於前一個比值，所以數列一旦停止上升，就不可能再次上升。這正是單峯性（unimodality）。在第 (ii) 部分，遞推關係（recurrence）的輔助方程（auxiliary equation）有重根（repeated root）α，而組合 $u_r - \alpha u_{r-1}$ 把它化為一個簡單的等比數列（geometric sequence）。其餘一切都由這一個代換推出。

解答

第 (i) 部分

假設數列具有性質 L，且 $u_{r-1} \geq u_r$，其中 $2 \leq r \leq n-1$。由於 $u_{r-1} > 0$，我們可以把性質 L 兩邊除以它：

$$u_{r+1} \leq \frac{u_r^2}{u_{r-1}} = u_r \cdot \frac{u_r}{u_{r-1}} \leq u_r,$$

最後一步用到 $u_r/u_{r-1} \leq 1$ 及 $u_r > 0$。因此 $u_{r-1} \geq u_r \implies u_r \geq u_{r+1}$。

現在考慮任何具有性質 L 的數列。若 $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n$，則它是單峯的，且 $k = n$。否則，存在第一個指標 k 使得 $u_k > u_{k+1}$（故 $k \leq n-1$）。由 k 的選取，

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_k.$$

由於 $u_k \geq u_{k+1}$，剛才證明的蘊涵（取 $r = k+1$）給出 $u_{k+1} \geq u_{k+2}$；再取 $r = k+2$ 應用一次，得 $u_{k+2} \geq u_{k+3}$，如此以歸納法（induction）一直推至 $u_{n-1} \geq u_n$。因此 $u_k \geq u_{k+1} \geq \cdots \geq u_n$，數列是單峯的。

第 (ii) 部分

對 $2 \le r \le n$，記 $v_r = u_r - \alpha u_{r-1}$。對 $3 \le r \le n$，遞推關係給出

$$v_r = 2\alpha u_{r-1} - \alpha^2 u_{r-2} - \alpha u_{r-1} = \alpha\left(u_{r-1} - \alpha u_{r-2}\right) = \alpha v_{r-1}.$$

所以 (v_r) 是公比為 α 的等比數列，且 $v_r = \alpha^{r-2} v_2$，即

$$u_r - \alpha u_{r-1} = \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) \qquad (2 \le r \le n).$$

（當 $r = 2$ 時此式顯然成立，而 r 每增加一，兩邊都乘以 α。）

對 $2 \le r \le n-1$，我們有 $3 \le r+1 \le n$，因此可以代入 $u_{r+1} = 2\alpha u_r - \alpha^2 u_{r-1}$：

$$u_r^2 - u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - 2\alpha u_r u_{r-1} + \alpha^2 u_{r-1}^2 = (u_r - \alpha u_{r-1})^2.$$

正數且單峯。 假設 $u_2 > \alpha u_1 > 0$。由於 $\alpha > 0$，這給出 $u_1 > 0$，而 $u_2 > 0$ 亦成立。至於之後的項，第一個恆等式給出

$$u_r = \alpha u_{r-1} + \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) > \alpha u_{r-1},$$

因為 $\alpha^{r-2} > 0$ 及 $u_2 - \alpha u_1 > 0$。所以若 $u_{r-1} > 0$，則 $u_r > 0$；由歸納法，每一項都是正數。現在第二個恆等式給出：對 $2 \le r \le n-1$，$u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - (u_r - \alpha u_{r-1})^2 \le u_r^2$。這就是正項數列的性質 L，所以由第 (i) 部分，數列是單峯的。

$u_1 = 1$、$u_2 = 2$ 的情況。 設 $w_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$。則 $w_1 = 1 = u_1$ 及 $w_2 = 2 = u_2$。在這些初始值下，第一個恆等式寫成

$$u_r = \alpha u_{r-1} + (2-\alpha)\alpha^{r-2}.$$

假設對某個滿足 $3 \le r \le n$ 的 r，有 $u_{r-1} = w_{r-1}$。那麼

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha\left[(3-r)\alpha^{r-2} + 2(r-2)\alpha^{r-3}\right] + 2\alpha^{r-2} - \alpha^{r-1} \\ &= (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2} = w_r, \end{aligned}$$

所以由歸納法，對 $1 \le r \le n$，$u_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$。（我們同樣可以用原來的遞推關係進行兩步歸納；但一階的形式較快捷。）

$\alpha = 1 - \frac{1}{N}$ 時的最大值。 此時 $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$，所以 $u_2 = 2 > \alpha = \alpha u_1 > 0$，由上面的推導，數列是正數且單峯的。要找出峯值，可考察相鄰項之差。由 $u_{r+1} = \alpha u_r + (2-\alpha)\alpha^{r-1}$ 及 $\alpha - 1 = -\frac{1}{N}$，

$$u_{r+1} - u_r = (2-\alpha)\alpha^{r-1} - \frac{u_r}{N} = \frac{\alpha^{r-2}}{N}\Big[N\alpha(2-\alpha) - (2-r)\alpha - 2(r-1)\Big].$$

由於 $N\alpha = N-1$ 及 $2-\alpha = \frac{N+1}{N}$，所以 $N\alpha(2-\alpha) = N - \frac{1}{N}$，而 $(2-r)\alpha = 2-r-\frac{2-r}{N}$。方括號化簡為

$$N - \frac{1}{N} - 2 + r + \frac{2-r}{N} - 2r + 2 = (N-r) - \frac{r-1}{N} = \frac{N^2+1-r(N+1)}{N},$$

因此

$$u_{r+1} - u_r = \frac{\alpha^{r-2}}{N^2}\Big(N^2+1-r(N+1)\Big).$$

> ? **想一想** $N^2+1-r(N+1)$ 究竟在哪裏變號？它有可能等於零嗎？

它只在 $r = \dfrac{N^2+1}{N+1} = N-1+\dfrac{2}{N+1}$ 時為零。由於 $N \geq 2$，我們有 $0 < \frac{2}{N+1} < 1$，所以這個值嚴格介乎整數 $N-1$ 與 N 之間。由於 $\alpha^{r-2} > 0$：

- 當 $r \leq N-1$ 時，$u_{r+1} > u_r$；
- 當 $r \geq N$ 時，$u_{r+1} < u_r$。

因此 $u_1 < u_2 < \cdots < u_N$ 且 $u_N > u_{N+1} > \cdots > u_n$。由於 $N \leq n$，項 u_N 存在，而 u_r 在 $r = N$ 時取最大值（嚴格最大，沒有並列）。

驗算

取 $N = 5$，則 $\alpha = \frac{4}{5}$。遞推關係給出 1, 2, 2.56, 2.816, 2.8672, 2.78528, 2.62144, …，在 $r = 5$ 升至峯值，之後下降，與所述相符。差的公式預測 $u_6 - u_5 = \alpha^3(26-30)/25 = -0.08192$，結果吻合。此外，$u_3 = 2\alpha \cdot 2 - \alpha^2 = 2.56$ 與閉合形式 $-\alpha^2 + 4\alpha$ 一致。這些恆等式及峯值位置亦已用電腦以精確算術，就多組 α、u_1、u_2 的值及 N 直至 29 驗證過。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分除以 u_{r-1} 時，沒有指出它是正數。對於含負項的數列，這個論證並不成立。
- 在第 (ii) 部分引用第 (i) 部分之前，忘記證明各項為正數，而第 (i) 部分需要正性。
- 只證明 $u_{N+1} < u_N$ 及 $u_{N-1} < u_N$。由於單峯性，這已經足夠，但你必須說明這一點；較簡潔的做法是找出每一個差的正負號。

STEP 之外

性質 L 稱為對數凹性（log-concavity）：$\ln u_r$ 是 r 的凹函數（concave function）。對數凹數列在組合數學和概率中隨處可見。二項式係數（binomial coefficients）$\binom{n}{r}$ 就是一個例子，而牛頓（Newton）不等式指出，只有實根的多項式，其係數是對數凹的。第 (ii) 部分的遞推關係是一個帶重根的線性遞推關係，這就是為甚麼解具有 $(A+Br)\alpha^r$ 的形式，正如微分方程（differential equations）出現重根時會得到 $(A+Bx)\mathrm{e}^{\alpha x}$。關於這種類比在微分方程方面的內容，可參閱 Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）；至於同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）。

詳細解答

STEP II 2020，第 4 題

純數學 • 三角不等式

STEP II 2020，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

一切都建基於三角不等式（triangle inequality）：每條邊都嚴格短於另外兩條邊之和。事實上，只需檢查一條不等式，就是關於最長邊的那一條，因為另外兩條會自動成立。至於逆命題（converse），可以用圓規把三角形畫出來：先畫下一條邊，再從它的兩個端點各畫一個圓。

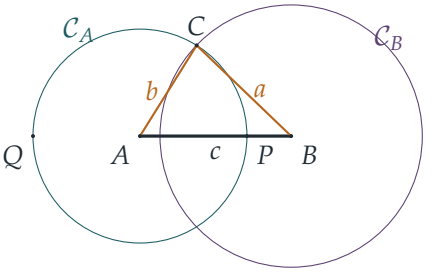
解答

第 (i) 部分

把頂點記為 A、B、C，其中 $BC = a$、$CA = b$、$AB = c$。直線段 AB 是由 A 到 B 的最短路徑，所以長度為 $b + a$ 的路徑 $A \to C \to B$ 至少是 c。它不可能等於 c：這只會在 C 位於線段 AB 上時發生，而那時根本沒有三角形。因此 $c < a + b$。對另外兩對頂點用同樣的論證，便得到 $a < b + c$ 及 $b < a + c$。

第 (ii) 部分

畫一條長度為 c 的線段 AB。以 A 為圓心、b 為半徑畫圓 $\mathcal{C}_A$，再以 B 為圓心、a 為半徑畫圓 $\mathcal{C}_B$。若兩圓相交於直線 AB 以外的一點 C，則 ABC 是一個三角形，且 $CA = b$、$CB = a$、$AB = c$。



為甚麼兩圓必定相交？設 P 和 Q 為 $\mathcal{C}_A$ 與直線 AB 的交點，其中 P 與 B 位於 A 的同一側。那麼

$$PB = |c-b|, \qquad QB = c+b.$$

由於 $c-b<a$ 和 $b-c<a$ 正是已知不等式中的兩條，所以 $|c-b|<a$；而 $c+b>a$ 就是第三條。因此，當一點沿 $\mathcal{C}_A$ 的上半圓由 P 移動到 Q 時，它與 B 的距離會連續（continuously）地由一個小於 a 的值變成一個大於 a 的值，所以在某處必定等於 a。這一點同時位於兩個圓上，而且不在直線 AB 上，因為 $\mathcal{C}_A$ 在該直線上的點只有 P 和 Q，而它們與 B 的距離都不是 a。這就是所求的點 C，所以邊長為 a、b、c 的三角形存在。

第 (iii) 部分

第 (i) 和第 (ii) 部分合起來說明：三個正數是某三角形的三邊，當且僅當每一個都小於另外兩個之和。記三者中最大的為 ℓ。若 ℓ 小於另外兩個之和，則另外兩條不等式立即成立，因為較小的每個數都不超過 ℓ，而餘下的那個數是正數。所以我們只需檢驗最長的長度。

(A) 必然成立。 三個長度都是正數。利用 $c<a+b$，

$$c+1<a+b+1<(a+1)+(b+1),$$

另外兩條不等式同理可得。

(B) 有時成立，但並非必然。 對於等邊三角形（equilateral triangle），三個長度是 $1,1,1$，確實能組成三角形。但取 $a=b=1$ 及 $c=\frac{1}{10}$，由於 $1<1+\frac{1}{10}$，這是一個真正的三角形。三個長度變成 1、10、$\frac{1}{10}$，而 $10>1+\frac{1}{10}$，所以不可能組成三角形。

(C) 永不成立。 三個長度關於 a、b、c 對稱（symmetric），所以可以適當標記，使 $a\geq b\geq c$。那麼

$$|c-a| = a-c = (a-b)+(b-c) = |a-b|+|b-c|.$$

最大的長度等於另外兩個之和，所以嚴格不等式不成立。（若 a,b,c 中有兩個相等，則其中一個長度為 0，同樣不成立。）

(D) 必然成立。 把 a、b、c 中任意兩個互換，集合 $\{a^2+bc,\ b^2+ca,\ c^2+ab\}$ 都不變。（例如互換 a 和 b，得到 b^2+ac、a^2+cb、c^2+ba。）所以只需對每個三角形證明三條不等式中的一條，例如 $a^2+bc<(b^2+ca)+(c^2+ab)$。兩者之差為

$$\begin{aligned}(b^2+ca)+(c^2+ab)-(a^2+bc) &= (b^2-bc+c^2)+a(b+c)-a^2\\ &= \left(b-\tfrac{1}{2}c\right)^2+\tfrac{3}{4}c^2+a(b+c-a).\end{aligned}$$

由於 $c>0$，第一個括號是正數；又由於 $a>0$ 且 $a<b+c$，所以 $a(b+c-a)>0$。因此兩者之差為正數。另外兩條不等式經重新標記即可得出，而三個長度顯然都是正數，所以它們必然能組成三角形。

第 (iv) 部分

a、b、c 的角色可以互換，所以可以適當標記，使 $a\geq b\geq c$。$f(a)$、$f(b)$、$f(c)$ 三者都是正數。由於 f 是遞增（increasing）函數，$f(a)\geq f(b)\geq f(c)$，所以根據第 (iii) 部分開首的說明，我們只需證明

$$f(a)<f(b)+f(c).$$

? **想一想** 關於 $f(x)/x$ 的條件，怎樣幫助我們比較 $f(a)$ 與 $f(b)+f(c)$？

它讓我們可以用 $f(a)$ 的倍數，從下方為 $f(b)$ 和 $f(c)$ 定界。由於 $f(x)/x$ 隨 x 增大而遞減，且 $a\geq b$，

$$\frac{f(b)}{b}\geq\frac{f(a)}{a},\qquad\text{所以}\qquad f(b)\geq\frac{b}{a}f(a),$$

而等號只在 $b=a$ 時才可能成立。同理 $f(c)\geq\frac{c}{a}f(a)$。相加，得

$$f(b)+f(c)\ \geq\ \frac{b+c}{a}f(a)\ >\ f(a),$$

其中最後一步用到 $b+c>a$（由三角形得出）及 $f(a)>0$。所以三個新長度中最大的一個小於另外兩個之和，因此 $f(a)$、$f(b)$、$f(c)$ 是某三角形的三邊。

驗算

- 對於 (D)，試取 $a=2$、$b=3$、$c=4$：三個長度是 16、17、22，而 $22<16+17$。把恆等式重新標記以配合最長的長度 c^2+ab，可預測差值為 $(a^2-ab+b^2)+c(a+b-c)=(4-6+9)+4\cdot1=11$，而事實上 $16+17-22=11$。
- 對於 (C)，三角形 3,4,5 給出 1,1,2：正如預測，是一個退化成直線的「扁平」三角形。
- 用電腦對 200 000 個隨機三角形進行檢驗，證實了 (A)、(D) 和 (C)（必然、必然、永不），發現 (B) 對其中約 40% 成立，並證實第 (iv) 部分對 $f(x)=\sqrt{x}$、$\ln(1+x)$、$x/(1+x)$、$x^{0.3}$ 及 $1-\mathrm{e}^{-x}$ 成立。

常見錯誤

- 只測試了一個三角形，便回答 (B) 是「永不」或「必然」：要回答「有時」，需要每種情況各舉一個例子。
- 在 (D) 中只檢查了一條不等式，卻沒有解釋為何另外兩條也成立：能夠支持這一點的，是對稱性（或關於最長邊的說明）。
- 在 (iv) 中，當 a 可能等於 b 時寫出 $f(a)/a < f(b)/b$；此時不等式應為 $\leq$，而嚴格不等號必須來自 $b + c > a$。

STEP 之外

三角不等式是度量（metric）的三條公理（axioms）之一；度量是距離的抽象概念，是大學一年級分析（analysis）和拓撲學（topology）的核心。第 (iv) 部分在那裏是一個經典結果：若 d 是度量，而 f 是遞增函數，且 $f(0) = 0$、$f(x)/x$ 遞減，則 $f \circ d$ 也是度量；這就是為甚麼 $d/(1+d)$ 是構造有界（bounded）度量的標準方法。Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）是接觸這些概念的好起點。

詳細解答

STEP II 2020，第 5 題

純數學 • 數字和與整除性

STEP II 2020，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

10 的每一個冪除以 9 的餘數(remainder)都是 1，所以一個數與它的數字和(digit sum)在模（modulo）9 下必定相同。單憑這一點，每條方程都能化成一個很強的整除（divisibility）條件。接著用大小估計收尾：數字和只以約 $9n$ 的速度增長，而數本身則以約 10^{n-1} 的速度增長，因此只剩下寥寥幾個候選數需要檢驗。

解答

第 (i) 部分

設 $x = \sum_{r=0}^{n-1} a_r 10^r$ 及 $\mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r$，則

$$x - \mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r \left(10^r - 1\right).$$

每一項都有 $a_r \geq 0$ 及 $10^r - 1 \geq 0$，所以總和非負。此外，$10^r - 1 = 99\ldots9$（r 個 9）$= 9 \times 11\ldots1$，可被 9 整除（當 $r = 0$ 時它等於 0）。所以每一項都可被 9 整除，因此 $x - \mathrm{d}(x)$ 亦可被 9 整除。 ■

用同餘（congruence）的語言來說：對每個正整數 x，都有 $x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$。下文會反覆用到這個結果。

第 (ii) 部分

等價關係。由於 $\mathrm{d}(x) \equiv x \pmod 9$，

$$x - 44\,\mathrm{d}(x) \equiv x - 44x = -43x \equiv 2x \pmod 9,$$

因為 $-43 = -45 + 2$。所以 $x - 44\,\mathrm{d}(x)$ 是 9 的倍數，當且僅當 $9 \mid 2x$。由於 $\gcd(2,9) = 1$，$9 \mid 2x$ 當且僅當 $9 \mid x$。這樣便一次過證明了兩個方向。 ■

上下界。假設 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$，且 x 有 n 位數字。每個數字最多是 9，所以 $\mathrm{d}(x) \le 9n$，而 $x = 44\,\mathrm{d}(x) \le 396n$。另外，一個 n 位數的首位數字 $a_{n-1} \ge 1$，所以 $x \ge 10^{n-1}$。合起來得

$$10^{n-1} \le x \le 396n.$$

當 $n = 5$ 時，這需要 $10\,000 \le 1980$，並不成立。此外，若對某個 $n \ge 5$ 有 $10^{n-1} > 396n$，則 $10^n = 10 \cdot 10^{n-1} > 3960n \ge 396(n+1)$，所以由歸納法（induction）可知，不等式 $10^{n-1} \le 396n$ 對每個 $n \ge 5$ 都不成立。因此 $n \le 4$。 ■

想一想 怎樣才能把搜尋範圍由 9999 以內的所有數，縮減到只剩幾個？

利用剛剛證明的等價關係。若 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$，則 $x - 44\,\mathrm{d}(x) = 0$，這是 9 的倍數，所以 $9 \mid x$。於是 $9 \mid 44\,\mathrm{d}(x)$，而由於 $\gcd(44,9) = 1$，這迫使 $9 \mid \mathrm{d}(x)$。因此 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$ 是 $44 \times 9 = 396$ 的倍數。

求解。由於 $n \le 4$，我們有 $x \le 396 \times 4 = 1584$，所以 x 是 396, 792, 1188, 1584 其中之一。它們的數字和全都是 18，所以在每種情況下 $44\,\mathrm{d}(x) = 792$。唯一符合的是

$$x = 792, \qquad \mathrm{d}(792) = 18, \quad 44 \times 18 = 792.$$

每一個解都在這四個候選數之中，而只有 792 符合，所以再沒有其他值。 ■

第 (iii) 部分

記 $y = \mathrm{d}(x)$ 及 $z = \mathrm{d}(y)$，於是方程為 $x = 107z$，且 $z = x/107 > 0$。

整除性。由第 (i) 部分，$x \equiv y \equiv z \pmod 9$。所以

$$0 = x - 107z \equiv z - 107z = -106z \pmod 9.$$

由於 $106 = 99 + 7$，所以 $9 \mid 7z$；又因 $\gcd(7,9) = 1$，得 $9 \mid z$。

大小。第 (i) 部分亦給出：對任何正整數 m，$\mathrm{d}(m) \le m$。所以若 x 有 n 位數字，則 $z = \mathrm{d}(y) \le y \le 9n$，以及

$$10^{n-1} \le x = 107z \le 963n.$$

當 $n = 5$ 時，這需要 $10\,000 \le 4815$，並不成立。用與第 (ii) 部分相同的歸納法（現在是 $10^n > 9630n \ge 963(n+1)$）可證明它對所有 $n \ge 5$ 都不成立，所以 $n \le 4$。

想一想 上界 $z \le 36$ 仍然留下好幾個 9 的倍數。可以做得更好嗎？

可以，方法是再取一次數字和。由於 $n \le 4$，$y = \mathrm{d}(x) \le 36$。在 $1, 2, \ldots, 36$ 之中，最大的數字和是 $\mathrm{d}(29) = 11$，因為小於 37 的兩位數十位數字最多是 3，而十位數字為 3 時

個位數字最多是 6（數字和最多是 9），至於十位數字為 2 時則可以有 $2+9=11$。所以 $1 \le z \le 11$，而 z 是 9 的倍數。因此 $z=9$，以及

$$x = 107 \times 9 = 963.$$

驗證：$\mathrm{d}(963)=18$，$\mathrm{d}(18)=9$，而 $107\times 9=963$。所以 $x=963$ 滿足方程。任何解都必須有 $z=9$，因此 $x=963$，所以再沒有其他值。 ■

驗算

- 抽樣驗算第 (i) 部分：$249-15=234=9\times 26$。
- 用電腦搜尋所有 $x < 10^6$，發現 792 是 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$ 的唯一解，而 963 是 $x=107\,\mathrm{d}(\mathrm{d}(x))$ 的唯一解，與上述的上下界一致。
- 留意 $792 = 44\times 18$ 及 $963 = 107\times 9$：兩者都是 9 的倍數，正如整除性論證所要求的。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分只得出 x 是 9 的倍數。更強的事實是 $\mathrm{d}(x)$ 也是 9 的倍數，因而 $396 \mid x$，正是這一點令搜尋變得簡短。
- 只檢查了 $n=5$ 便斷言 $n\le 4$。你需要說明為何對所有更大的 n，10^{n-1} 都一直大於 $396n$；歸納法（或者觀察到左邊每次增大 10 倍，而右邊最多只增大 $\frac{6}{5}$ 倍）正好提供了理由。
- 在第 (iii) 部分忘記了 $z>0$，而正是這一點排除了 $z=0$。

STEP 之外

$x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$ 這個事實，正是「棄九法」（casting out nines）背後的原理，那是一種古老的驗算方法。這是在環（ring）$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ 中運算的第一個例子，在這個環裡 10 的表現就像 1；同樣的想法配合 $10\equiv -1$，便得出判斷能否被 11 整除的交錯和檢驗法。把一個數與其各位數字的函數混在一起的方程，通常都正如這裡般求解：用同餘縮減可能性，再用增長估計令候選名單變得有限。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是一本很好的同餘入門書。

詳細解答

STEP II 2020，第 6 題

純數學 • 矩陣的冪與跡

> **STEP II 2020，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 7.4 節回到起點的矩陣中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/finite-order.html

關鍵思路

每個實 2×2 矩陣（matrix）都滿足它自己的特徵方程（characteristic equation）：

$$\mathbf{M}^2 - t\,\mathbf{M} + \delta\,\mathbf{I} = \mathbf{0}, \qquad t = \operatorname{tr}(\mathbf{M}),\ \delta = \det(\mathbf{M}),$$

這就是凱萊–哈密頓定理（Cayley–Hamilton theorem）（把乘積展開，兩行便可驗證）。一旦把 $\mathbf{M}^2$ 寫成 $\mathbf{M}$ 與 $\mathbf{I}$ 的組合，任何像 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ 這樣的方程都會變成「$t\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{I}$ 的倍數」，這就迫使 $t = 0$，或者 $\mathbf{M}$ 本身是 $\mathbf{I}$ 的倍數。之後，第 (iii) 及 (iv) 部分只需把第 (ii) 部分應用到 $\mathbf{M}^2$ 和 $\mathbf{M}^4$（而非 $\mathbf{M}$）上便可得出。

全文記 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$t = a + d$ 及 $\delta = ad - bc$。

解答

第 (i) 部分

把乘積展開，

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因為例如 $(a+d)a-(ad-bc)=a^2+bc$ 及 $(a+d)b=ab+bd$。所以

$$\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - \delta\mathbf{I}. \qquad (*)$$

對 $(*)$ 取跡（trace），並利用 $\operatorname{tr}(\mathbf{I})=2$，得

$$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = t\cdot t - 2\delta = \operatorname{tr}(\mathbf{M})^2 - 2\det(\mathbf{M}),$$

這正是所求。（直接計算亦可：$a^2+2bc+d^2=(a+d)^2-2(ad-bc)$。）

第 (ii) 部分

第一個等價（equivalence），$(\Rightarrow)$。設 $\mathbf{M}^2=\mathbf{I}$ 且 $\mathbf{M}\neq\pm\mathbf{I}$。代入 $(*)$ 得

$$t\,\mathbf{M} = (1+\delta)\,\mathbf{I}.$$

若 $t\neq 0$，便可兩邊除以 t，得 $\mathbf{M}=k\mathbf{I}$，其中 $k=(1+\delta)/t$ 為實數；於是 $\mathbf{M}^2=k^2\mathbf{I}=\mathbf{I}$ 給出 $k=\pm1$，即 $\mathbf{M}=\pm\mathbf{I}$，但這已被排除。因此 $t=0$，從而 $(1+\delta)\mathbf{I}=\mathbf{0}$，所以 $\delta=-1$。

$(\Leftarrow)$。若 $t=0$ 且 $\delta=-1$，則 $(*)$ 給出 $\mathbf{M}^2=0\cdot\mathbf{M}+\mathbf{I}=\mathbf{I}$。此外 $\operatorname{tr}(\pm\mathbf{I})=\pm2\neq0$，所以 $\mathbf{M}\neq\pm\mathbf{I}$。

第二個等價，$(\Rightarrow)$。若 $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$，則 $(*)$ 給出 $t\mathbf{M}=(\delta-1)\mathbf{I}$。若 $t\neq0$，則 $\mathbf{M}=k\mathbf{I}$，其中 k 為實數，而 $\mathbf{M}^2=k^2\mathbf{I}=-\mathbf{I}$ 便需要 $k^2=-1$，這對實數 k 是不可能的。所以 $t=0$，從而 $\delta=1$。

$(\Leftarrow)$。若 $t=0$ 且 $\delta=1$，則 $(*)$ 立即給出 $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$。

> ? **想一想** 我們究竟在哪裏用到 $\mathbf{M}$ 是實矩陣這一點？

只在第二個等價中用到：$k^2=-1$ 沒有實數解。對於複矩陣，$\mathbf{M}=\mathrm{i}\mathbf{I}$ 滿足 $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$，但其跡為 $2\mathrm{i}\neq0$，所以結論便不成立。

第 (iii) 部分

$(\Leftarrow)$ 是顯然的：若 $\mathbf{M}^2=\pm\mathbf{I}$，則 $\mathbf{M}^4=(\pm\mathbf{I})^2=\mathbf{I}$。

$(\Rightarrow)$。設 $\mathbf{N}=\mathbf{M}^2$，這是一個實 2×2 矩陣，且 $\mathbf{N}^2=\mathbf{I}$。要麼 $\mathbf{N}=\pm\mathbf{I}$，這正是我們想要的；要麼 $\mathbf{N}\neq\pm\mathbf{I}$，此時第 (ii) 部分告訴我們 $\det(\mathbf{N})=-1$。但

$$\det(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{M})^2 \geq 0,$$

所以第二種情況不可能出現。因此 $\mathbf{M}^2=\pm\mathbf{I}$。

$\mathbf{M}^4=-\mathbf{I}$ 的條件。同樣設 $\mathbf{N}=\mathbf{M}^2$。把第 (ii) 部分的第二個等價應用到 $\mathbf{N}$ 上，

$$\mathbf{M}^4=-\mathbf{I} \iff \operatorname{tr}(\mathbf{N})=0 \text{ 且 } \det(\mathbf{N})=1.$$

利用第 (i) 部分及 $\det(\mathbf{N}) = \delta^2$，這等於說

$$t^2 - 2\delta = 0 \quad 及 \quad \delta^2 = 1.$$

由 $\delta^2 = 1$ 得 $\delta = \pm 1$，而 $t^2 = 2\delta \geq 0$ 排除了 $\delta = -1$。所以 $\delta = 1$ 且 $t^2 = 2$。每一步都是等價的，因此

$$\boxed{\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \det(\mathbf{M}) = 1 \text{ 且 } \operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \pm\sqrt{2}}.$$

第 (iv) 部分

把第 (iii) 部分應用到 $\mathbf{M}^2$ 上：$\mathbf{M}^8 = \mathbf{I} \iff \mathbf{M}^4 = \pm\mathbf{I}$，所以滿足 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ 的矩陣恰好是滿足以下條件的矩陣：

$$\mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I} \qquad 或 \qquad \det(\mathbf{M}) = 1,\ \operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \pm\sqrt{2}.$$

旋轉（rotation）和反射（reflection）就是正交（orthogonal）矩陣：它們的列是互相垂直的單位向量（unit vector）（旋轉的行列式（determinant）為 1，反射的行列式為 -1）。所以我們只需在上述矩陣中找一個列不是單位向量的矩陣。例如

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

的跡為 0、行列式為 -1，所以由第 (ii) 部分得 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$（驗證：$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$），因而 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$。它的第二列 $(1, -1)$ 的長度為 $\sqrt{2} \neq 1$，所以它既不是旋轉，也不是反射。（它是一個「斜反射」：它保持沿 x 軸的每個向量不變，並把沿 $(1, -2)$ 方向的每個向量反向，而這兩個方向並不互相垂直。）

較有趣的那一類中的一個例子是 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$：行列式為 1、跡為 $\sqrt{2}$，所以 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ 及 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$，但它的第一列長度為 $\sqrt{3}$。它是一個「變形了的」45° 旋轉：它的階（order）恰好是 8，與該旋轉相同，但不保持長度。

驗算

- 轉角為 45° 的旋轉 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的行列式為 1、跡為 $\sqrt{2}$，而轉四次 45° 便是轉半圈，即 $-\mathbf{I}$：與第 (iii) 部分一致。
- 把 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 平方，得 $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$，其跡為 0、行列式為 1，所以由第 (ii) 部分，它的平方是 $-\mathbf{I}$。

- 以電腦搜尋所有元素屬於 $\{-3, -\frac{5}{2}, \ldots, 3\}$ 的矩陣，確切驗證了第 (ii) 部分的兩個等價，以及第 (iii) 部分的第一個等價。

常見錯誤

- 未先處理 $t = 0$ 的情況便除以 t；第 (ii) 部分的整個論證，正是按 t 是否為零來分情況討論。
- 在第 (iii) 部分，忘記 $\det(\mathbf{M}^2) = \det(\mathbf{M})^2$ 不可能是負數；正是這一點排除了 $\mathbf{I}$ 的「其他」平方根（square root）。
- 在第 (iv) 部分以 45° 旋轉作為例子：它雖然滿足 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$，卻正正是題目所排除的情況。

STEP 之外

恆等式 $(*)$ 是凱萊–哈密頓定理在 2×2 情況下的特例：每個方陣都滿足它的特徵多項式（characteristic polynomial）。像「哪些 $\mathbf{M}$ 滿足 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$？」這類問題，實質上是關於特徵值（eigenvalue）的問題：在這裏，特徵值必須是八次單位根（roots of unity），而一個階為 8 的實矩陣與某個旋轉相似（similar），但本身不一定是旋轉。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是本着這種精神，闡述特徵值、相似及特徵多項式。

詳細解答

STEP II 2020，第 7 題

純數學 • 複數變換

> **STEP II 2020，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

映射 $z \mapsto w = \dfrac{2}{z-2}$ 是先平移、再作反演（inversion），而反演會把不經過原點的直線映成經過原點的圓。要證明 w 位於某個特定的圓上，最乾淨利落的做法是先猜出圓心 c，再證明 $|w-c|$ 可化簡為常數。把 $w-c$ 寫成單一分式後，會發現分子與分母互為共軛（conjugate）（或幾乎如此），正因如此，模（modulus）才是常數。

解答

以下全程使用 $|\alpha/\beta| = |\alpha|/|\beta|$，以及對實數 x、y 有 $|x+yi| = |x-yi| = |y+xi| = \sqrt{x^2+y^2}$。

第 (i) 部分

設 $z = 3+ti$，則 $z-2 = 1+ti$，所以

$$w - 1 = \frac{2}{1+ti} - 1 = \frac{2-(1+ti)}{1+ti} = \frac{1-ti}{1+ti}.$$

分子與分母互為共軛複數，因此模相同，都是 $\sqrt{1+t^2}$，而且永不為零。故此

$$|w-1| = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1,$$

與 t 無關。直線 $\mathrm{Re}(z) = 3$ 上每一個 z 都可寫成 $3+ti$（t 為某實數），所以對每個這樣的 z，點 w 與 1 的距離都是 1：它位於圓心為 1、半徑為 1 的圓上。

直線 V。現在 $z = p+ti$，不妨記 $a = p-2$；由於 $p \neq 2$，a 是非零實數。於是 $z-2 = a+ti$，永不為零。當 $p = 3$ 時圓心是 $1 = 1/a$，所以一般情況下我們嘗試以 $1/a$ 為圓

心：

$$w - \frac{1}{a} = \frac{2}{a+ti} - \frac{1}{a} = \frac{2a-(a+ti)}{a(a+ti)} = \frac{a-ti}{a(a+ti)}.$$

同樣地 $|a-ti| = |a+ti|$，所以

$$\left|w - \frac{1}{p-2}\right| = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|p-2|}.$$

因此 w 位於以下的圓上：

$$\text{圓心}\frac{1}{p-2}, \qquad \text{半徑}\frac{1}{|p-2|}.$$

半徑中的絕對值符號不可省略：若 $p < 2$，圓心位於負實軸上，但半徑必須是正數。

想一想 如果題目沒有先給出 $p = 3$ 的情況，我們會怎樣找出圓心 $1/(p-2)$？

點 $z = p$（即 $t = 0$）給出 $w = 2/a$；而當 $t \to \pm\infty$ 時，$w \to 0$。這兩點是一條直徑的兩端（圓關於實軸對稱，而它們正是圓上僅有的兩個實數點），所以圓心是它們的中點 $1/a$。

至於虛部，把分子分母同乘以共軛：

$$w = \frac{2(a-ti)}{a^2+t^2}, \qquad \text{所以} \qquad \operatorname{Im}(w) = \frac{-2t}{a^2+t^2}.$$

分母為正，所以 $\operatorname{Im}(w) > 0$ 當且僅當 $t < 0$。因此 V 上使 $\operatorname{Im}(w) > 0$ 的點是

$$z = p + ti，\text{其中} t < 0, \quad \text{即} V \text{ 上位於實軸下方的點} (\operatorname{Im}(z) < 0).$$

第 (ii) 部分

現在 $z = s + qi$，其中 s 為實數。記 $u = s - 2$，則 $z - 2 = u + qi$；由於 $q \neq 0$，它不為零。這裏圓的「兩端」是 $w = 0$（當 $u \to \pm\infty$）及 $w = 2/(qi) = -2i/q$（當 $u = 0$），由此推測圓心為 $-i/q$。驗證：

$$w + \frac{i}{q} = \frac{2}{u+qi} + \frac{i}{q} = \frac{2q+i(u+qi)}{q(u+qi)} = \frac{q+ui}{q(u+qi)}.$$

而 $|q+ui| = \sqrt{q^2+u^2} = |u+qi|$，所以

$$\left|w + \frac{i}{q}\right| = \frac{1}{|q|}.$$

因此 w 位於以下的圓上：

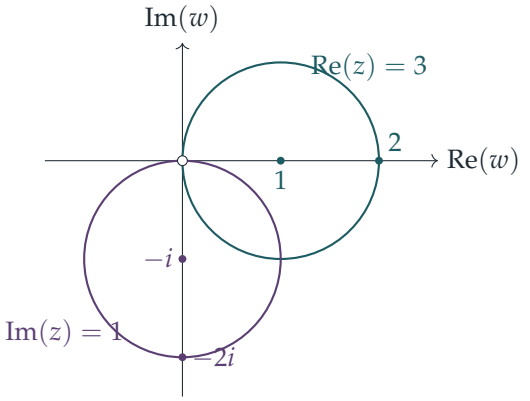
$$\text{圓心} -\frac{i}{q}, \qquad \text{半徑}\frac{1}{|q|}.$$

至於實部，

$$w = \frac{2(u-qi)}{u^2+q^2}, \qquad \text{所以} \qquad \operatorname{Re}(w) = \frac{2u}{u^2+q^2},$$

分母為正。所以 $\mathrm{Re}(w) > 0$ 當且僅當 $u > 0$，即

$$z = s + qi，其中 s > 2, \quad 即 H 中位於下述直線右方的點：\ \mathrm{Re}(z) = 2.$$



上圖顯示 $\mathrm{Re}(z) = 3$ 的像（來自第 (i) 部分）及 $\mathrm{Im}(z) = 1$ 的像（第 (ii) 部分取 $q = 1$）。兩個圓都經過原點，但 $w = 0$ 本身永遠取不到，因為 $2/(z-2) \neq 0$；它對應於沿直線走到「無窮遠處」的 z。

驗算

- 在 V 的公式中取 $p = 3$：圓心 $1/(3-2) = 1$，半徑 1，與第一個結果吻合。
- 代入數值：$z = 3 - i$ 給出 $w = 2/(1-i) = 1 + i$，有 $|w - 1| = 1$ 及 $\mathrm{Im}(w) = 1 > 0$，與 $t = -1 < 0$ 一致。對於 $q = 1$ 的 H，$z = 3 + i$ 給出 $w = 1 - i$，它與 $-i$ 的距離為 1，且實部為正，與 $3 > 2$ 相符。
- 當 $p \to 2$ 時，半徑 $1/|p-2|$ 變大：此時直線 V 非常接近被映到無窮遠的點 $z = 2$，所以它的像理應很大。用電腦對數以千計的隨機 p、q 及每條直線上的點作檢查，證實了兩個圓及兩個符號條件均正確。

常見錯誤

- 把半徑寫成 $1/(p-2)$ 或 $1/q$，而當 $p < 2$ 或 $q < 0$ 時它們是負數。
- 把 $\mathrm{Im}(w)$ 的符號弄反：除以 $z - 2$ 相當於關於實軸作反射，所以 $\mathrm{Im}(w)$ 與 $\mathrm{Im}(z)$ 的符號相反。

STEP 之外

映射 $z \mapsto 2/(z-2)$ 是一個默比烏斯變換（Möbius transformation），即形如 $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ 的映射。這類映射總是把「廣義圓」（generalised circles，即圓和直線）映成廣義圓；從共形映射（conformal mapping）到雙曲幾何（hyperbolic geometry），它們都是複分析（complex analysis）入門課程中最基本的幾何工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）有一章精彩地介紹它們，書中的圖像令類似本題的結果一目了然。

詳細解答

STEP II 2020，第 8 題

純數學 • 多項式與積分

STEP II 2020，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

由於 $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$，f 的每個根都是 F 的轉向點（turning point），而每個面積條件都變成關於 F 在其中一個轉向點的值的陳述。一旦知道 F 在 0 和 c 有二重根（double root），和式 $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(c-x)$ 便化簡為只有一個決定正負號的因子 $c - 2h$。把這個正負號與我們對 F 在 $[0, c]$ 上的最大值和最小值的認識作比較，便迫使圖像具有對稱性。

解答

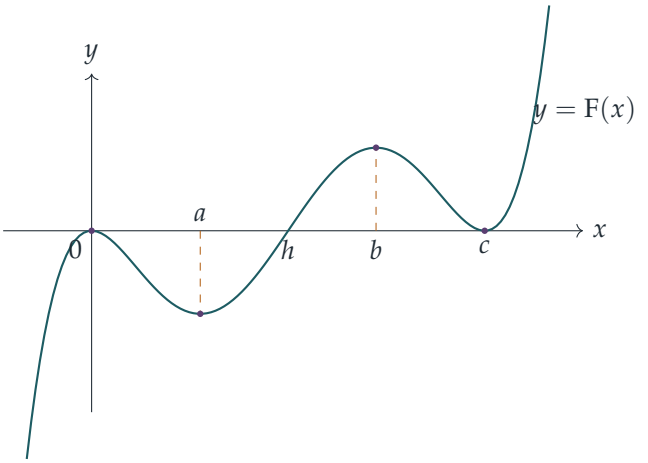
由於 f 是首一（monic）多項式，其根為 $0, a, b, c$，故 $\mathrm{f}(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$。因此在 $(0, a)$ 上 $\mathrm{f} < 0$，在 (a, b) 上 $\mathrm{f} > 0$，在 (b, c) 上 $\mathrm{f} < 0$，而當 $x < 0$ 及 $x > c$ 時 $\mathrm{f} > 0$。設 A 為 0 與 a 之間的面積。題設條件指出 b 與 c 之間的面積為 A，a 與 b 之間的面積為 $2A$，其中 $A > 0$。

第 (i) 部分

由於 $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$，在 $\mathrm{f} < 0$ 的區間上的積分等於該處面積的相反數。因此

$$\mathrm{F}(0) = 0, \qquad \mathrm{F}(a) = -A, \qquad \mathrm{F}(b) = -A + 2A = A, \qquad \mathrm{F}(c) = A - A = 0.$$

由於 $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$，F 的轉向點位於 $x = 0, a, b, c$。f 的正負號在 0 和 b 由 $+$ 變為 $-$，所以該處為極大點；在 a 和 c 由 $-$ 變為 $+$，所以該處為極小點。F 是五次多項式，其首項係數（leading coefficient）$\frac{1}{5}$ 為正，故當 $x \to \pm\infty$ 時 $\mathrm{F}(x) \to \pm\infty$。



曲線在 $(0,0)$ 有極大點，在 $x=a$ 有極小點且 $y=-A$，在 $x=b$ 有極大點且 $y=A$，並在 $(c,0)$ 有一個與 x 軸相切的極小點。

F 的形式。F 是首項係數為 $\frac{1}{5}$ 的 5 次多項式。在 $x=0$，有 $\mathrm{F}(0)=0$ 及 $\mathrm{F}'(0)=\mathrm{f}(0)=0$，所以 $x=0$ 是重數（multiplicity）至少為 2 的根。同理 $\mathrm{F}(c)=0=\mathrm{F}'(c)$，所以 c 是重數至少為 2 的根。這樣便確定了五個一次因子中的四個：

$$\mathrm{F}(x)=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(x-h)$$

其中 h 為某實數。此外，$\mathrm{F}(a)=-A<0<A=\mathrm{F}(b)$，所以 F 在 a 與 b 之間（不含端點）有一個根。0 和 c 都不在 (a,b) 之內，所以這個根必定是 h。因此 $a<h<b$，特別地 $0<h<c$。

和式。注意 $(c-x)^2\big((c-x)-c\big)^2=x^2(x-c)^2$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x)+\mathrm{F}(c-x)&=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2\big[(x-h)+(c-x-h)\big]\\&=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(c-2h).\end{aligned}$$

第 (ii) 部分

在 $[0,c]$ 上，F 在 $[0,a]$ 上嚴格遞減，在 $[a,b]$ 上嚴格遞增，在 $[b,c]$ 上嚴格遞減。所以在 $[0,c]$ 上的最小值是 $\mathrm{F}(a)=-A$：唯一的其他候選值是端點值 $\mathrm{F}(c)=0>-A$。這個最小值只在 $x=a$ 取得。所以當 $0\le x\le c$ 時，

$$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(x)\ \ge\ \mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(a)=A-A=0,$$

而當 $x\ne a$ 時不等式嚴格成立。

? **想一想** 取哪個 x 值，可以使 $\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(x)$ 看起來像第 (i) 部分的和式？

取 $x=c-b$，由於 $0<b<c$，它位於 $[0,c]$ 之內。由第 (i) 部分，

$$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b)=\tfrac{1}{5}b^2(b-c)^2(c-2h).$$

若 $c-b\neq a$，左方嚴格為正。由於 $\frac{1}{5}b^2(b-c)^2>0$，可推出 $c-2h>0$。所以 $c-b=a$ 或 $c>2h$，此即所求。

現在把同一論證倒過來用。在 $[0,c]$ 上，F 的最大值是 $\mathrm{F}(b)=A$，大於端點值 $\mathrm{F}(0)=\mathrm{F}(c)=0$，而且只在 $x=b$ 取得。所以當 $0\leq x\leq c$ 時，

$$\mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(x)\leq \mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(b)=0,$$

而當 $x\neq b$ 時不等式嚴格成立。取 $x=c-a\in[0,c]$，得 $\frac{1}{5}a^2(c-a)^2(c-2h)\leq 0$，若 $c-a\neq b$ 則嚴格成立。所以 $c-a=b$ 或 $c<2h$。

若 $c\neq a+b$，兩個結論分別給出 $c>2h$ 和 $c<2h$，這是不可能的。因此 $c=a+b$。於是 $c-b=a$，所以

$$0=\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b)=\tfrac{1}{5}b^2a^2(c-2h).$$

由於 $a,b\neq 0$，得 $c=2h$。

第 (iii) 部分

當 $h=\frac{1}{2}c$ 時，有 $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{5}u\,(x-\frac{1}{2}c)$，其中 $u=x^2(x-c)^2$，因此 $u'=2x(x-c)(2x-c)$。用乘積法則（product rule）求導，

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)=\mathrm{F}'(x)&=\tfrac{1}{5}\left[2x(x-c)(2x-c)\left(x-\tfrac{1}{2}c\right)+x^2(x-c)^2\right]\\&=\tfrac{1}{5}x(x-c)\left[(2x-c)^2+x(x-c)\right]\\&=\tfrac{1}{5}x(x-c)\left(5x^2-5cx+c^2\right)\\&=x(x-c)\left(x^2-cx+\tfrac{1}{5}c^2\right).\end{aligned}$$

（所以 $a,b=\frac{1}{2}c\mp\frac{c}{2\sqrt{5}}$，兩者之和確實是 c。）

? **想一想** 各根關於 $x=\frac{1}{2}c$ 對稱。能否利用這一點令二階導數（second derivative）變得容易計算？

可以。設 $y=x-\frac{1}{2}c$。則 $x(x-c)=y^2-\frac{1}{4}c^2$ 及 $x^2-cx+\frac{1}{5}c^2=y^2-\frac{1}{20}c^2$，所以

$$\mathrm{f}=\left(y^2-\tfrac{1}{4}c^2\right)\left(y^2-\tfrac{1}{20}c^2\right)=y^4-\tfrac{3}{10}c^2y^2+\tfrac{1}{80}c^4.$$

由於 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1$，

$$\mathrm{f}''(x) = 12y^2 - \tfrac{3}{5}c^2,$$

它恰好在 $y^2 = \frac{1}{20}c^2$ 時為零。在這些點，f 的因子 $y^2 - \frac{1}{20}c^2$ 等於零，所以 $\mathrm{f} = 0$。每一點都是 f″（作為 y 的二次式）的單根（simple root），所以 f″ 在該處變號，它們確實是拐點（point of inflection）。所以兩個拐點都位於 x 軸上。事實上，它們就是點 $(a, 0)$ 和 $(b, 0)$。

驗算

- 取 $c = 2$，則 $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.5528$ 及 $b \approx 1.4472$。對 f 作數值積分，得 $[0, a]$、$[a, b]$ 和 $[b, c]$ 上的面積分別為 0.05724、0.11449 和 0.05724：外側兩個相等，而且各是中間那個的一半。
- 以 $a + b = c$ 及 $ab = \frac{1}{5}c^2$ 展開 $x(x-a)(x-b)(x-c)$，可重新得到第 (iii) 部分的式子。
- 取 $c = 2$，用有限差分（finite difference）估計 f″ 在 $x = a \approx 0.5528$ 的值，在捨入誤差範圍內為零，而且它在 $x = 0.54$ 與 $x = 0.56$ 之間變號。

常見錯誤

- 只記得 $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(c) = 0$，忘記同時有 $\mathrm{F}'(0) = \mathrm{F}'(c) = 0$，因而遺漏了二重根。
- 沒有證明 $0 < h < c$：決定 h 位置的，正是 F 在 a 與 b 之間的變號。
- 在第 (ii) 部分只用了第一個不等式。它只給出「$c = a + b$ 或 $c > 2h$」，單靠這一點並不足夠。還需要用 $\mathrm{F}(a)$ 得出的反向不等式，才能完成論證。

STEP 之外

第 (ii) 部分的論證用到極值定理（extreme value theorem）：閉區間上的連續函數必定取得最大值和最小值，而在這裡我們還確切知道它們在哪裡取得。面積條件迫使這個四次多項式關於 $x = \frac{1}{2}c$ 對稱，這說明了積分條件可以如何確定一個多項式的形狀。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）仔細論述了極值定理，以及聯繫 F 與 f 的微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）。

詳細解答

STEP II 2020，第 9 題

力學 • 相撞的拋體

STEP II 2020，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

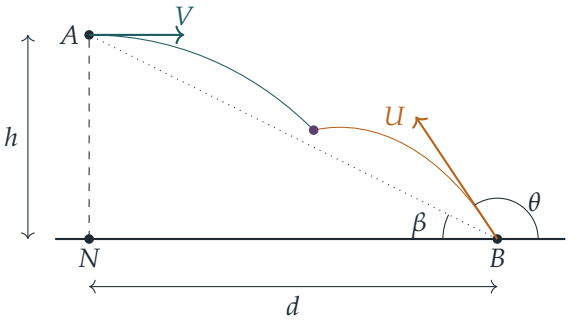
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

把兩粒質點放進同一個坐標系（coordinate system），寫出各自在時刻 t 的位置。兩者都受相同的向下加速度（acceleration）g，所以比較高度時，$-\frac{1}{2}gt^2$ 項會互相抵消：相對於對方而言，兩粒質點都以恆定速度沿直線運動。這令碰撞時間變得非常簡單，而之後每一部分都只是它的簡短推論。

解答

把兩粒質點都模型化為只受重力作用、自由運動的質點（point mass），不計空氣阻力（air resistance）。取 N 為原點，x 軸沿 NB（故 $B=(d,0)$，$A=(0,h)$），y 軸鉛垂向上。從 A 出發的質點向 B 運動，從 B 出發的質點向 N 運動，所以兩者的水平速度方向相反；這正是題目所給結果所描述的設定。



拋出後時刻 t，從 A 出發的質點位於

$$x_A = Vt, \qquad y_A = h - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

而從 B 出發的質點位於

$$x_B = d - Ut\cos\theta, \qquad y_B = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

若兩個坐標同時相等，它們便在時刻 T 碰撞（collision）。高度相等當且僅當

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 = UT\sin\theta - \tfrac{1}{2}gT^2 \quad\Longrightarrow\quad T = \frac{h}{U\sin\theta},$$

這是唯一可能的碰撞時間（由於 θ 是銳角，$\sin\theta > 0$）。在同一時刻，水平位置也必須相等：

$$VT = d - UT\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad (V + U\cos\theta)\,\frac{h}{U\sin\theta} = d.$$

兩邊乘以 $U\sin\theta$，得 $Vh + Uh\cos\theta = Ud\sin\theta$，再除以 U，

$$d\sin\theta - h\cos\theta = \frac{Vh}{U},$$

此即所求。

第 (i) 部分

由直角三角形 ANB 得 $\tan\beta = h/d$，且 $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$。由於 V、h、U 都是正數，剛證得的結果給出 $d\sin\theta - h\cos\theta > 0$。除以 $d\cos\theta > 0$（因 θ 是銳角），

$$\tan\theta > \frac{h}{d} = \tan\beta.$$

兩個角都落在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 內，而 tan 在此區間上嚴格遞增，所以 $\theta > \beta$。

第 (ii) 部分

> **想一想** 到目前為止的代數推導完全沒有用到地面。我們還有甚麼物理條件未加上？

碰撞必須在任何一粒質點到達地面之前發生，所以時刻 T 的共同高度必須至少為 0：

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad h \geq \frac{gh^2}{2U^2\sin^2\theta} \quad\Longleftrightarrow\quad U^2\sin^2\theta \geq \frac{gh}{2}.$$

（我們除以了 $h > 0$，並乘以了 $U^2\sin^2\theta > 0$。）由於 $U\sin\theta > 0$，取正平方根得

$$U\sin\theta \geq \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

等號對應兩粒質點恰好在到達地面時相遇的情況。

第 (iii) 部分

記 $r = AB = \sqrt{d^2 + h^2}$，於是 $d = r\cos\beta$，$h = r\sin\beta$。那麼

$$d\sin\theta - h\cos\theta = r(\sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta) = r\sin(\theta - \beta),$$

而碰撞條件變成

$$r\sin(\theta-\beta) = \frac{Vr\sin\beta}{U} \quad\Longrightarrow\quad \frac{U}{V} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}.$$

由第 (i) 部分，$\theta - \beta > 0$；此外 $\theta - \beta < \theta < \frac{1}{2}\pi$。所以 $0 < \sin(\theta-\beta) < 1$，又因 $\sin\beta > 0$，

$$\frac{U}{V} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)} > \sin\beta.$$

最後部分

碰撞點的高度是 $h - \frac{1}{2}gT^2$，所以

$$\text{碰撞點高於}\tfrac{1}{2}h \iff h - \tfrac{1}{2}gT^2 > \tfrac{1}{2}h \iff gT^2 < h.$$

從 B 出發的質點的鉛垂速度是 $U\sin\theta - gt$，所以

$$\text{它正在上升，於時刻}T \iff U\sin\theta - gT > 0 \iff gT < U\sin\theta.$$

想一想 怎樣才能把 $gT < U\sin\theta$ 與 $gT^2 < h$ 作比較？

利用碰撞時間本身：$T = h/(U\sin\theta)$ 表示 $U\sin\theta = h/T$。於是乘以 $T > 0$，

$$gT < U\sin\theta \iff gT < \frac{h}{T} \iff gT^2 < h.$$

兩個條件都等價於 $gT^2 < h$，所以兩粒質點在高於 $\frac{1}{2}h$ 處碰撞，當且僅當從 B 出發的質點在碰撞時仍在向上運動。

驗算

- 取 $g = 9.8$，$h = 10$，$d = 20$，$U = 20$，$\theta = \frac{1}{4}\pi$。碰撞條件給出 $V = U(d\sin\theta - h\cos\theta)/h = 10\sqrt{2} \approx 14.14$，以及 $T = 1/\sqrt{2} \approx 0.707\,\text{s}$。此時兩粒質點都位於 $x = 10$，$y = 10 - 4.9\times\frac{1}{2} = 7.55$，高於 $\frac{1}{2}h = 5$；從 B 出發的質點的鉛垂速度為 $10\sqrt{2} - 9.8/\sqrt{2} \approx 7.21 > 0$，正在上升，與最後部分的預測一致。此外 $U/V = \sqrt{2} > \sin\beta = 1/\sqrt{5}$。

- 無重力的直覺：當 $g = 0$ 時，兩粒質點沿直線運動，而條件 $U/V = \sin\beta/\sin(\theta - \beta)$ 正是由 A、B 和相遇點組成的三角形中的正弦定理（sine rule）。重力令兩粒質點向下移動相同的距離，所以條件不變。
- 以電腦對數以千計隨機選取的 h、d、U、θ 作驗算，確認了碰撞、全部三條不等式，以及最後部分的等價關係。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分忘記地面：該不等式來自碰撞發生的高度至少為零，而不是來自碰撞方程本身的任何東西。
- 由 $\tan\theta > \tan\beta$ 推出 $\theta > \beta$，卻沒有說明兩個角都是銳角，而 tan 在該範圍內遞增。
- 在第 (iii) 部分只寫到 $\sin(\theta - \beta) \leq 1$ 便停下；嚴格不等式需要 $\theta - \beta < \frac{1}{2}\pi$。

STEP 之外

$-\frac{1}{2}gt^2$ 項的抵消，是轉換到自由下落參考系（frame of reference）的一個例子：在一個以 g 加速的參考系中，重力消失，兩粒質點都沿直線運動。這是伽利略（Galileo）變換和加速參考系等概念最簡單的情形，這些概念正是大學第一門力學課程的開端，日後亦是愛因斯坦（Einstein）等效原理（equivalence principle）的出發點。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對非慣性參考系（non-inertial frame）有細緻的討論。

詳細解答

STEP II 2020，第 10 題

力學 • 能量與平衡

STEP II 2020，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

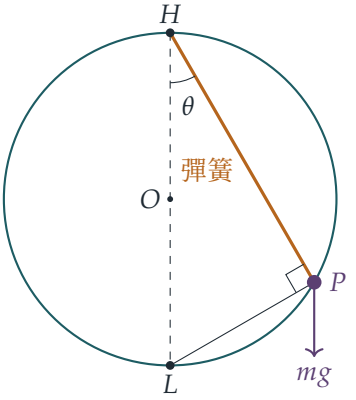
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

由於 HL 是直徑（diameter），利用「半圓上的圓周角是直角」（angle in a semicircle），彈簧長度和 P 的高度都可以直接用 θ 表示：$HP = 2a\cos\theta$，而 P 的高度比 H 低 $2a\cos^2\theta$。金屬線（wire）是光滑的，所以它的反作用力（reaction）不做功。於是整道題只涉及一個函數，就是以 $c = \cos\theta$ 為自變量的勢能（potential energy）。結果它是關於 c 的二次式（quadratic），配方後兩部分便能一併解決。

解答

將 P 視為光滑金屬線上的質點（particle），並把彈簧視為輕彈簧，遵從胡克定律（Hooke's law）（無論處於拉伸還是壓縮狀態）。設 O 為圓心。



幾何關係。由於 HL 是直徑，$\angle HPL = 90°$，因此在斜邊為 $2a$ 的直角三角形 HPL 中，

$$HP = 2a\cos\theta.$$

由 H 到 P 的垂直落差為 $HP\cos\theta = 2a\cos^2\theta$。當 P 從 L 沿任一側繞向 H 時，θ 的取值範圍是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，所以 $\cos\theta > 0$。

勢能。取 H 所在的水平為重力勢能（gravitational potential energy）的零點，並記 $c = \cos\theta$。彈簧的伸長量（extension）為 $2ac - l$，所以

$$\begin{aligned} V &= -2mga\,c^2 + \frac{\lambda}{2l}(2ac - l)^2 \\ &= \frac{2a(a\lambda - mgl)}{l}\,c^2 - 2a\lambda\,c + \frac{\lambda l}{2}. \end{aligned}$$

第 (i) 部分

光滑金屬線的反作用力不做功，因此 P 處於平衡（equilibrium）當且僅當 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$。（等價地說，沿切線方向的力互相平衡。）由連鎖法則（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}c} = -\sin\theta\left(\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\,c - 2a\lambda\right).$$

在 $\theta = \alpha$ 處（其中 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$），$\sin\alpha \neq 0$，因此括號內的式子必須為零：

$$\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\cos\alpha = 2a\lambda.$$

右方不為零，所以 $a\lambda \neq mgl$，故可以相除：

$$\cos\alpha = \frac{\lambda l}{2(a\lambda - mgl)},$$

此即所求。

要使這樣的 α 存在，須有 $0 < \cos\alpha < 1$。

- $\cos\alpha > 0$：分子 λl 為正，故須 $a\lambda > mgl$。
- $\cos\alpha < 1$：兩邊乘以正數 $2(a\lambda - mgl)$，得 $\lambda l < 2a\lambda - 2mgl$，即 $\lambda(2a - l) > 2mgl$。

由於 $l < 2a$，第二個條件即 $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$。這亦蘊含第一個條件，因為 $\dfrac{2mgl}{2a - l} > \dfrac{2mgl}{2a} = \dfrac{mgl}{a}$。所以 $\alpha > 0$ 的平衡位置存在，僅當 $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$。（反之，若此條件成立，該公式給出一個真正的角 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，而由對稱性（symmetry），$-\alpha$ 亦是平衡位置。）

第 (ii) 部分

想一想 有沒有一個巧妙的方法改寫 V，使 $\cos\alpha$ 單獨出現？

有：配方（completing the square）。記 $K = \dfrac{2a(a\lambda - mgl)}{l}$。由第 (i) 部分，$\dfrac{a\lambda - mgl}{l} = \dfrac{\lambda}{2\cos\alpha}$，所以

$$K = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}, \qquad \frac{2a\lambda}{K} = 2\cos\alpha.$$

因此

$$V = K\left(c^2 - 2c\cos\alpha\right) + \frac{\lambda l}{2} = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}(c - \cos\alpha)^2 + \text{常數}.$$

（作為驗證，此式在 $c = \cos\alpha$ 處取最小值，正是第 (i) 部分求得的平衡位置。）按第 (i) 部分中平衡位置存在所需的條件，我們假設 $a\lambda > mgl$，於是 $\cos\alpha > 0$ 且 $K > 0$。

在 L 處，$\theta = 0$ 且 $c = 1$。對 L 與一般位置應用能量守恆（conservation of energy），得

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 + \frac{a\lambda}{\cos\alpha}\Big[(1 - \cos\alpha)^2 - (c - \cos\alpha)^2\Big].$$

兩邊乘以 $\dfrac{\cos\alpha}{a\lambda} > 0$，

$$\frac{mv^2\cos\alpha}{2a\lambda} = D - (c - \cos\alpha)^2, \qquad \text{其中} D = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha. \qquad (*)$$

所以若 P 在 $\theta = \beta$ 處靜止，則該處 $v = 0$，且

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha,$$

這就是所求的方程。

想一想 這個方程對 $\cos\beta$ 有兩個根。哪一個才是真正的停止點？它又在甚麼情況下位於 H 之前？

當 P 從 L 升向 H 時，c 由 1 遞減至 0。由 $(*)$，只要 $(c - \cos\alpha)^2 < D$，P 便會繼續運動；所以質點首次停下之處，就是 c 從 1 往下減少時碰到區間 $(\cos\alpha - \sqrt{D},\ \cos\alpha + \sqrt{D})$ 較近一端的位置。現在 $D \geq (1 - \cos\alpha)^2$（若 $u > 0$ 則嚴格不等），所以 $\cos\alpha + \sqrt{D} > 1$ 且 $\cos\alpha - \sqrt{D} < 1$。因此 $c = 1$ 位於區間之內，而停止時的值為

$$\cos\beta = \cos\alpha - \sqrt{D}.$$

P 在到達 H（該處 $c = 0$）之前停下，當且僅當此值為正，即 $\sqrt{D} < \cos\alpha$，亦即 $D <$

$\cos^2\alpha$：

$$\begin{aligned}
&(1-\cos\alpha)^2+\frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha<\cos^2\alpha\\
\iff\quad &1-2\cos\alpha+\frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha<0\\
\iff\quad &\frac{mu^2}{2a\lambda}<2-\sec\alpha,
\end{aligned}$$

最後一步兩邊除以 $\cos\alpha>0$。因此，P 在到達 H 之前靜止，僅當

$$u^2<\frac{2a\lambda}{m}(2-\sec\alpha).$$

特別地，這要求 $\sec\alpha<2$，即 $\alpha<\frac{\pi}{3}$。否則無論 P 在 L 處的速率為何，都會到達 H。

驗算

- 取 $m=1$、$g=10$、$a=1$、$l=1$、$\lambda=40$（採用一致的單位）。則 $\lambda>2mgl/(2a-l)=20$，且 $\cos\alpha=40/60=\frac{2}{3}$。臨界值為 $u^2=80(2-\frac{3}{2})=40$。當 $u^2=40$ 時，$D=\frac{1}{9}+\frac{40}{80}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，所以 $\cos\beta=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$。質點恰好到達 H，正如預期。
- 若 $u=0$，則 $D=(1-\cos\alpha)^2$ 且 $\cos\beta=1$。在 L 處靜止的質點會一直留在那裏；這是正確的，因為 L 亦是平衡位置。
- 以電腦對運動方程進行數值積分，並測試大量隨機參數組合，結果顯示：恰好在 u^2 低於臨界值時，質點停在預測的 $\cos\beta$ 處。

常見錯誤

- 誤取 $HP=2a\sin\theta$，或從 O 量度高度時用錯了角。記住圓心角是 2θ，而不是 θ。
- 在第 (i) 部分只檢查 $\cos\alpha>0$。其實是條件 $\cos\alpha<1$ 給出 λ 的界限。
- 選取根 $\cos\alpha+\sqrt{D}$ 作為 $\cos\beta$。它大於 1，所以不是金屬線上的位置。

STEP 之外

把能量寫成 $K(c-\cos\alpha)^2+$ 常數，正是大學本科力學中一個關鍵思想的一維版本。對於只有一個自由度（degree of freedom）的系統，平衡位置就是勢能的駐點（stationary points），其穩定性（stability）取決於這些點是極小值還是極大值，而容許運動的區域就是能量超過勢能的地方。在這裏，當 $\alpha>0$ 存在時，L 會變成 V 的極大值，因而是不穩定平衡。彈簧令金屬線的底部變得不穩定！Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）正是以這種精神介紹能量圖與穩定性。

詳細解答

STEP II 2020，第 11 題

概率與統計 • 擲硬幣中的游程

> **STEP II 2020，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

這個遊戲幾乎沒有「記憶」：任何時刻，重要的只是最近一次擲出哪一面，以及目前連續（run）的長度。特別地，一旦擲出的面改變，遊戲所處的局面就與「這新的一面是第一次投擲」完全相同。因此我們以第一次投擲為條件（conditioning），把「已知第一擲為正面時 A 獲勝的概率（probability）」用「已知第一擲為反面時 A 獲勝的概率」表示，反之亦然。這樣便得到兩條聯立線性方程（simultaneous linear equations）。

解答

全文假設 $0 < p < 1$。（若 $p = 0$ 或 $p = 1$，每次擲出的都是同一面，遊戲會在第二或第三次投擲時結束，答案是顯然的。）記

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{A 獲勝} \mid \text{第一擲為 H}), \qquad \beta = \mathrm{P}(\text{A 獲勝} \mid \text{第一擲為 T}).$$

各次投擲是獨立（independent）的，所以任何一次投擲之後發生的事，只取決於之後尚未進行的投擲。

第 (i) 部分

遊戲必定結束。擲了 n 次後遊戲仍未結束，當且僅當到目前為止沒有兩次相鄰投擲結果相同，即首 n 次投擲交替出現：$HTHT\ldots$ 或 $THTH\ldots$。當 $n = 2m$ 時，這兩個序列各含 m 個正面和 m 個反面，所以

$$\mathrm{P}(\text{擲 } 2m \text{ 次後仍未結束}) = 2p^m q^m = 2(pq)^m \leq 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^m,$$

因為 $pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$。事件「遊戲永不結束」包含於上述每一個事件之中，因此對每一個 m，它的概率至多為 $2\left(\frac{1}{4}\right)^m$；令 $m \to \infty$，即知這概率為 0。

已知第一擲為正面。考慮第二次投擲。

- 以概率 p 擲出正面，A 立即獲勝。
- 以概率 q 擲出反面。這時之前的正面已無關重要：B 還需要再多一個反面，A 需要連續兩個正面，情況與這個反面是第一次投擲完全一樣。所以此後 A 獲勝的概率為 β。

同理，若第一擲為反面，則第二擲為反面時 B 立即獲勝；第二擲為正面時，我們便處於「第一擲為正面」的局面。因此

$$\alpha = p + q\beta, \qquad \beta = p\alpha.$$

把第二條方程代入第一條，得 $\alpha = p + pq\,\alpha$，所以

$$\alpha = \frac{p}{1-pq},$$

正如所求（$1 - pq \geq \frac{3}{4} > 0$）。於是 $\beta = \dfrac{p^2}{1-pq}$。

整體概率。以第一次投擲為條件，

$$\mathrm{P}(\text{A 獲勝}) = p\alpha + q\beta = \frac{p^2 + p^2 q}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}.$$

第 (ii) 部分

現在 α 和 β 指的是需要連續三次的遊戲。假設第一擲為正面。

- HH 之後再擲出 H，概率為 p^2：A 獲勝。
- HHT，概率為 pq；或 HT，概率為 q：自開局以來第一個反面剛剛出現，之前的正面不再計算，所以我們處於「第一擲為反面」的局面，A 獲勝的概率為 β。

這些情況涵蓋了所有可能，所以

$$\alpha = p^2 + (q + pq)\,\beta,$$

這正是題目所給的結果。把兩面的角色互換（在「第一擲為反面」的局面下，TTT 令 B 獲勝，對 A 的概率貢獻為 0），得

$$\beta = (p + pq)\,\alpha.$$

想一想 因子 $q+pq$ 和 $p+pq$ 怎樣變成 $1-p^2$ 和 $1-q^2$？

由於 $p+q=1$，我們有 $q+pq=q(1+p)=(1-p)(1+p)=1-p^2$，同理 $p+pq=p(1+q)=1-q^2$。這也可以直接理解：$1-p^2$ 是開局擲出正面後，接着兩次投擲不全是正面的概率，而這恰恰就是連續被打斷的情況。所以方程組為

$$\alpha=p^2+(1-p^2)\beta, \qquad \beta=(1-q^2)\alpha,$$

代入後得 $\alpha\left[1-(1-p^2)(1-q^2)\right]=p^2$，即

$$\alpha=\frac{p^2}{1-(1-p^2)(1-q^2)}.$$

（分母為正，因為 $0<1-p^2<1$ 且 $0<1-q^2<1$。）最後，

$$\mathrm{P}(\text{A 獲勝})=p\alpha+q\beta=\alpha\big(p+q(1-q^2)\big)=\alpha\left(p+q-q^3\right)=\alpha\left(1-q^3\right),$$

所以

$$\mathrm{P}(\text{A 獲勝})=\frac{p^2(1-q^3)}{1-(1-p^2)(1-q^2)},$$

正如所求。

第 (iii) 部分

同樣的論證適用於長度為 a 和 b 的連續。已知第一擲為正面，要麼接着的 $a-1$ 次投擲全是正面（概率 p^{a-1}），A 獲勝；要麼其中出現反面（概率 $1-p^{a-1}$）。在後一情況下，遊戲就從那個反面重新開始，令我們處於「第一擲為反面」的局面。同理，已知第一擲為反面，B 以概率 q^{b-1} 獲勝，否則在 B 的連續完成之前會出現正面。所以

$$\alpha=p^{a-1}+\left(1-p^{a-1}\right)\beta, \qquad \beta=\left(1-q^{b-1}\right)\alpha,$$

因此

$$\alpha=\frac{p^{a-1}}{1-\left(1-p^{a-1}\right)\left(1-q^{b-1}\right)}.$$

分母同樣為正，因為兩個括號的值都嚴格介乎 0 與 1 之間。於是

$$p\alpha+q\beta=\alpha\left(p+q-q^b\right)=\alpha\left(1-q^b\right),$$

所以

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{A 獲勝})=\frac{p^{a-1}\left(1-q^b\right)}{1-\left(1-p^{a-1}\right)\left(1-q^{b-1}\right)}}$$

如果你喜歡，分母可展開為 $p^{a-1}+q^{b-1}-p^{a-1}q^{b-1}$。

$a = b = 2$ **的情況**。公式變成

$$\frac{p(1-q^2)}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p(1-q)(1+q)}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq},$$

其中分母用了 $1-p=q$、$1-q=p$，分子用了 $1-q=p$。這與第 (i) 部分一致。代入 $a=b=3$ 則恰好還原第 (ii) 部分的結果。

驗算

- 公平硬幣，第 (i) 部分。當 $p=q=\frac{1}{2}$ 時，答案為 $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}/\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$，與對稱性的要求相符。在 (iii) 中，只要 $a=b$ 且 $p=\frac{1}{2}$，結果也是如此。
- 極端情況。當 $p\to 1$ 時，(iii) 的答案趨向 1；當 $p\to 0$ 時，它趨向 0，理應如此。
- 數值。當 $p=0.4$ 時，第 (i) 部分的答案為 $0.16\times 1.6/0.76\approx 0.3368$，第 (ii) 部分的答案約為 ≈ 0.2713。以電腦模擬 200 000 局遊戲，得到 0.336 和 0.271。當 $p=0.55$、$a=4$、$b=2$ 時，公式給出 0.2450，同樣與模擬結果吻合。

常見錯誤

- 忘記了一旦擲出的面改變，之前的連續便完全不算數。正因如此，改變之後的局面才與「該面為第一擲」相同。
- 在 (ii) 中漏掉 HHT 的情況：連續可以在第二次或第三次投擲時被打斷。
- 把 α 當作「A 獲勝的概率」的最終答案。你仍須對第一次投擲取平均，即 $p\alpha+q\beta$。

STEP 之外

這是對吸收馬爾可夫鏈（absorbing Markov chain）的首步分析（first-step analysis）。狀態是「目前的面及連續的長度」，而吸收概率滿足以下一步為條件所得的線性方程。同樣的技巧可以求出擲硬幣時各種圖案的期望等待時間，並引申至彭尼遊戲（Penney's game）：在該遊戲中，圖案的先後次序會產生一些令人意外的非傳遞（non-transitive）結果。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）以合適的程度講解了馬爾可夫鏈與吸收。

詳細解答

STEP II 2020，第 12 題

概率與統計 • 不公平骰子的不等式

STEP II 2020，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

各概率（probability）之和必須等於 1，所以各偏差（bias）滿足 $\sum \varepsilon_i = 0$。把這一點寫下來之後，展開 $\sum(\frac{1}{n}+\varepsilon_i)^2$ 時所有一次項都會消失，剩下的式子一眼就看得出是非負的。第 (ii) 部分其實是第 (i) 部分換了個樣子：把一組正數各自除以它們的總和，就得到某顆骰子（die）的各個概率。

解答

設 $p_i = \mathrm{P}(X=i) = \frac{1}{n}+\varepsilon_i$。由於 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$，

$$1 = n\cdot\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0.$$

另外每個 $p_i \geq 0$，所以對每個 i 都有 $\varepsilon_i \geq -\frac{1}{n}$。以下所有求和都是對 $i = 1,\ldots,n$ 進行。

第 (i) 部分

兩次擲骰是獨立（independent）的，所以兩次都擲出 i 的概率是 p_i^2，而對不同的 i，這些事件互斥（disjoint）。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{兩次點數相同}) &= \sum p_i^2 = \sum\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2\varepsilon_i}{n}+\varepsilon_i^2\right)\\ &= \frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sum\varepsilon_i+\sum\varepsilon_i^2 = \frac{1}{n}+\sum_{i=1}^n\varepsilon_i^2.\end{aligned}$$

對公平的骰子，每個 $\varepsilon_i = 0$，概率為 $\frac{1}{n}$。對有偏差的骰子，ε_i 不全為零，所以 $\sum\varepsilon_i^2 > 0$。因此，有偏差的骰子在連續兩次擲骰中擲出相同點數的可能性，高於公平的骰子。

第 (ii) 部分

先改寫這個二重和。它把所有 $j < i$ 的 $x_i x_j$ 加起來，也就是說，每一對不同下標組成的無序對恰好加一次。把 $S = \sum x_i$ 平方，會得到每個 x_i^2 各一次，以及每個這樣的無序對各兩次，所以

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(S^2 - \sum x_i^2\right).$$

? **想一想** 當 x_i 只是任意的正數時，骰子從何而來？

設 $p_i = x_i/S$。這些數都是正數，而且總和為 1，所以它們是某顆 n 面骰子的各個概率。由第 (i) 部分，$\sum p_i^2 = \frac{1}{n} + \sum \varepsilon_i^2 \geq \frac{1}{n}$（等號成立當且僅當骰子是公平的，即所有 x_i 相等）。兩邊乘以 $S^2 > 0$，

$$\sum x_i^2 \geq \frac{S^2}{n}.$$

因此

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(S^2 - \sum x_i^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(S^2 - \frac{S^2}{n}\right) = \frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

這正是所求的不等式（inequality）。當所有 x_i 相等時，等號成立。

第 (iii) 部分

現在概率是 $\sum p_i^3$。展開，並再次利用 $\sum \varepsilon_i = 0$，

$$\begin{aligned}\sum p_i^3 &= \sum\left(\frac{1}{n^3} + \frac{3\varepsilon_i}{n^2} + \frac{3\varepsilon_i^2}{n} + \varepsilon_i^3\right)\\ &= \frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3\varepsilon_i^2}{n} + \varepsilon_i^3\right) = \frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\left(\frac{3}{n} + \varepsilon_i\right).\end{aligned}$$

對公平的骰子，這個值是 $\frac{1}{n^2}$。

? **想一想** 立方項 ε_i^3 可以是負數。它們會不會蓋過平方項？

不會，因為偏差不可能負得太多：由 $p_i \geq 0$ 得 $\varepsilon_i \geq -\frac{1}{n}$，所以

$$\frac{3}{n} + \varepsilon_i \geq \frac{2}{n} > 0.$$

因此每一項 $\varepsilon_i^2\left(\frac{3}{n} + \varepsilon_i\right)$ 都 ≥ 0，而且只要 $\varepsilon_i \neq 0$ 就嚴格大於零；對有偏差的骰子，至少有一個 i 滿足這個條件。所以

$$\sum p_i^3 > \frac{1}{n^2},$$

即有偏差的骰子在連續三次擲骰中擲出相同點數的可能性，同樣高於公平的骰子。

驗算

- 取 $n = 4$，各概率為 $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$，於是 $\varepsilon = \frac{1}{4}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}$。直接計算得 $\sum p_i^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{36} = \frac{1}{3}$，而 $\frac{1}{4} + \sum \varepsilon_i^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{3}{144} = \frac{1}{3}$，比公平骰子的 $\frac{1}{4}$ 大。擲三次時，$\sum p_i^3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{216} = \frac{5}{36} \approx 0.139$，遠高於公平骰子的 $\frac{1}{16} = 0.0625$。
- 最極端的骰子總是擲出 1：這時兩個概率都是 1，即最大可能值。
- 在 (ii) 中，當 $n = 2$ 時不等式變成 $x_1 x_2 \le \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2$，這正是算術–幾何平均不等式（AM–GM）。(i)、(ii) 和 (iii) 中的不等式亦已用電腦在數以千計的隨機例子上驗證過。

常見錯誤

- 忘記 $\sum \varepsilon_i = 0$，結果留下一些正負號未知的一次項。
- 在 (iii) 中，沒有用 $\varepsilon_i \ge -\frac{1}{n}$，就斷言 $\sum \varepsilon_i^3$ 「很小」或可正可負；正是這個界令論證成立。
- 在 (ii) 中，把第 (i) 部分直接用在 x_i 本身，而不是用在 $x_i / \sum x_j$ 上；x_i 的總和不一定是 1。

STEP 之外

$\sum p_i^2$ 這個量稱為一個分佈的*碰撞概率*（collision probability），第 (i) 部分說明它在均勻分佈（uniform distribution）時最小；第 (iii) 部分則是關於 $\sum p_i^3$ 的同一結論。兩者都是函數 $t \mapsto t^k$ 的凸性（convexity）——即延森不等式（Jensen's inequality）——或冪平均不等式（power-mean inequality）的特例；而 $\sum p_i^k$ 的對數則給出資訊理論（information theory）和密碼學（cryptography）中使用的雷尼熵（Rényi entropy）。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）是在概率框架下認識這些概念的好起點。

詳細解答

STEP III 2020，第 1 題

純數學 • 歸約公式

STEP III 2020，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分是一條遞推公式（reduction formula），所以自然的第一步是分部積分法（integration by parts）：對 $\cos x$ 的冪求導，並對 $\cos bx$ 積分。這樣會剩下乘積 $\sin x \sin bx$，而 $\cos(b-1)x$ 的複角公式（compound-angle formula）可以把它變回原本類型的積分。第 (ii) 部分不需要任何新工具：遞推關係（recurrence relation）把 a 和 b 同時減一，使差 $b-a = 2m+1$ 保持不變，因此可以順利地由 n 推進到 $n+1$。

解答

第 (i) 部分

設 $a, b \geq 1$。取 $u = \cos^a x$ 及 $\mathrm{d}v = \cos bx\,\mathrm{d}x$ 進行分部積分，於是 $\mathrm{d}u = -a\cos^{a-1}x \sin x\,\mathrm{d}x$，而 $v = \frac{1}{b}\sin bx$（由於 $b \neq 0$，這樣做沒有問題）：

$$\mathrm{I}(a,b) = \left[\frac{\cos^a x \sin bx}{b}\right]_0^{\pi/2} + \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1} x \sin x \sin bx\,\mathrm{d}x.$$

邊界項在兩端都等於零：在 $x = \frac{\pi}{2}$ 處是因為 $\cos^a \frac{\pi}{2} = 0$（這裏用到 $a \geq 1$），而在 $x = 0$ 處是因為 $\sin 0 = 0$。

想一想 怎樣才能把 $\sin x \sin bx$ 變回 x 的倍數的餘弦？

我們希望出現 $\mathrm{I}(a-1, b-1)$，所以考慮 $\cos(b-1)x$：

$$\cos(b-1)x = \cos bx \cos x + \sin bx \sin x \quad \Longrightarrow \quad \sin x \sin bx = \cos(b-1)x - \cos x \cos bx.$$

代入後得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2}\cos^{a-1}x\,\cos(b-1)x\,\mathrm{d}x - \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2}\cos^{a}x\,\cos bx\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1) - \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a,b).\end{aligned}$$

兩邊乘以 b，再把含 $\mathrm{I}(a,b)$ 的項合併，得 $(a+b)\,\mathrm{I}(a,b) = a\,\mathrm{I}(a-1,b-1)$；由於 $a+b>0$，

$$\mathrm{I}(a,b) = \frac{a}{a+b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1),$$

此即所求。

第 (ii) 部分

左邊的積分是 $\mathrm{I}(n,\,n+2m+1)$。記右邊為

$$R(n,m) = (-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}$$

。固定任意非負整數 m；我們對 n 用數學歸納法 (induction) 證明對所有 $n\ge 0$，$\mathrm{I}(n,n+2m+1) = R(n,m)$。

基本情況， $n=0$。

$$\mathrm{I}(0,2m+1) = \int_0^{\pi/2}\cos(2m+1)x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2m+1},$$

因為 $\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \cos m\pi = (-1)^m$。另一方面，

$$R(0,m) = (-1)^m\,\frac{1\cdot 1\cdot(2m)!\,m!}{m!\,(2m+1)!} = \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

所以結果在 $n=0$ 時成立。

歸納步驟。假設對某個 $k\ge 0$，$\mathrm{I}(k,k+2m+1) = R(k,m)$。在第 (i) 部分中取 $a=k+1$ 及 $b=k+2m+2$，兩者都是正整數，於是 $a-1=k$、$b-1=k+2m+1$ 而 $a+b = 2k+2m+3$：

$$\mathrm{I}(k+1,\,k+2m+2) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,\mathrm{I}(k,\,k+2m+1) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m).$$

留意 $k+2m+2 = (k+1)+2m+1$，所以左邊正正是 $n=k+1$ 且 m 不變時的積分。

> ? **想一想** 按公式，$R(k+1,m)/R(k,m)$ 應該等於甚麼？

在 R 中由 $n=k$ 變到 $n=k+1$ 時，因子 $(-1)^m(2m)!/m!$ 不變，而

$$\begin{aligned}\frac{R(k+1,m)}{R(k,m)} &= \frac{2^{k+1}}{2^k}\cdot\frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{(k+m+1)!}{(k+m)!}\cdot\frac{(2k+2m+1)!}{(2k+2m+3)!}\\ &= \frac{2(k+1)(k+m+1)}{(2k+2m+3)(2k+2m+2)} = \frac{k+1}{2k+2m+3},\end{aligned}$$

這裏用到 $2k+2m+2=2(k+m+1)$。因此

$$\mathrm{I}(k+1,\,k+2m+2)=\frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m)=R(k+1,m),$$

這就是 $n=k+1$ 時的命題。

由於結果在 $n=0$ 時成立，而且它在 $n=k$ 時成立可推出它在 $n=k+1$ 時成立，根據數學歸納法，它對所有非負整數 n 都成立。由於 m 是任意的，它對所有非負整數 m 也成立：

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\cos(n+2m+1)x\,\mathrm{d}x=(-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}.$$

驗算

- 取 $n=1$、$m=0$：公式給出 $\frac{2\cdot1\cdot1\cdot1}{1\cdot3!}=\frac{1}{3}$。直接計算，$\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的積分是 $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{1}{3}$。
- 取 $n=1$、$m=1$：公式給出 $-\frac{2\cdot2\cdot2}{5!}=-\frac{1}{15}$，而以數值方法計算 $\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 5x\,\mathrm{d}x$ 得 -0.066667。
- 第 (i) 部分的遞推關係和第 (ii) 部分的閉合形式，亦已用電腦就所有 $n\le 6$、$m\le 5$ 驗證過。

常見錯誤

- 忘記說明邊界項為何等於零；上限處需要 $a\ge 1$。
- 對 n 進行歸納，卻讓 m 跟着改變：第 (i) 部分把 a 和 b 一同減一，所以 m 保持不變。
- 在 $\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)$ 中弄錯正負號；它依次為 $1,-1,1,\ldots$，因而給出 $(-1)^m$。

STEP 之外

這類遞推公式是遞推關係在積分上的對應，而閉合形式由階乘（factorial）的比構成，方式與沃利斯乘積（Wallis's product）及 Beta 函數（Beta function）$\int_0^{\pi/2}\cos^p x\sin^q x\,\mathrm{d}x$ 相同；這些內容在大學分析或數學方法課程的早期便會遇到。如想做更多同類題目，可參閱 Siklos，*Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）。

詳細解答

STEP III 2020，第 2 題

純數學 • 雙曲函數曲線描繪

STEP III 2020，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

進行隱函數求導（implicit differentiation），並反覆利用 $\cosh^2 = 1 + \sinh^2$ 把一切化回 sinh 的形式：這樣二階導數的條件便可以因式分解，而其中一個因子正是曲線本身的方程。至於直線 $x + y = a$，代入 $y = a - x$ 並把所有項寫成指數形式；要有實數交點，判別式（discriminant）必須非負，由此便得出 $\cosh a$ 的界限。

解答

第 (i) 部分

由於 sinh 是 $\mathbb{R}$ 上的雙射（bijection），對每個 x，恰好有一個 y 使 $\sinh y = 2k - \sinh x$。因此 C 是函數 $y = \operatorname{arsinh}(2k - \sinh x)$ 的圖像，對所有實數 x 均有定義，我們可以進行隱函數求導：

$$\cosh x + \cosh y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\cosh x}{\cosh y}.$$

由於 $\cosh x \geq 1$，斜率（gradient）永不為零（它總是負數），所以 C 沒有駐點（stationary point）。

再求導一次，記 $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，得

$$\sinh x + \sinh y \, (y')^2 + \cosh y \, y'' = 0.$$

代入 $y' = -\cosh x / \cosh y$，並在兩邊乘以 $\cosh^2 y$：

$$\begin{aligned}\cosh^3 y\, y'' &= -\left(\sinh x \cosh^2 y + \sinh y \cosh^2 x\right)\\ &= -\left(\sinh x\,(1+\sinh^2 y) + \sinh y\,(1+\sinh^2 x)\right)\\ &= -(\sinh x + \sinh y) - \sinh x \sinh y\,(\sinh y + \sinh x)\\ &= -(\sinh x + \sinh y)(1 + \sinh x \sinh y).\end{aligned}$$

在 C 上，第一個因子等於 $2k$，所以

$$y'' = -\frac{2k\,(1+\sinh x \sinh y)}{\cosh^3 y}.$$

由於 $k > 0$ 且 $\cosh y > 0$，可知 $y'' = 0$ 當且僅當 $1 + \sinh x \sinh y = 0$，此即所求。

想一想 單憑 $y'' = 0$ 足以斷定該點是拐點嗎？

不足夠：我們還需要 y'' 變號。設 $s = \sinh x$ 及 $t = \sinh y$。在 $y'' = 0$ 的點上，我們有 $s + t = 2k$ 及 $st = -1$，所以 s 和 t 是 $u^2 - 2ku - 1 = 0$ 的兩個根：

$$u = k \pm \sqrt{k^2+1}.$$

一個根為正，另一個為負；s 可取其中任一個值，t 則取另一個。沿着曲線，$1 + st = 1 + s(2k - s) = -(s^2 - 2ks - 1)$ 是 s 的二次式，有兩個單根，所以在每個根處都會變號。由於 $s = \sinh x$ 是 x 的遞增函數，y'' 在這兩點的確會變號。因此拐點（point of inflection）為

$$\left(\operatorname{arsinh}\left(k+\sqrt{k^2+1}\right),\ \operatorname{arsinh}\left(k-\sqrt{k^2+1}\right)\right) \quad \text{及}$$
$$\left(\operatorname{arsinh}\left(k-\sqrt{k^2+1}\right),\ \operatorname{arsinh}\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)\right).$$

它們互為關於 $y = x$ 的反射，這正合預期，因為 C 的方程對 x 和 y 是對稱的。

第 (ii) 部分

在直線上，$y = a - x$。利用 $2\sinh u = \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}$，把 C 的方程乘以 2 後變成

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{a-x} - \mathrm{e}^{x-a} = 4k.$$

乘以 e^x 得 $\mathrm{e}^{2x} - 1 + \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{2x-a} = 4k\mathrm{e}^x$，即

$$\mathrm{e}^{2x}(1 - \mathrm{e}^{-a}) - 4k\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^a - 1) = 0,$$

此即所求的方程。

想一想 這樣的點存在，對這個方程意味着甚麼？

它是 $X = \mathrm{e}^x$ 的二次方程（只要首項係數不為零），而且必須有實根。

首先，$a \neq 0$：若 $a = 0$，方程會退化為 $-4k\mathrm{e}^x = 0$，由於 $k > 0$，這是不可能的。因此 $\cosh a > 1$。

當 $a \neq 0$ 時，首項係數 $1 - \mathrm{e}^{-a}$ 不為零，所以該二次方程有實根，僅當其判別式非負：

$$16k^2 - 4(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) \geq 0.$$

而 $(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) = \mathrm{e}^a - 2 + \mathrm{e}^{-a} = 2\cosh a - 2$，所以條件為 $16k^2 \geq 8(\cosh a - 1)$，即 $\cosh a \leq 2k^2 + 1$。合起來，

$$1 < \cosh a \leq 2k^2 + 1.$$

所以 C 上每一點的 $x + y$ 都介乎 $-2\operatorname{arsinh} k$ 與 $2\operatorname{arsinh} k$ 之間（因為 $\cosh(2\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2\sinh^2(\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2k^2$），而且 $x + y \neq 0$。

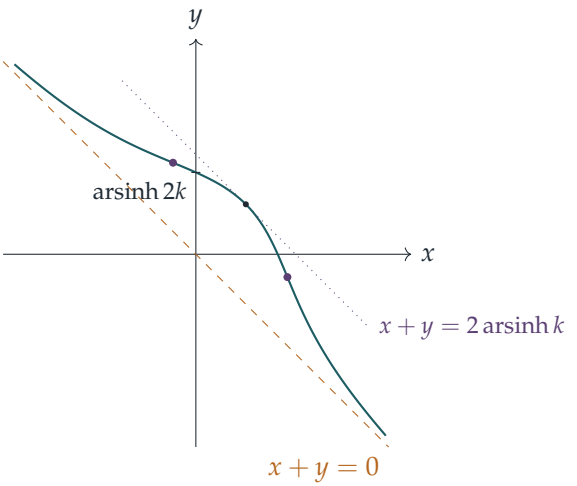
事實上，在 C 上 $x + y > 0$。若 $a < 0$，則 $1 - \mathrm{e}^{-a} < 0$ 且 $\mathrm{e}^a - 1 < 0$，所以該二次方程的三個係數全是負數，因而沒有正根 X。（等價地，$\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$，其正負號與 $x + y$ 相同。）最大值 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$ 出現在 $x = y = \operatorname{arsinh} k$，此時判別式為零，直線剛好與 C 相切。

第 (iii) 部分

綜合已知的結果：

- C 關於直線 $y = x$ 對稱，並只在 $(\operatorname{arsinh} k, \operatorname{arsinh} k)$ 與之相交，該處的斜率為 -1。
- y 對所有 x 均有定義，且斜率總是負數。曲線與坐標軸相交於 $(\operatorname{arsinh} 2k, 0)$ 及 $(0, \operatorname{arsinh} 2k)$。
- $0 < x + y \leq 2\operatorname{arsinh} k$，所以 C 位於直線 $x + y = 0$ 上方、直線 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$ 上或其下方的帶狀區域內，而後者在 C 位於 $y = x$ 上的那一點與 C 相切。
- 當 $x \to +\infty$，$\sinh y = 2k - \sinh x \to -\infty$，且 $\mathrm{e}^{-y} \approx \mathrm{e}^x - 4k$，所以 $x + y \approx -\ln(1 - 4k\mathrm{e}^{-x}) \approx 4k\mathrm{e}^{-x} \to 0^+$。由對稱性，當 $x \to -\infty$ 時情況相同。因此 $x + y = 0$ 是曲線兩端的漸近線（asymptote），曲線從上方趨近它。
- 由 y'' 的公式可知，在兩個拐點之間，即 $1 + \sinh x \sinh y > 0$ 之處（例如 $y = x$ 上的那一點），曲線是凹的（concave，位於其切線下方）；在兩個拐點以外，曲線是凸的（convex）。

下圖顯示 $k = 1$ 的情況，並標出了拐點。



驗算

- 當 $k = 1$，拐點位於 $\left(\operatorname{arsinh}(1+\sqrt{2}), \operatorname{arsinh}(1-\sqrt{2})\right) \approx (1.615, -0.403)$ 及其鏡像；在兩側計算 $y = \operatorname{arsinh}(2 - \sinh x)$ 的二階差分，確認 y'' 在該處變號；在 $-8 \le x \le 8$ 範圍內掃描，找不到 y'' 的其他零點。
- 公式 $y'' = -2k(1 + \sinh x \sinh y)/\cosh^3 y$ 在許多隨機點、對多個 k 值，都與數值二階導數吻合。
- 當 $k = 1$ 及 $x = 6$，$x + y \approx 0.00996$，接近預測值 $4\mathrm{e}^{-6} \approx 0.00992$：一如所述，曲線從上方趨近漸近線。
- 在 $x = y = \operatorname{arsinh} k$，$\cosh(x+y) = 1 + 2\sinh^2 x = 1 + 2k^2$：第 (ii) 部分的上界可以達到。

常見錯誤

- 只得出 $y'' = 0$ 便停下，沒有檢查 y'' 是否變號。這裏它確實變號，但必須說明。
- 忘記排除 $a = 0$，而正是這一點令左邊的不等式成為嚴格不等式。
- 只寫出一個拐點。$u^2 - 2ku - 1 = 0$ 的任一個根都可以是 $\sinh x$，因此得出兩個關於 $y = x$ 互為鏡像的點。

STEP 之外

旋轉後的坐標 $u = x + y$、$v = x - y$ 令這條曲線一目了然：恆等式 $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{u}{2}\cosh\frac{v}{2}$ 把 C 化為 $\sinh\frac{u}{2} = k\,\mathrm{sech}\frac{v}{2}$，即在漸近線 $u = 0$ 上方的單一隆起。選取與對稱性相配合的坐標，是大學一年級微積分和線性代數中貫穿始終的主題（把二次型（quadratic form）對角化正是同一個想法）。隱函數曲線，以及方程 $F(x, y) = 0$ 在甚麼情況下真正把 y 定義為 x 的光滑函數，是隱函數定理（implicit function theorem）的研究對象；Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）對其背後的單變量分析有嚴謹的闡述。

詳細解答

STEP III 2020，第 3 題

純數學 • 幾何中的複數

STEP III 2020，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

在複數平面（complex plane）上，以 a 為中心、轉角為 θ 的旋轉（rotation）不過就是 $z \mapsto a + (z-a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，因此 G_{AB} 是 a 和 b 的一個明確的線性組合（linear combination）。一旦第 (i) 部分給出這條公式，幾何問題便化為代數問題：平行四邊形（parallelogram）是頂點所滿足的一個線性條件，而等邊三角形（equilateral triangle）則是某一邊等於另一邊轉過一個固定角度。整道題目只建基於關於 ω 的冪的幾個事實。

解答

全文中，$\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$，故 $\omega^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$，並記

$$\rho = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

我們會用到以下三個事實：

$$\omega^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \qquad \omega^3 = \mathrm{i}, \qquad \omega - \omega^* = 2\mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6} = \mathrm{i}.$$

第 (i) 部分

順時針（clockwise）旋轉 $\frac{1}{3}\pi$ 相當於乘以 ρ。以 A 為中心旋轉，意思是把位移（displacement）$b-a$ 旋轉，再加回到 a 上，所以

$$k = a + (b-a)\rho.$$

因此 ABK 的形心（centroid）為

$$g_{ab} = \tfrac{1}{3}(a+b+k) = \tfrac{1}{3}\left[(2-\rho)\,a + (1+\rho)\,b\right].$$

接着整理兩個係數：

$$2-\rho=\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{3}\,\omega,$$
$$1+\rho=\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{3}\,\omega^*.$$

於是

$$g_{ab}=\tfrac{1}{3}\left(\sqrt{3}\,\omega a+\sqrt{3}\,\omega^* b\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\omega a+\omega^* b\right),$$

此即所求。

第 (ii) 部分

四邊形（quadrilateral）$PQRS$（頂點依此次序排列）是平行四邊形，當且僅當 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$，即 $q-p=r-s$，亦即

$$p-q+r-s=0.$$

（這等同於說對角線（diagonal）PR 與 QS 有相同的中點（midpoint）。）所以 Q_1 是平行四邊形當且僅當 $a-b+c-d=0$，而 Q_2 是平行四邊形當且僅當

$$g_{ab}-g_{bc}+g_{cd}-g_{da}=0.$$

對四個點各自運用第 (i) 部分的結果，

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\left(g_{ab}-g_{bc}+g_{cd}-g_{da}\right)&=(\omega a+\omega^* b)-(\omega b+\omega^* c)+(\omega c+\omega^* d)-(\omega d+\omega^* a)\\&=(\omega-\omega^*)a-(\omega-\omega^*)b+(\omega-\omega^*)c-(\omega-\omega^*)d\\&=\mathrm{i}\,(a-b+c-d).\end{aligned}$$

因此

$$g_{ab}-g_{bc}+g_{cd}-g_{da}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\,(a-b+c-d),$$

由於 $\mathrm{i}/\sqrt{3}\neq 0$，一邊為零當且僅當另一邊為零。所以 Q_1 是平行四邊形當且僅當 Q_2 是平行四邊形。

想一想 Q_2 有沒有可能滿足平行四邊形條件，卻退化成有兩個頂點重合？

有的，在一個特殊情況下會發生。若 ABC 是一個按順時針標記的等邊三角形，那麼把 B 繞 A 順時針旋轉便會落在 C 上，因此 G_{AB} 和 G_{BC} 都是 ABC 的形心。把它補成菱形（rhombus）$ABCD$，Q_2 就壓扁成一條線段。此時條件 $p-q+r-s=0$ 仍然成立，所以這個等價關係實際上是關於這個向量條件的陳述，而在這類題目中，「平行四邊形」指的正是這個條件。

第 (iii) 部分

我們證明 T_2 的某一邊（作為向量）等於另一邊轉過一個固定角度。由第 (i) 部分，

$$\sqrt{3}\,(g_{bc} - g_{ab}) = (\omega b + \omega^* c) - (\omega a + \omega^* b) = -\omega a + \mathrm{i}\,b + \omega^* c,$$
$$\sqrt{3}\,(g_{ca} - g_{bc}) = (\omega c + \omega^* a) - (\omega b + \omega^* c) = \omega^* a - \omega b + \mathrm{i}\,c,$$

每一行都用了 $\omega - \omega^* = \mathrm{i}$。

想一想 哪個數 λ 能把第二個括號變成第一個？

比較 a 的係數，必須有 $\lambda\omega^* = -\omega$，所以 $\lambda = -\omega/\omega^* = -\omega^2 = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}$。同一個 λ 對 b 和 c 亦適用：

$$\lambda \cdot (-\omega) = \omega^3 = \mathrm{i},$$
$$\lambda \cdot \mathrm{i} = -\omega^2 \cdot \omega^3 = -\omega^5 = -\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/6} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = \omega^*.$$

因此，對所有 a、b、c，

$$g_{bc} - g_{ab} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\,(g_{ca} - g_{bc}).$$

取模（modulus），由於 $\left|\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\right| = 1$，得 $G_{AB}G_{BC} = G_{BC}G_{CA}$。此外，沿 T_2 行進的方向在 G_{BC} 處轉過 $\frac{2}{3}\pi$，所以 T_2 在 G_{BC} 處的內角（interior angle）為 $\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$。一個三角形若有兩條相等的邊夾着 $\frac{1}{3}\pi$ 的角，便是等腰（isosceles）三角形，其底角為 $\frac{1}{2}(\pi - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{3}\pi$，所以三個角都是 $\frac{1}{3}\pi$，T_2 是等邊三角形。

唯一的例外是 $g_{ca} = g_{bc}$ 的情況，此時上述關係亦給出 $g_{ab} = g_{bc}$，所以 T_2 縮成一點。把 $\omega^* a - \omega b + \mathrm{i}c = 0$ 乘以 ω，得 $a - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}b + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}c = 0$，這恰好在 ABC 本身是按順時針標記的等邊三角形時發生（正如第 (ii) 部分的備註所述）。其他任何三角形 T_1（包括退化（degenerate）三角形）都給出一個真正的等邊三角形 T_2。

驗算

- 取 $a = 0$、$b = 1$。則 $k = \rho$，而 $0, 1, \rho$ 的形心為 $\frac{1}{3}(1 + \rho) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$。公式給出 $\omega^*/\sqrt{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{i}$，是同一個數。
- 取 $a = 0$、$b = 1$、$c = \mathrm{i}$（一個直角三角形），T_2 三個點兩兩之間的距離都約為 1.1154。以電腦對 10^4 個隨機三角形和四邊形進行檢驗，在捨入誤差範圍內證實了第 (ii) 和第 (iii) 部分的恆等式。

常見錯誤

- 把 b 繞原點而非繞 A 旋轉，寫成 $k = b\rho$。

- 用 $e^{+i\pi/3}$ 表示順時針旋轉。順時針是負方向。
- 在第 (ii) 部分只證明了一個方向。正是因子 $i/\sqrt{3}$ 不為零，才得出「當且僅當」。

STEP 之外

第 (iii) 部分就是拿破崙定理（Napoleon's theorem）。在任意三角形的各邊上作等邊三角形（這裏當 *ABC* 按逆時針標記時是向外作），它們的形心構成一個等邊三角形。複數證明之所以奏效，是因為旋轉和形心都是平面的線性映射（linear map）。這正是研究幾何中變換羣（transformation group）的起點。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）對複數乘法的這種幾何觀點有十分精彩的論述。

詳細解答

STEP III 2020，第 4 題

純數學 • 反射矩陣與旋轉矩陣

STEP III 2020，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

開首那個結果，其實就是整道題目的化身。減去 $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ 會把一點直接垂直移到平面上，所以減去兩倍這個量，就會把它移到平面另一邊同樣距離之處，這正是反射（reflection）。一旦把反射寫成 $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}-2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$，它的矩陣（matrix）、繞 $\mathbf{n}$ 的半轉（half-turn），以及兩者的乘積，都只需很少計算便可得出。

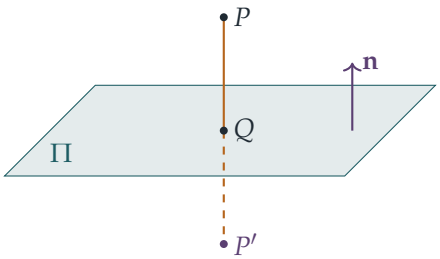
解答

開首的結果

設 $\mathbf{q}=\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$。由於 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$，

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=0,$$

所以 Q 位於 Π 上。此外，$\overrightarrow{PQ}=\mathbf{q}-\mathbf{x}=-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$，是法向量（normal）$\mathbf{n}$ 的倍數。由於 P 不在 Π 上（因此 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\neq 0$），這個向量不是零向量。故此 PQ 垂直於 Π，得證。



這幅圖也顯示了我們的方向：P 在 Π 中的鏡像 P' 位於 Q 另一邊，與 Q 的距離等於 P 在

Q 上方的距離，所以它的位置向量（position vector）是

$$\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.$$

（若 P 在 Π 上，這條公式給出 P 本身，同樣正確。）

第 (i) 部分

取 $\mathbf{n} = (a,b,c)^{\mathsf{T}}$，由於 $a^2+b^2+c^2 = 1$，它是單位法向量（unit normal）。對於 $\mathbf{i}$，有 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{n} = a$，所以

$$T(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2a\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix},$$

其中第一個分量用了 $1 = a^2+b^2+c^2$。這就是所求的像。同理，利用 $\mathbf{j}\cdot\mathbf{n} = b$ 及 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = c$，

$$T(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix}-2ab\\a^2+c^2-b^2\\-2bc\end{pmatrix}, \qquad T(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix}-2ac\\-2bc\\a^2+b^2-c^2\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{M}$ 的各行（column）就是 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 的像，所以

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & a^2+c^2-b^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2\end{pmatrix} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}.$$

第 (ii) 部分

把已知矩陣與 $\mathbf{M}$ 對比，並把各對角元素寫成 $1-2a^2$、$1-2b^2$、$1-2c^2$：

$$1-2a^2 = 0.64, \quad 1-2b^2 = 0.36, \quad 1-2c^2 = 0 \implies a^2 = 0.18, \quad b^2 = 0.32, \quad c^2 = 0.5.$$

所以 $|a| = \frac{3}{5\sqrt{2}}$、$|b| = \frac{4}{5\sqrt{2}}$ 及 $|c| = \frac{5}{5\sqrt{2}}$。

想一想 對角線只給出 a^2,b^2,c^2。我們怎樣確定正負號？

非對角元素給出各乘積：

$$-2ab = 0.48, \quad -2ac = 0.6, \quad -2bc = -0.8 \implies ab = -0.24, \quad ac = -0.3, \quad bc = 0.4.$$

所以 b 與 c 同號，而 a 與它們異號。把 (a,b,c) 換成 $(-a,-b,-c)$ 不會改變任何東西（仍是同一個平面），所以可取 $c>0$，得

$$(a,b,c) = \tfrac{1}{5\sqrt{2}}(-3,\,4,\,5).$$

這些值給出 $ab = -\frac{12}{50}$、$ac = -\frac{15}{50}$ 及 $bc = \frac{20}{50}$，因此全部六個獨立元素都吻合。兩邊乘以 $-5\sqrt{2}$，平面為

$$3x - 4y - 5z = 0.$$

第 (iii) 部分

把任何向量分拆為 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + \big(\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\big)$，即沿軸的部分加上垂直於軸的部分（由開首的結果可知）。繞軸旋轉 π 會保持第一部分不變，並把第二部分反向，所以

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \big(\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\big) = 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{x}.$$

這正是 $-T(\mathbf{x})$。因此 $\mathbf{N} = 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} - \mathbf{I} = -\mathbf{M}$，即

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & b^2 - a^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & c^2 - a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

第 (iv) 部分

> **想一想** 這裏我們需要把兩個以 a、b、c 表示的 3×3 矩陣相乘嗎？

不需要。由 (iii)，$\mathbf{NM} = -\mathbf{M}^2$。在同一平面中反射兩次，會把每一點帶回原處，所以 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$。（從代數上看，由於 $\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n} = 1$，$(\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}})^2 = \mathbf{I} - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} + 4\mathbf{n}(\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n})\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$。）因此

$$\mathbf{NM} = -\mathbf{I},$$

它把每個 $\mathbf{x}$ 映射到 $-\mathbf{x}$。這是關於原點的反射，又稱為中心反演（central inversion），或以原點為中心、比例因子為 -1 的放大（enlargement）。留意它完全不依賴 a、b 或 c。

驗算

- $\mathbf{M}$ 的每一行都應是單位向量。以第一行為例，$(b^2+c^2-a^2)^2 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 = (b^2+c^2+a^2)^2 = 1$。
- 在 (ii) 中，法向量 $(3,-4,-5)$ 應被映射到其負向量。已知矩陣把它映射到 $(1.92 - 1.92 - 3,\ 1.44 - 1.44 + 4,\ 1.8 + 3.2) = (-3,4,5)$。正確。
- 取 $\mathbf{n} = \mathbf{k}$，則 $\mathbf{M} = \operatorname{diag}(1,1,-1)$，即在 $z = 0$ 中的反射，而 $\mathbf{N} = \operatorname{diag}(-1,-1,1)$，即繞 z 軸的半轉。兩者的乘積顯然是 $-\mathbf{I}$。
- 用電腦以 1000 個隨機單位向量 $\mathbf{n}$ 驗算，確認了 $\mathbf{M}$ 的公式、$\mathbf{N}$ 保持 $\mathbf{n}$ 不變並把垂直向量反向，以及 $\mathbf{NM} = -\mathbf{I}$。(ii) 中的矩陣亦在 10^{-15} 的誤差內重現。

常見錯誤

- 把 $\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ 當作反射。這其實是垂足（foot of the perpendicular），漏了因子 2。
- 在 (ii) 中，從平方根獨立地選取 a, b, c 的正負號。只有非對角元素才能確定它們之間的相對正負號。
- 說 **NM** 是「恆等矩陣」。反射的行列式（determinant）是 -1，旋轉的行列式是 $+1$，所以乘積的行列式是 -1。在三維中 $\det(-\mathbf{I}) = -1$，兩者一致。

STEP 之外

矩陣 $\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ 稱為豪斯霍爾德反射（*Householder reflection*）。數值線性代數經常用它把矩陣化為三角形式，而且 n 維中的每個正交矩陣（orthogonal matrix）都是最多 n 個這類反射的乘積。第 (iv) 部分是這個結構的一個小例子：在 $\mathbb{R}^3$ 中，半轉與在垂直平面中的反射複合，得出 $-\mathbf{I}$。關於正交矩陣、投影和反射，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

詳細解答

STEP III 2020，第 5 題

純數學 • 部分分式

STEP III 2020，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

開首的恆等式其實就是變了裝的有限等比級數（geometric series），而正是它把 $(1-(x/k)^n)/(x-k)$ 化成一個明確的多項式。這樣便可得到 $1/(x^n(x-k))$ 完整的部分分式分解（partial-fraction decomposition），而無須進行繁重的係數比較。接着求導，便得出含重複因子（repeated factor）$(x-k)^2$ 的分解；最後的積分只是其中一個特例，當中每一項都可以直接積分。

解答

開首的恆等式

展開右方，並把它拆成兩個和：

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r-1} &= \sum_{r=1}^{n} x^{n-r+1}y^{r-1} - \sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r} \\ &= \left(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1}\right) - \left(x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n\right) \\ &= x^n - y^n,\end{aligned}$$

這是因為除了 x^n（來自第一個和中 $r=1$ 的項）和 y^n（來自第二個和中 $r=n$ 的項）之外，每一項都在兩個括號中各出現一次，因而互相抵消。

第 (i)(a) 部分

把 $\mathrm{F}(x) = \dfrac{A}{x-k} + \dfrac{\mathrm{f}(x)}{x^n}$ 兩邊乘以 $x^n(x-k)$，得

$$1 = Ax^n + \mathrm{f}(x)(x-k).$$

這是多項式之間的恆等式，對所有 $x \neq 0, k$ 成立，因此對所有 x 都成立（在無限多個點上相等的兩個多項式必然相同）。代入 $x = k$ 得 $1 = Ak^n$，所以 $A = 1/k^n$（這是容許的，因為 $k \neq 0$）。於是

$$\mathrm{f}(x)(x-k) = 1 - \frac{x^n}{k^n}, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{1}{x-k}\left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n\right)$$

對 $x \neq k$ 成立，正如所求。

? **想一想** 怎樣才能把它化成分母不含 $x-k$ 的形式？

在開首的恆等式中，以 1 代替 x，以 x/k 代替 y：

$$1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{k}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{x}{k}\right)^{r-1} = -\frac{x-k}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}.$$

除以 $x-k$，

$$\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{f}(x)}{x^n} = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{r-1}x^{n+1-r}}.$$

（這亦證實了 f 確實是多項式。）現在以 $s = n+1-r$ 重新編號：當 r 取遍 $1, \ldots, n$ 時，它亦同樣取遍這些值；此時 $r-1 = n-s$，而這個和變成 $\sum_{s=1}^{n} 1/(k^{n-s}x^s)$。因此

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{k^n(x-k)} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{n-r}x^r}.$$

第 (i)(b) 部分

由於 $x^n\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{x-k}$，用乘積法則（product rule）對兩邊求導，得

$$nx^{n-1}\mathrm{F}(x) + x^n\mathrm{F}'(x) = -\frac{1}{(x-k)^2}.$$

除以 $-x^n$（這沒有問題，因為 $x \neq 0$）：

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = -\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x).$$

由 (a) 部分，

$$-\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) = -\frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

而把 (a) 部分的結果逐項求導，得

$$-\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{k^{n-r}x^{r+1}} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \sum_{r=1}^{n}\frac{r}{k^{n+1-r}x^{r+1}}.$$

兩式相加，兩個和合併後得

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n-r}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

在 (b) 部分中取 $n=3$ 及 $k=1$。和式中 $r=3$ 的項為零，於是

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{x(x-1)}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}.$$

中間一項還需再拆一次：$\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$。在 $[2,N]$ 上所有項都連續，且 $x-1>0$，因此在該區間上的一個原函數（antiderivative）是

$$G(x)=-\frac{1}{x-1}-3\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2},$$

而

$$\int_2^N \frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=G(N)-G(2).$$

想一想 為甚麼必須把兩個對數放在一起？

分開來看，$-3\ln(N-1)$ 和 $+3\ln N$ 各自趨向無限大，所以不能逐項取極限。合併後，當 $N\to\infty$ 時 $\ln\big((N-1)/N\big)=\ln\big(1-\frac{1}{N}\big)\to\ln 1=0$，因為 ln 在 1 處連續。$G(N)$ 的其餘三項顯然都趨向 0，所以 $G(N)\to 0$。

最後，

$$G(2)=-1-3\ln\tfrac{1}{2}-1-\tfrac{1}{8}=3\ln 2-\tfrac{17}{8},$$

所以

$$\lim_{N\to\infty}\int_2^N \frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{17}{8}-3\ln 2.$$

驗算

- 由於被積函數為正，答案必須是正數：確實 $\frac{17}{8}-3\ln 2\approx 2.1250-2.0794=0.0456$。
- 答案亦應該很小：被積函數在 $x=2$ 時為 $\frac{1}{8}$，之後大約以 x^{-5} 的速度遞減。粗略地以 $\frac{1}{8}(2/x)^5$ 作上界，可知積分最多為 $\int_2^\infty 4x^{-5}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{16}$。數值積分亦證實其值為 $0.045558\ldots$，準確至多個小數位。
- 在 (b) 部分中試取 $n=1$。和式為零（它唯一的一項有 $n-r=0$），而右方為 $\dfrac{1}{k(x-k)^2}-\dfrac{1}{xk(x-k)}=\dfrac{x-(x-k)}{xk(x-k)^2}=\dfrac{1}{x(x-k)^2}$，與預期一致。

常見錯誤

- 把 $1-x/k$ 寫成 $-(x-k)/k$ 時弄錯正負號。

- 在 (a) 部分忘記把和式重新編號，結果 k 和 x 的冪次與目標不符。
- 把 $\ln\big((x-1)/x\big)$ 拆成兩個對數，然後聲稱積分發散，或者寫出「$\infty-\infty=0$」。

STEP 之外

你所建立的，正是對形如 x^n 和 $(x-k)^m$ 的因子的一般部分分式分解；對 x 求導（或對根 k 求導）是產生重複因子項的標準方法。判斷無限區間上的積分是否收斂（如第 (ii) 部分），是大學第一門分析課程中瑕積分（improper integrals）的課題。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對這類極限有細緻的處理。

詳細解答

STEP III 2020，第 6 題

純數學 • 極坐標曲線與面積

STEP III 2020，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

三個部分都建基於同一個函數 $\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}$。$C_2$ 的方程是關於 r 的二次方程（quadratic），其兩個根為 $\cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$。因此 C_2 就是 C_1（較大的根）再加上第二條位於內側的分支（較小的根），而兩條分支在判別式（discriminant）$\cos 2\theta$ 等於零之處相接。掌握了這一點，兩條分支之間的面積便化為單一個積分，因為 $r_+^2 - r_-^2$ 可以因式分解。

解答

第 (i) 部分

設 $y = \cos x + \sqrt{\cos 2x}$。它恰好在 $\cos 2x \geq 0$ 時為實數，而在給定區間上，這正是整個 $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$。此函數是偶函數（even function），所以圖像對稱於 y 軸。

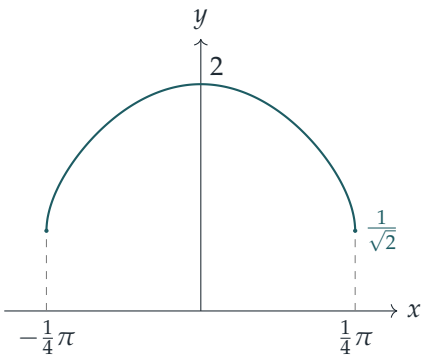
數值。在 $x = 0$ 時，$y = 2$。在 $x = \pm\frac{1}{4}\pi$ 時，$\cos 2x = 0$，而 $y = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$。

斜率。當 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 時，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin x - \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} < 0,$$

因為在該範圍內兩項皆為負。所以當 x 由 0 增至 $\frac{1}{4}\pi$ 時，y 由 2 遞減至 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，最大值位於 $(0, 2)$。當 $x \to \frac{1}{4}\pi^-$ 時，$\sqrt{\cos 2x} \to 0^+$ 而 $\sin 2x \to 1$，故 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to -\infty$：曲線以鉛垂切線（tangent）到達端點。

$x = 0$ 附近。利用 $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ 及 $\sqrt{\cos 2x} \approx \sqrt{1 - 2x^2} \approx 1 - x^2$，得 $y \approx 2 - \frac{3}{2}x^2$，是一個平滑的極大點。



第 (ii) 部分

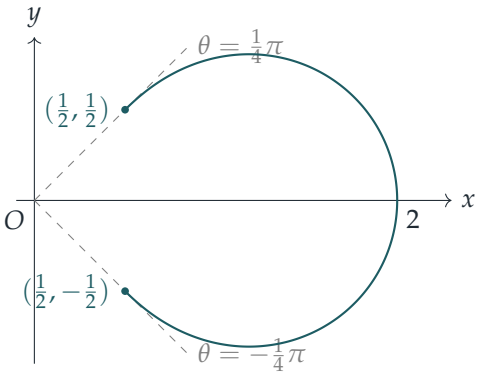
現在同一個函數給出在方向 θ 上與原點的距離 r。C_1 的端點位於 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$，即直角座標點 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$。在 $\theta = 0$ 時，曲線位於 $(2,0)$，是離 O 最遠的點。由於 r 是 θ 的偶函數，C_1 對稱於初始線（initial line）。

> **想一想** 對極座標曲線（polar curve）而言，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 為無限大代表甚麼？

由第 (i) 部分可知，當 $\theta \to \frac{1}{4}\pi^-$ 時，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta \to -\infty$。在該端附近，$r$ 變化很大而 θ 幾乎不變，所以曲線是沿着徑向直線 $\theta = \frac{1}{4}\pi$（即直線 $y = x$）移動。由於 r 遞減，曲線是沿 $y = x$ 朝向原點到達 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 的。特別地，高度 $y = r\sin\theta$ 必須在到達端點之前取得最大值。事實上

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

在 $\theta = 0$ 附近為正，而當 $\theta \to \frac{1}{4}\pi$ 時趨向 $-\infty$。（最大高度約為 0.81，出現在 $\theta \approx 34°$。）因此 C_1 是一道經過 $(2,0)$ 的拱形，向上鼓出超過 $y = \frac{1}{2}$，再回落至 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，並在該處與直線 $y = x$ 相切；軸下方則是其鏡像。



第 (iii) 部分

*兩條分支。*把方程視為關於 r 的二次方程：

$$r^2 - 2r\cos\theta + \sin^2\theta = 0 \iff r = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}.$$

記 $r_\pm = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$。外側分支 r_+ 正是 C_1。內側分支滿足 $r_- \geq 0$，因為 $\cos^2\theta \geq \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$，且只在 $\sin\theta = 0$ 時取等號。所以 r_- 是一條真正的極座標曲線，而且只在 $\theta = 0$ 時到達原點。

*在 $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ 處。*此時 $\cos 2\theta = 0$，所以二次方程有重根（repeated root）：

$$r = \cos\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

兩條分支都經過 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$。

*r 很小時。*若 r 很小，則 r^2 相對於 $2r\cos\theta$ 可以忽略，而 θ 也必須很小，因為 $\sin^2\theta = 2r\cos\theta - r^2$ 很小。於是 $2r\cos\theta \approx \sin^2\theta$，再利用 $\cos\theta \approx 1$、$\sin\theta \approx \theta$，

$$r \approx \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} \approx \tfrac{1}{2}\theta^2,$$

即為所求。（等價地，$r_- \approx (1 - \frac{1}{2}\theta^2) - (1 - \theta^2) = \frac{1}{2}\theta^2$。）

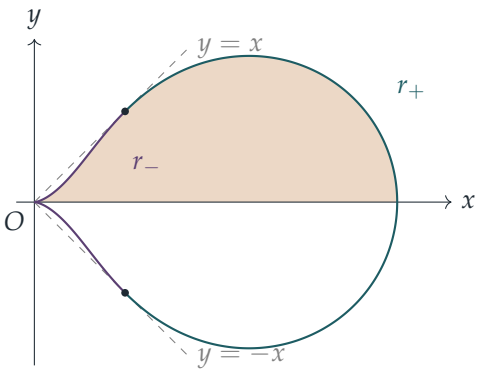
*$r = 0$ 附近的形態。*此時 $x = r\cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$，$y = r\sin\theta \approx \frac{1}{2}\theta^3$，所以 $y^2 \approx 2x^3$。因此內側分支從 $x > 0$ 的一側、自上方及下方進入原點，並與初始線相切，在 O 處形成一個指向左方的尖點（cusp）。

*$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ 附近的形態。*對方程進行隱函數微分（implicit differentiation），

$$(2r - 2\cos\theta)\,\mathrm{d}r + (2r\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{\cos\theta - r}{\sin\theta\,(r + \cos\theta)}.$$

在 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$\theta = \frac{1}{4}\pi$ 處，分子為 0 而分母不為零，所以 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r = 0$。此外，在整條曲線上 $\theta \leq \frac{1}{4}\pi$。因此 θ 在該處取得最大值，而曲線與徑向直線 $y = x$ 相切。外側分支沿 $y = x$ 朝 O 而來，內側分支沿 $y = x$ 背離 O 而去，兩者在 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 平滑地相接，並沒有角點。由對稱性，$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 處亦然。

所以 C_2 是一條閉曲線，對稱於初始線，形如一滴淚珠，其尖端就是 O 處的尖點。它的外緣是 C_1，內緣則由 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 向下進入 O 處的尖點，再出來到達 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$。



（繪圖時使用 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u$，這使得 $\sqrt{\cos 2\theta} = \cos u$。讓 u 走一整圈，便能描出整條 C_2，而不會出現無限大的斜率。）

面積。當 $0 \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$ 時，角度為 θ 的射線恰好在 $r_- \le r \le r_+$ 時位於 C_2 之內。所以陰影部分的面積是兩個極座標扇形（sector）之差：

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\left(r_+^2 - r_-^2\right) \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(r_+ - r_-)(r_+ + r_-)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\cos 2\theta}\cdot 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/4} \cos\theta\sqrt{1-2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

作代換（substitution）$\sqrt{2}\sin\theta = \sin u$，於是 $\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \cos u\,\mathrm{d}u$，而當 θ 由 0 變至 $\frac{1}{4}\pi$ 時，u 由 0 變至 $\frac{1}{2}\pi$：

$$A = 2\int_0^{\pi/2} \cos u\cdot\frac{\cos u}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

即為所求結果。（等價地，代換 $s = \sqrt{2}\sin\theta$ 把積分化為 $\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s$，即單位圓盤（unit disc）四分之一面積的 $\sqrt{2}$ 倍。）

驗算

- 在 $\theta = 0$ 時，$r_\pm = 1 \pm 1$，得出點 $(2,0)$ 和 O，與草圖吻合。
- 在 $\theta = 0.01$ 時，$r_- = \cos 0.01 - \sqrt{\cos 0.02} \approx 5.0002\times 10^{-5}$，對比 $\frac{1}{2}\theta^2 = 5\times 10^{-5}$。
- 數值上，$\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.11072$，而直接在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上對 $\frac{1}{2}(r_+^2 - r_-^2)$ 作數值積分，得出的值準確至小數點後六位相同。
- 粗略估界：C_2 的上半部位於矩形 $[0,2]\times[0,0.81]$ 之內，其面積約為 1.62；而它包含以 $(\frac{1}{2},0)$、$(2,0)$、$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 為頂點的三角形，面積為 0.375。數值 1.11 合理地落在兩者之間。

常見錯誤

- 在 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 處把 C_1 畫成有角點，或畫成曲線穿過 $y = x$：$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 為無限大，表示曲線在該處與徑向直線相切。
- 在 O 處畫成平滑的圓頭而非尖點：$y^2 \approx 2x^3$ 正是典型的尖點形狀。
- 只計算 $\int \frac{1}{2} r_+^2 \, \mathrm{d}\theta$，這是直至 C_1 的面積，連內側分支之內的空心區域也包括在內。

STEP 之外

原點附近的曲線 $y^2 = 2x^3$ 是一條半立方拋物線（semicubical parabola），是尖點的標準例子。每當一個平滑的參數化（parametrisation）在某一時刻速度為零，尖點便會出現：這裏 $(x, y) \approx (\frac{1}{2}\theta^2, \frac{1}{2}\theta^3)$ 在 $\theta = 0$ 處的導數為零。為代數曲線上這類奇點分類，正是代數幾何（algebraic geometry）的起點。極座標曲線及其面積亦自然地引向格林定理（Green's theorem），它把一個封閉區域的面積表示為沿其邊界的線積分（line integral）。若想從幾何角度認識這類曲線，可以參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）。

詳細解答

STEP III 2020，第 7 題

純數學 • 二階微分方程

> **STEP III 2020，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分說明，二階線性方程（second-order linear equation）有時可以因式分解（factorise）成兩個一階線性方程，而每一個都可以用積分因子（integrating factor）求解。第 (ii) 部分的工作是找出這個分解：比較係數（matching coefficients）會得出一條關於 g 的非線性（non-linear）一階方程，而一個冪函數形式（power-law）的猜測就能解出它。之後只需依次解兩條一階方程，並在過程中代入初始條件（initial conditions）。

解答

第 (i) 部分

由第二條方程可以把 u 用 y 表示：

$$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{g}(x)\, y.$$

對其求導，並對 $\mathrm{g}(x)y$ 使用乘積法則（product rule），得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

把兩者代入 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)u = \mathrm{h}(x)$：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\, y = \mathrm{h}(x),$$

再把含 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的項和含 y 的項分別合併，便正好得到方程 (1)。

第 (ii) 部分

g 的方程。 比較 (2) 與 (1)，我們需要

$$\mathrm{g}(x)+\mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x},\qquad \mathrm{g}'(x)+\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2},\qquad \mathrm{h}(x)=4x+12.$$

由第一式得 $\mathrm{f}=1+\frac{4}{x}-\mathrm{g}$；代入第二式即可消去 f：

$$\mathrm{g}'(x)+\Big(1+\frac{4}{x}\Big)\mathrm{g}(x)-\big(\mathrm{g}(x)\big)^2=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}.$$

這就是所求的關於 g 的一階方程。

冪函數形式的解。 設 $\mathrm{g}(x)=kx^n$，則左邊為

$$knx^{n-1}+kx^n+4kx^{n-1}-k^2x^{2n}.$$

? **想一想** 在未知道 k 之前，應如何選取 n？

留意 x 的冪次。右邊只含 x^{-1} 和 x^{-2}，所以 x^n、x^{n-1} 和 x^{2n} 這些冪次都只能產生這兩項。取 $n=-1$ 正好做到：$x^n=x^{-1}$，而 x^{n-1} 和 x^{2n} 都是 x^{-2}。左邊於是變成

$$\frac{k}{x}+\frac{-k+4k-k^2}{x^2}=\frac{k}{x}+\frac{3k-k^2}{x^2}.$$

比較 x^{-1} 項得 $k=2$，此時 $3k-k^2=6-4=2$，與 x^{-2} 項亦吻合。因此

$$n=-1,\quad k=2:\qquad \mathrm{g}(x)=\frac{2}{x},\qquad \mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x}=1+\frac{2}{x}.$$

解方程 (2)。 根據第 (i) 部分，(2) 現在等價於以下一對方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\Big(1+\frac{2}{x}\Big)u=4x+12,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=u.$$

由於條件是在 $x=1$ 處給出，我們在 $x>0$ 上求解。

*關於 u 的方程。*積分因子為 $\exp\int\big(1+\frac{2}{x}\big)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+2\ln x}=x^2\mathrm{e}^x$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^2\mathrm{e}^xu\big)=\big(4x^3+12x^2\big)\,\mathrm{e}^x.$$

右邊正好是 $4x^3\mathrm{e}^x$ 的導數（乘積法則），所以

$$x^2\mathrm{e}^xu=4x^3\mathrm{e}^x+C,\qquad u=4x+\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x^2}.$$

u 在 $x=1$ 的值由初始條件得出：$u=y'+\frac{2}{x}y=-3+2\times5=7$。於是 $4+C\mathrm{e}^{-1}=7$，得 $C=3\mathrm{e}$，以及

$$u=4x+\frac{3\mathrm{e}^{1-x}}{x^2}.$$

關於 y 的方程。積分因子為 $\mathrm{e}^{2\ln x} = x^2$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2y) = x^2u = 4x^3 + 3\mathrm{e}^{1-x}, \qquad \text{因此} \qquad x^2y = x^4 - 3\mathrm{e}^{1-x} + D.$$

在 $x = 1$ 處：$5 = 1 - 3 + D$，所以 $D = 7$。因此

$$\boxed{y = x^2 + \frac{7 - 3\mathrm{e}^{1-x}}{x^2}}.$$

這裏用了 $y(1) = 5$，而求 C 時用了 $y'(1) = -3$，所以兩個條件都成立。

驗算

- 在 $x = 1$ 處：$y = 1 + 7 - 3 = 5$。求導得 $y' = 2x - 14x^{-3} + 3\mathrm{e}^{1-x}x^{-2} + 6\mathrm{e}^{1-x}x^{-3}$，在 $x = 1$ 處為 $2 - 14 + 3 + 6 = -3$。
- 特解部分（particular part）$y = x^2$ 本身應滿足 (2)：$2 + (1 + \frac{4}{x})2x + (\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})x^2 = 2 + 2x + 8 + 2x + 2 = 4x + 12$。確實如此。
- 用電腦把方框中的 y 在 $x = 0.3$ 至 $x = 5$ 之間的許多點代入 (2)，兩邊在數值微分誤差（約 10^{-5}）範圍內一致。

常見錯誤

- 直接把 $y'(1) = -3$ 當作 u 的初始值。u 的初始值是 $y' + \mathrm{g}y = 7$，而不是 -3。
- 在第 (i) 部分漏掉 $\mathrm{g}'(x)$ 項：g 依賴於 x，所以 $\mathrm{g}y$ 必須用乘積法則求導。
- 在兩個步驟之一漏掉積分常數。總共有兩個常數，正好對應兩個初始條件。

STEP 之外

這就是把微分算子（differential operator）因式分解的想法：$(D + \mathrm{f})(D + \mathrm{g})y = \mathrm{h}$，其中 D 表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$。由於 g 依賴於 x，這兩個因子不可交換（commute），這正是交叉項 g' 出現的原因。我們為 g 找到的方程是一條*黎卡提方程*（Riccati equation），以黎卡提（Riccati）命名。黎卡提方程是非線性的，但只要知道一個解，就足以把線性二階問題化為兩個一階問題，正如本題所示。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵蓋積分因子、降階法（reduction of order）及黎卡提方程。

詳細解答

STEP III 2020，第 8 題

純數學 • 數列與遞降法

STEP III 2020，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 1.8 節點算有理數中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/counting-rationals.html

關鍵思路

每個下標（subscript）較大的項，都由下標約為其一半的項構成。因此，任何關於數對 (u_n, u_{n+1}) 的命題，都可以推回到下標較小的數對；以遞降法（descent）論證（等價於選取最小的反例（counterexample）），便能處理每一部分。先寫出首幾項，並觀察每一對相鄰項如何產生兩對新的項，在證明之前就能看清規律。

解答

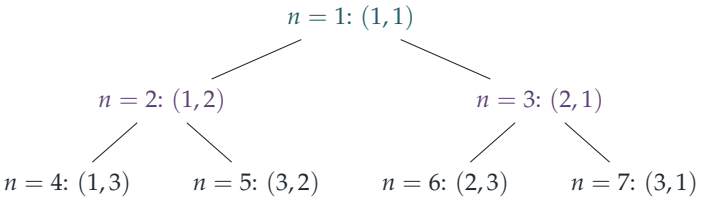
首十六項為

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 1.$$

每一項都是正整數：u_1 顯然如此，而之後每一項要麼是較前的某一項，要麼是兩個較前的項之和，所以由（強）歸納法（induction）可得此結論。

值得記下一個數對如何產生後面的數對。若 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b)$，則直接由定義得

$$(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,\ a+b), \qquad (u_{2k+1}, u_{2k+2}) = (a+b,\ b). \tag{$*$}$$



位置 n 的數對是 (u_n, u_{n+1})；由 $(*)$，它的左子節點位於 $2n$，右子節點位於 $2n+1$。每個位於 $n \geq 2$ 的數對，都恰好以這種方式由位置 $\lfloor n/2 \rfloor$ 的數對產生。

第 (i) 部分

取一對相鄰項 (u_n, u_{n+1})，其中 $n \geq 2$，並設 $k = \lfloor n/2 \rfloor \geq 1$。

- 若 $n = 2k$，該數對為 $(u_k,\ u_k + u_{k+1})$。由於 $u_{k+1} \geq 1$，奇數下標的項 $u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ 大於偶數下標的項 $u_{2k} = u_k$。
- 若 $n = 2k+1$，該數對為 $(u_k + u_{k+1},\ u_{k+1})$。此時由於 $u_k \geq 1$，$u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ 大於 $u_{2k+2} = u_{k+1}$。

因此，除了第一對 $(u_1, u_2) = (1,1)$ 之外，每一對中奇數下標的項都嚴格較大。特別地，只有第一對的兩項相等。

第 (ii) 部分

假設 $d > 1$ 同時整除 u_n 和 u_{n+1}。由於 $u_1 = u_2 = 1$，這不可能在 $n = 1$ 時發生，故 $n \geq 2$；設 $k = \lfloor n/2 \rfloor$，則 $1 \leq k < n$。

- 若 $n = 2k$：$d \mid u_{2k} = u_k$ 且 $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$，所以 d 整除兩者之差 u_{k+1}。
- 若 $n = 2k+1$：$d \mid u_{2k+2} = u_{k+1}$ 且 $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$，所以 $d \mid u_k$。

無論哪種情況，d 都同時整除 u_k 和 u_{k+1}，即較前的一對相鄰項，這正是需要證明的。

現在假設某一對相鄰項有公因數 $d > 1$，並在這樣的數對中選取 n 最小的一對 (u_n, u_{n+1})。如上所述 $n \neq 1$，而剛才的論證會給出位於 $k < n$、具有相同公因數的數對，與 n 的最小性矛盾。因此任意兩個相鄰項都互質（co-prime）。

第 (iii) 部分

假設某個有序數對 (a, b) 在兩個不同位置出現，即 $(u_m, u_{m+1}) = (u_n, u_{n+1}) = (a, b)$，其中 $m < n$。在所有這類重複中，選取 m 最小的一個。

若 $m = 1$，則 $a = b = 1$；但 $n \geq 2$，由第 (i) 部分，位置 n 的數對兩項不相等。所以

$m \geq 2$，再由第 (i) 部分亦有 $a \neq b$。

想一想 單憑 a 和 b，怎樣判斷位置是奇數還是偶數？

第 (i) 部分告訴我們，數對中較大的一項具有奇數下標，所以位置的奇偶性（parity）由數對本身決定：

- 若 $a < b$，第二項具有奇數下標，所以 m 和 n 都是偶數：$m = 2j$，$n = 2k$，其中 $j < k$。於是 $u_j = u_{2j} = a$ 且 $u_{j+1} = u_{2j+1} - u_j = b - a$；同理 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b-a)$。
- 若 $a > b$，則 m 和 n 都是奇數：$m = 2j+1$，$n = 2k+1$，其中 $1 \leq j < k$。於是 $u_{j+1} = u_{2j+2} = b$ 且 $u_j = u_{2j+1} - u_{j+1} = a - b$；同理 $(u_k, u_{k+1}) = (a-b, b)$。

兩種情況下，都有同一個有序數對出現在兩個不同位置 j 和 k，而 $j \leq m/2 < m$。這與 m 的選取矛盾。所以沒有任何正整數有序數對會在兩個不同位置相鄰出現。

第 (iv) 部分

設 $a > b$，a、b 互質，並假設 (a, b) 不是數列中的一對相鄰項。那麼 $a - b$ 和 b 都是正整數，而且互質：$a - b$ 與 b 的任何公因數也整除 $(a-b) + b = a$，所以它是 a 與 b 的公因數，必然是 1。

若在某處 $a - b$ 之後緊接 b，例如 $(u_k, u_{k+1}) = (a-b, b)$，則由 $(*)$

$$(u_{2k+1}, u_{2k+2}) = \big((a-b) + b,\ b\big) = (a, b),$$

與對 (a, b) 的假設矛盾。所以 $(a-b, b)$ 也是一對不以相鄰項出現的互質數對，而它的和為 $a < a + b$。

$a < b$ 時的相應結果：a 和 $b - a$ 是互質的正整數，它們不會以 $b - a$ 緊接 a 的方式相鄰出現，而且它們的和 b 小於 $a + b$。證明相同：a 與 $b - a$ 的公因數整除 $a + (b - a) = b$；而若 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b-a)$，則 $(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,\ a + (b-a)) = (a, b)$。

第 (v) 部分

由於每一項都是正整數，$f(n) = u_n / u_{n+1}$ 是正有理數（rational），所以值域（range）包含於正有理數之中。我們證明每個正有理數都會被取到，而且只取到一次。

每個正有理數都在值域之內。把一個正有理數寫成最簡分數（lowest terms）p/q，其中 p、q 是互質的正整數。我們斷言每個互質數對 (p, q) 都會以 (u_n, u_{n+1}) 的形式在某個 n 出現。若不然，在沒有出現的互質數對中，選取 $a + b$ 最小的一對 (a, b)。不可能有 $a = b$：此時互質迫使 $a = b = 1$，而 $(1, 1)$ 在 $n = 1$ 出現。所以 $a > b$ 或 $a < b$，而第 (iv) 部分給出一對沒有出現、和更小的互質數對。這與最小性矛盾，所以每個互質數對 (p, q) 都會出現，設在位置 n，於是 $f(n) = p/q$。

f 是一對一（*one-to-one*）的。假設 $f(m) = f(n)$。由第 (ii) 部分，u_m/u_{m+1} 和 u_n/u_{n+1} 都是分母為正的最簡分數。一個正有理數只有一種這樣的表示，所以 $u_m = u_n$ 且 $u_{m+1} = u_{n+1}$。由第 (iii) 部分，同一個有序數對不能在兩個不同位置出現，所以 $m = n$。

因此 f 是由正整數到正有理數的雙射（bijection），故有反函數（inverse）f^{-1}：給定最簡分數 p/q，$f^{-1}(p/q)$ 就是 p 之後緊接 q 的唯一位置。例如 3 只在位置 10 緊接 5，所以 $f^{-1}(\frac{3}{5}) = 10$。

驗算

- 所列各項給出數對 $(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,2),(2,3),(3,1),(1,4),\ldots$：第一對之後，奇數下標的項都較大；所有數對都互質；沒有數對重複。
- 對 3/5 執行第 (iv) 部分的遞降：$(3,5) \to (3,2) \to (1,2) \to (1,1)$。再用 $(*)$ 往回推：位置 1 的 $(1,1)$ 給出位置 2 的 $(1,2)$、位置 5 的 $(3,2)$ 和位置 10 的 $(3,5)$；確實 $u_{10} = 3$，$u_{11} = 5$。
- 用電腦檢查首二百萬項，證實了第 (i)–(iii) 部分，並發現每個滿足 $p + q \leq 21$ 的互質數對 (p,q) 都恰好出現一次。

常見錯誤

- 在第 (ii) 和第 (iii) 部分忘記另行排除第一對 $(1,1)$：它是每次遞降的基本情況。
- 在第 (iii) 部分，未加論證便假設兩個位置的奇偶性相同；正是第 (i) 部分迫使這一點成立。
- 在第 (v) 部分只證明值域是全體正有理數。要有反函數，還需要 f 是一對一的，而這要同時用到第 (ii) 和第 (iii) 部分。

STEP 之外

這就是 Stern 雙原子數列（Stern's diatomic sequence），而列出 u_n/u_{n+1} 便得到有理數的 Calkin–Wilf 枚舉（Calkin–Wilf enumeration）：一個 $\mathbb{N}$ 與 $\mathbb{Q}^+$ 之間的顯式雙射，具體地說明有理數是可數的（countable）。第 (iv) 和第 (v) 部分的遞降，正是歐幾里得算法（Euclid's algorithm）的減法形式；而樹中由 $(1,1)$ 到 (p,q) 的路徑，編碼了 p/q 的連分數（continued fraction）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）對歐幾里得算法和連分數有精彩的論述。

詳細解答

STEP III 2020，第 9 題

力學 • 剛體平衡

STEP III 2020，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

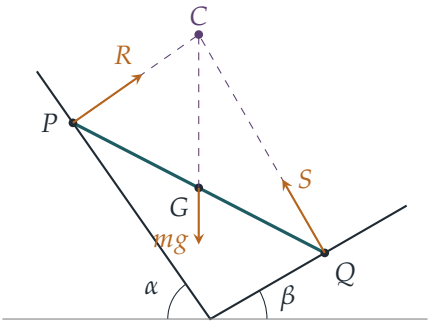
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

桿只受三個力作用：作用於中點的重力，以及兩端各一個接觸力。一個物體在三個互不平行的力作用下處於平衡（equilibrium）時，三力的作用線（lines of action）必交於同一點，因此整道題就變成幾何問題：用兩種不同方法求出該交點的高度，然後令兩者相等。在第 (ii) 部分，Q 處的法向反作用力（normal reaction）與極限摩擦力（limiting friction）合成為一個總反作用力，它偏離法線的角度為摩擦角（angle of friction）λ，其中 $\tan\lambda = \mu$；同樣的幾何論證仍然適用，只需把 β 換成 $\beta + \lambda$。

解答

把桿視為均勻（uniform）的剛體（rigid body），長度為 $2l$，中點為 G，並假設兩個平面固定不動。設 Π_1 位於兩平面交線的左方，Π_2 位於右方，於是 P 在左方且較高，Q 在右方且較低。



第 (i) 部分

兩個平面都是光滑（smooth）的，所以 P 處的反作用力 R 垂直於 Π_1，Q 處的反作用力 S 垂直於 Π_2。垂直於一個傾角為 α 的平面的直線，與鉛垂線的夾角為 α；因此 R 的作用線從 P 向上延伸並向 Q 一方傾斜，與向上鉛垂線成 α 角；而 S 的作用線從 Q 向上延伸並向 P 一方傾斜，與向上鉛垂線成 β 角。

桿在三個力作用下平衡：R、S，以及經過 G 鉛垂向下的重力 mg。對 R 與 S 作用線的交點 C 取力矩（moments），R 和 S 的力矩均為零，所以重力的力矩也必須為零：重力的作用線經過 C。因此 C 位於 G 的正上方。

想一想 怎樣把「C 位於 G 的正上方」轉化為一條方程？

沿兩條途徑計算 C 高出 Q 的高度。由於 G 是中點，而桿與水平線成 θ 角，G 與兩端的水平距離均為 $l\cos\theta$，而 P 比 Q 高 $2l\sin\theta$。

- 沿 R 的作用線：沿一條與鉛垂線成 α 角的直線移動水平距離 $l\cos\theta$，高度上升 $l\cos\theta\cot\alpha$。所以 C 高出 Q 的高度為 $2l\sin\theta + l\cos\theta\cot\alpha$。
- 沿 S 的作用線：同理，C 高出 Q 的高度為 $l\cos\theta\cot\beta$。

令兩者相等，再除以 $l\cos\theta \neq 0$，得

$$2\tan\theta + \cot\alpha = \cot\beta, \qquad \text{即} \qquad 2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha,$$

此即所求。由於 $\beta < \alpha$（兩者皆為銳角），$\cot\beta > \cot\alpha$，所以 $\theta > 0$，與 P 高於 Q 一致。

第 (ii) 部分

現在 Π_1 仍然光滑，所以 P 處的反作用力與之前完全相同。在 Q 處則有法向反作用力 N，以及沿 Π_2 的摩擦力 F。

摩擦力的方向。桿是剛體，所以 P 與 Q 的速度沿桿方向的分量相等。若 P 開始以速率 u 沿 Π_1 向下滑動，而 Q 以（帶正負號的）速率 w 沿 Π_2 向上移動，則沿桿從 P 指向 Q 的方向（此方向在水平線下方 ϕ 角）分解，得

$$u\cos(\alpha - \phi) = w\cos(\beta + \phi).$$

這裏 $\cos(\alpha-\phi) > 0$，而下文會證明 $\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$，所以 $w > 0$：Q 即將沿 Π_2 向上移動。摩擦力阻礙這個運動，所以 F 沿 Π_2 向下作用；又因平衡處於極限狀態，$F = \mu N$。

總反作用力。把 N 與 F 合成為單一個力 S'。它與法線成 λ 角，其中 $\tan\lambda = F/N = \mu$；由於 F 沿平面向下（指向兩平面的交線），它令反作用力進一步向 P 一方傾斜。所以 S' 的作用線從 Q 向上延伸，與向上鉛垂線成 $\beta + \lambda$ 角，並向 P 一方傾斜。（若 $\beta + \lambda > \frac{1}{2}\pi$，這條作用線實際上是向下的；下面的高度公式仍然成立，只是餘切值為負。）

桿再次在三個力作用下平衡，所以三力的作用線交於 G 正上方的一點，而第 (i) 部分的論證可以逐字照搬，只需把 θ 換成 ϕ，β 換成 $\beta+\lambda$：

$$2\tan\phi = \cot(\beta+\lambda) - \cot\alpha.$$

由此可見 $2\tan\phi < \cot\beta$，所以 $\tan\phi < \cot\beta = \tan(\frac{1}{2}\pi - \beta)$，即 $\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$，這就證實了我們對摩擦力方向的假設。

與 $2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha$ 相減，得

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \cot\beta - \cot(\beta+\lambda) = \frac{\sin(\beta+\lambda)\cos\beta - \cos(\beta+\lambda)\sin\beta}{\sin\beta\,\sin(\beta+\lambda)}$$
$$= \frac{\sin\lambda}{\sin\beta\,(\sin\beta\cos\lambda + \cos\beta\sin\lambda)}.$$

分子分母同除以 $\cos\lambda$，利用 $\tan\lambda = \mu$，再提出因子 $\cos\beta$：

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \frac{\mu}{\sin\beta\,(\sin\beta + \mu\cos\beta)} = \frac{\mu}{\sin\beta\cos\beta\,(\tan\beta+\mu)} = \frac{2\mu}{(\mu+\tan\beta)\sin 2\beta}.$$

兩邊除以 2，得

$$\tan\theta - \tan\phi = \frac{\mu}{(\mu+\tan\beta)\sin 2\beta},$$

此即所求結果。

驗算

- 當 $\mu = 0$ 時右方為 0，所以 $\phi = \theta$：第 (ii) 部分退化為第 (i) 部分，理應如此。
- 右方為正，所以 $\phi < \theta$：摩擦力令桿可以比在光滑平面上更平地靜止，這是合理的，因為 P 正是即將向下滑動的一端。
- 取 $\alpha = 60°$，$\beta = 30°$。則 $2\tan\theta = \sqrt{3} - 1/\sqrt{3} = 2/\sqrt{3}$，所以 $\theta = 30°$。取 $\mu = 0.5$，公式給出 $\tan\phi = 0.5774 - 0.5/(1.0774 \times 0.8660) \approx 0.0415$，所以 $\phi \approx 2.4°$。對這些數值直接解水平分解、鉛垂分解及對 G 取力矩所得的方程（以電腦驗算，並對數千組隨機角度及摩擦系數重複進行），得到相同的 ϕ。
- 任何 μ 都可以借助 $2\tan\phi = \cot(\beta+\lambda) - \cot\alpha$ 迅速驗算：這裏 $\lambda \approx 26.57°$，$\cot 56.57° \approx 0.6606$，而 $(0.6606 - 0.5774)/2 \approx 0.0416$，在捨入誤差範圍內吻合。

常見錯誤

- 把摩擦力設為沿 Π_2 向上。當 P 向下滑動時，桿長不變迫使 Q 沿其所在平面向上移動，所以 Q 處的摩擦力沿該平面向下。
- 從水平線而非鉛垂線量度反作用力的角度：傾角為 α 的平面的法線與鉛垂線成 α 角。

STEP 之外

這裏用到的三力共點(concurrency)原理，是剛體平衡一般條件的特例：合力為零，以及對任何一點的合力矩為零。把摩擦力與法向反作用力合成為半頂角為 λ 的「摩擦錐」(cone of friction)，正是工程師分析梯子、楔子和螺絲穩定性的方法；而用速度判斷摩擦力方向的論證，就是瞬時轉動中心（instantaneous centre of rotation）的概念。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）正是以這種精神處理剛體靜力學和摩擦。

詳細解答

STEP III 2020，第 10 題

力學 • 簡諧運動

STEP III 2020，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

質點懸掛於彈簧下時，會繞其平衡位置（equilibrium position）作簡諧運動（simple harmonic motion），由此可用 k、g 和 a 表示 Ω。在平台上時，質點的加速度就是平台的加速度，而平台的加速度可用 x 表示，因此牛頓第二定律（Newton's second law）直接給出反作用力（reaction）。要保持接觸，反作用力必須時刻非負；由於它原來是 x 的線性（linear）函數，我們只需在平台行程的兩端檢查即可，而哪一端是關鍵，則取決於 ω 比 Ω 小還是大。

解答

把質點視為質點模型（point mass），彈簧視為輕彈簧，且無論伸長或壓縮（compression）均遵從胡克定律（Hooke's law）。全文中，作用於質點的力以向上為正。

懸掛的質點。 設 y 為質點在 A 下方的距離，則伸長量（extension）為 $y-a$，張力（tension）為 $kmg(y-a)/a$，向上作用於質點。以向下為正應用牛頓第二定律，得

$$m\ddot{y} = mg - \frac{kmg}{a}(y-a) \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{y} = -\frac{kg}{a}\left(y - a - \frac{a}{k}\right).$$

令 $z = y - a(1+\frac{1}{k})$，上式變為 $\ddot{z} = -\frac{kg}{a}z$，即繞平衡點 $y = a(1+\frac{1}{k})$ 的簡諧運動。質點從靜止釋放時並不在此點（任何不等於 a/k 的伸長量都給出 $z \neq 0$），因此它以角頻率（angular frequency）$\sqrt{kg/a}$ 作豎直振動，週期（period）為 $2\pi\sqrt{a/(kg)}$。令此等於 $2\pi/\Omega$，得 $\Omega^2 = kg/a$，即

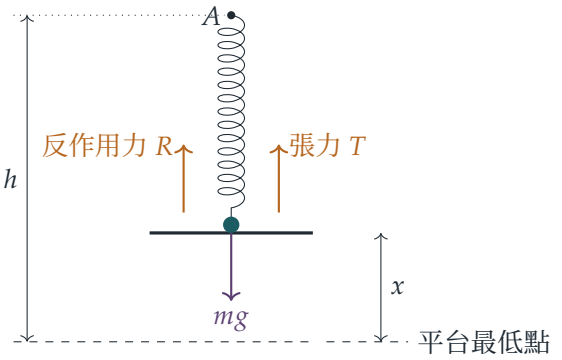
$$kg = a\Omega^2.$$

下文會以 $g/\Omega^2 = a/k$ 的形式使用此式。

平台。 平台作振幅（amplitude）為 b、角頻率為 ω 的簡諧運動，因此它在其最低點上方的高度 x 的範圍為 $0 \le x \le 2b$，中心為 $x = b$。所以其加速度為

$$\ddot{x} = -\omega^2(x-b) = \omega^2(b-x).$$

（例如，$x = b(1-\cos\omega t)$ 給出 $\ddot{x} = \omega^2 b\cos\omega t = \omega^2(b-x)$。）



反作用力。 質點與平台接觸期間隨平台一起運動，所以它在平台最低點上方的高度為 x，加速度為 $\ddot{x}$。它在 A 下方的距離為 $h-x$，因此彈簧的伸長量為 $h-x-a$，張力為

$$T = \frac{kmg}{a}(h-x-a) = m\Omega^2(h-x-a),$$

這裏用了 $kg/a = \Omega^2$。（若 $h-x<a$，彈簧被壓縮，T 為負，即推力（thrust），上式依然成立。）作用於質點的力為向上的 R 和 T 以及向下的 mg，所以

$$R + T - mg = m\ddot{x} = m\omega^2(b-x),$$

因此

$$R = mg - m\Omega^2(h-x-a) + m\omega^2(b-x) = mg + m\Omega^2(a+x-h) + m\omega^2(b-x),$$

此即所求。

保持接觸。 質點始終留在平台上，當且僅當對 $[0,2b]$ 內每一個 x 都有 $R \ge 0$。把含 x 的項歸併，

$$\frac{R}{m} = g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + (\Omega^2 - \omega^2)\,x.$$

想一想 為甚麼只需看 x 的一個值就足夠？

R 是 x 的線性函數，所以在區間 $0 \le x \le 2b$ 上，其最小值出現在其中一端：若斜率 $\Omega^2 - \omega^2$ 為正，則在 $x = 0$；若為負，則在 $x = 2b$。平台在每個週期中都會到達兩端，所以「$R \ge 0$ 時刻成立」等價於「$R \ge 0$ 在相應的一端成立」。

情況 $\omega < \Omega$。最小值在 $x = 0$（運動的最低點），所以需要

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b \geq 0 \iff h \leq a + \frac{g}{\Omega^2} + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2} = a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2},$$

這裏除以 $\Omega^2 > 0$ 並用了 $g/\Omega^2 = a/k$。這就是所求的不等式。

情況 $\omega > \Omega$。此時最小值在 $x = 2b$（運動的最高點），所以需要

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + 2b(\Omega^2 - \omega^2) \geq 0 \iff h \leq a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + b\left(2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right).$$

對所有 ω 都成立的界。 假設質點保持接觸。

- 若 $\omega < \Omega$，則 $\omega^2 b/\Omega^2 < b$（因為 $b > 0$），所以 $h \leq a(1+\frac{1}{k}) + \omega^2 b/\Omega^2 < a(1+\frac{1}{k}) + b$。
- 若 $\omega > \Omega$，則 $2 - \omega^2/\Omega^2 < 1$，所以 $h \leq a(1+\frac{1}{k}) + b(2-\omega^2/\Omega^2) < a(1+\frac{1}{k}) + b$。
- 若 $\omega = \Omega$，R 中含 x 的項互相抵消，$R/m = g + \Omega^2(a-h) + \Omega^2 b$ 為常數；$R \geq 0$ 恰好給出 $h \leq a(1+\frac{1}{k}) + b$。

所以無論哪種情況，

$$h \leq a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + b$$

都是必要條件，與 ω 的值無關。由於 $h - b$ 是平台運動中心在 A 下方的深度，而 $a(1+\frac{1}{k})$ 是懸掛平衡位置的深度，這個條件的意思是：平台振動的中心點不能低於質點本身的平衡位置。

驗算

- 取 $a = 1$、$k = 2$、$g = 9.8$，以數值方法逐步模擬自由運動，所得週期給出 $a\Omega^2 \approx 19.600$，與 $kg = 19.6$ 吻合。
- 若平台靜止（$b = 0$），兩個界都變成 $h \leq a(1+\frac{1}{k})$：平台不能低於平衡點，否則彈簧會把質點拉離平台。這完全正確。
- 在 $\omega = \Omega$ 時，兩種情況的界一致，都給出 $a(1+\frac{1}{k}) + b$，按連續性（continuity）理應如此。

常見錯誤

- 只檢查運動的最高點。對於緩慢的平台（$\omega < \Omega$），質點最危險的位置是最低點，那裏彈簧向上拉得最用力。

- 忘記彈簧可以被壓縮：張力公式 $kmg(h-x-a)/a$ 無論正負都適用，所以不必另行分情況討論。

STEP 之外

這其實是一個受迫振子（forced oscillator）：彈簧試圖令質點以其固有頻率（natural frequency）Ω 振動，而平台則強加頻率 ω，反作用力正是調和兩者所需的力。大學的振動課程會研究受驅系統、共振（resonance），以及響應如何隨 ω/Ω 變化。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這些概念有細緻的論述。

詳細解答

STEP III 2020，第 11 題

概率與統計 • 隨機變量的函數

STEP III 2020，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

嚴格遞減（strictly decreasing）函數會把不等式反向；又因為 f 是自己的反函數（inverse），我們可以把它同時作用於 $\mathrm{f}(X) \le y$ 的兩邊，得到一個只關於 X 的事件。期望值（expectation）則由分部積分（integration by parts）求得，這一步把 f' 換成 f。在第 (ii) 部分，Z 與 X 之間的關係對兩個變量是對稱的，所以 $Z = \mathrm{f}(X)$，其中 f 是自反函數（self-inverse function），於是可以套用第 (i) 部分。所求的不等式其實只是「方差（variance）為正」這個事實。

解答

第 (i) 部分

由於 f^{-1} 在整個 $[a,b]$ 上都有定義，f 是 $[a,b]$ 到自身的雙射（bijection），所以 Y 的取值在 $[a,b]$ 之內。固定 $y \in [a,b]$。因為 f 嚴格遞減，把它作用於不等式的兩邊會使不等式反向，而且 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$。因此，對於 $x \in [a,b]$，

$$\mathrm{f}(x) \le y \iff \mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) \ge \mathrm{f}(y) \iff x \ge \mathrm{f}(y).$$

（反方向的蘊涵同理成立，只需把 f 作用於 $x \ge \mathrm{f}(y)$。）由於 X 在 $[a,b]$ 上均勻分佈（uniform），且 $\mathrm{f}(y) \in [a,b]$，

$$\mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}\big(X \ge \mathrm{f}(y)\big) = \frac{b - \mathrm{f}(y)}{b-a},$$

此即所求。

求導後，Y 的概率密度函數（probability density function）為

$$g(y) = -\frac{\mathrm{f}'(y)}{b-a} \quad \text{當} a \le y \le b,$$

其餘情況下為零。由於 f 遞減，這個函數非負。接着，取 $u = y^2$ 及 $\mathrm{d}v = -\mathrm{f}'(y)\,\mathrm{d}y$ 進行分部積分，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y^2) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b y^2\big(-\mathrm{f}'(y)\big)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{b-a}\Big[-y^2\mathrm{f}(y)\Big]_a^b + \int_a^b \frac{2y\,\mathrm{f}(y)}{b-a}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{-b^2a + a^2b}{b-a} + \int_a^b \frac{2y\,\mathrm{f}(y)}{b-a}\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

其中用到 $\mathrm{f}(b) = a$ 及 $\mathrm{f}(a) = b$。第一項等於 $-ab(b-a)/(b-a) = -ab$。把啞變量（dummy variable）y 改記為 x，得

$$\mathrm{E}(Y^2) = -ab + \int_a^b \frac{2x\,\mathrm{f}(x)}{b-a}\,\mathrm{d}x.$$

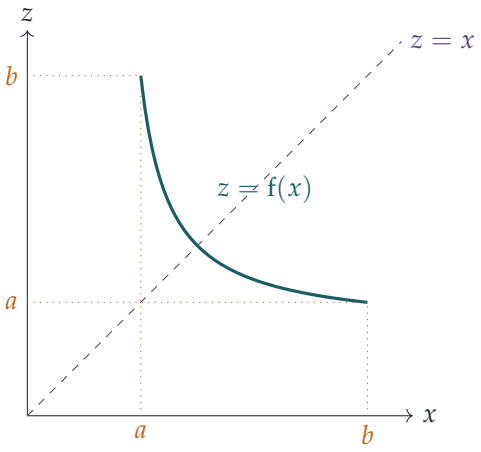
第 (ii) 部分

注意由 $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 得 $c = \dfrac{ab}{a+b}$，又因 $\frac{1}{c} > \frac{1}{a}$，所以 $c < a$。解出 Z：

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{c} - \frac{1}{X} = \frac{X-c}{cX}, \qquad \text{所以} \qquad Z = \mathrm{f}(X) \text{，其中 } \mathrm{f}(x) = \frac{cx}{x-c}.$$

由於 $x \ge a > c$，分母在 $[a,b]$ 上為正。我們驗證 f 滿足第 (i) 部分的三個條件。

- $\frac{1}{\mathrm{f}(a)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$，所以 $\mathrm{f}(a) = b$。同理 $\frac{1}{\mathrm{f}(b)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$，所以 $\mathrm{f}(b) = a$。
- $\frac{1}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上為正且嚴格遞增，所以 $\mathrm{f}(x)$ 在該區間上嚴格遞減。
- 關係式 $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$ 對 x 與 z 是對稱的。所以 $z = \mathrm{f}(x)$ 當且僅當 $x = \mathrm{f}(z)$，即 $\mathrm{f} = \mathrm{f}^{-1}$。



f 的圖像由 (a,b) 延伸至 (b,a)，並且關於直線 $z=x$ 對稱——自反函數理應如此。

想一想 為甚麼除了 $\mathrm{E}(Z^2)$ 之外，還要求 $\mathrm{E}(Z)$？

所求的不等式必須來自 $\mathrm{Var}(Z)>0$，而方差需要用到這兩個矩（moment）。對數會在每個矩中出現，其一次項會互相抵消，只剩下平方項。

對兩個積分，先做除法：

$$\mathrm{f}(x)=c+\frac{c^2}{x-c},\qquad x\,\mathrm{f}(x)=\frac{cx^2}{x-c}=c\Big(x+c+\frac{c^2}{x-c}\Big).$$

記 $L=\ln\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)$；由於 $b-c>a-c>0$，L 為正。於是

$$\mathrm{E}(Z)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\Big(c+\frac{c^2}{x-c}\Big)\mathrm{d}x=c+\frac{c^2L}{b-a}.$$

由第 (i) 部分，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^2)&=-ab+\frac{2c}{b-a}\int_a^b\Big(x+c+\frac{c^2}{x-c}\Big)\mathrm{d}x\\&=-ab+\frac{2c}{b-a}\Big(\frac{b^2-a^2}{2}+c(b-a)+c^2L\Big)\\&=-ab+c(a+b)+2c^2+\frac{2c^3L}{b-a}.\end{aligned}$$

由於 $c(a+b)=ab$，首兩項互相抵消。減去 $\mathrm{E}(Z)^2=c^2+\dfrac{2c^3L}{b-a}+\dfrac{c^4L^2}{(b-a)^2}$ 後，含 L 的一次項抵消，得

$$\mathrm{Var}(Z)=c^2-\frac{c^4L^2}{(b-a)^2}.$$

Z 並非常數：由第 (i) 部分，其分佈函數（distribution function）$\big(b-\mathrm{f}(y)\big)/(b-a)$ 在 $[a,b]$ 上由 0 嚴格遞增至 1。所以 $\mathrm{Var}(Z)>0$，由此得

$$L^2<\frac{(b-a)^2}{c^2}.$$

L 與 $(b-a)/c$ 均為正，所以可以兩邊開平方根：

$$\ln\left(\frac{b-c}{a-c}\right)<\frac{b-a}{c}.$$

驗算

- 在第 (i) 部分，試用最簡單的自反函數例子 $\mathrm{f}(x)=a+b-x$。此時 Y 在 $[a,b]$ 上均勻分佈，而公式給出 $\mathrm{E}(Y^2)=-ab+\frac{2}{b-a}\int_a^b x(a+b-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$，這正是均勻分佈隨機變量的二階矩。

- 取 $a=1$、$b=3$，則 $c=\frac{3}{4}$，$L=\ln 9\approx 2.197$，而 $(b-a)/c=\frac{8}{3}\approx 2.667$。不等式成立，且 $\mathrm{Var}(Z)=\frac{9}{16}-\frac{81}{256}\cdot\frac{(\ln 9)^2}{4}\approx 0.180$。用電腦對 f 和 f^2 作數值積分，得到相同的方差。
- 當 $b\to a$ 時，不等式兩邊都趨於 0，而 $\mathrm{Var}(Z)\to 0$，理應如此：Z 被擠壓在 $[a,b]$ 之內。

常見錯誤

- 忘記遞減函數會把不等式反向，因而寫成 $\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(X\le \mathrm{f}(y))$。
- 漏掉密度 $-\mathrm{f}'(y)/(b-a)$ 中的負號。密度不可能是負數。
- 沒有說明為何 $\mathrm{Var}(Z)$ 嚴格為正，或者開平方根時沒有指出兩邊均為正。

STEP 之外

第 (i) 部分是密度變換法則的特例：若 $Y=\mathrm{f}(X)$ 且 f 單調（monotonic），則 $g_Y(y)=g_X\big(\mathrm{f}^{-1}(y)\big)\left|(\mathrm{f}^{-1})'(y)\right|$。由 $\mathrm{Var}(Z)>0$ 得出嚴格不等式，是一個強大技巧的例子：$\mathrm{E}(Z)^2\le \mathrm{E}(Z^2)$ 其實是喬裝了的詹森不等式（Jensen's inequality）（或柯西—施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality)），只要巧妙地選取隨機變量，就能證明許多經典不等式。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了這兩個概念。

詳細解答

STEP III 2020，第 12 題

概率與統計 • 幾何分佈的獨立性

STEP III 2020，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

所有隨機變量都是獨立幾何分佈隨機變量（geometric random variables）對 (X, Y) 的函數，而且 $\mathrm{P}(X = x,\, Y = y) = p^2 q^{x+y-2}$。處理和與差時，最好沿着 (x, y) 網格中的一條直線把這個聯合概率（joint probability）加起來；處理最大值與最小值時，則最容易透過累積概率（cumulative probability），例如 $\mathrm{P}(T \le t)$。至於獨立性（independence），可留意某個變量是否有一個取值能完全確定另一個變量。

解答

由於 A 一直擲到第一次出現正面為止，當首 $k-1$ 次都是反面而第 k 次是正面時，X 取值 $k \ge 1$：

$$\mathrm{P}(X = k) = pq^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

Y 亦然。兩位參與者各自獨立擲幣，所以 X 與 Y 互相獨立，並且

$$\mathrm{P}(X = x,\, Y = y) = p^2 q^{x+y-2} \qquad (x, y \ge 1).$$

有兩個事實我們會反覆用到：$\mathrm{P}(X > k) = q^k$（首 k 次全是反面），所以 $\mathrm{P}(X \le k) = 1 - q^k$；以及 $1 - q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)$。

第 (i) 部分

和。S 的取值為 $s \ge 2$。要 $S = s$，需要 $X = x$ 及 $Y = s - x$，其中 $1 \le x \le s-1$。這 $s-1$ 個結果每個的概率都是 $p^2 q^{s-2}$，因此

$$\mathrm{P}(S = s) = (s-1) p^2 q^{s-2}, \qquad s = 2, 3, 4, \ldots$$

最大值。$T \le t$ 當且僅當 $X \le t$ 與 $Y \le t$ 同時成立，所以由獨立性得 $\mathrm{P}(T \le t) = (1-q^t)^2$。因此，對 $t \ge 1$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T=t) &= \mathrm{P}(T \le t) - \mathrm{P}(T \le t-1) = (1-q^t)^2 - (1-q^{t-1})^2 \\ &= \left[(1-q^t) - (1-q^{t-1})\right]\left[(1-q^t) + (1-q^{t-1})\right] \\ &= (q^{t-1}-q^t)(2-q^{t-1}-q^t) \\ &= pq^{t-1}(2-q^{t-1}-q^t),\end{aligned}$$

這裏用了 $q^{t-1}-q^t = q^{t-1}(1-q) = pq^{t-1}$。這就是所求的結果。（當 $t=1$ 時，公式給出 $p(1-q)=p^2$，是正確的。）

第 (ii) 部分

差。要 $U=0$，需要對某個 $k \ge 1$ 有 $X=Y=k$：

$$\mathrm{P}(U=0) = \sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{p(1+q)} = \frac{p}{1+q}.$$

對 $u \ge 1$，要麼 $Y = X+u$，要麼 $X = Y+u$；這兩種情況互斥，而且由對稱性可知概率相等，所以

$$\mathrm{P}(U=u) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=k, Y=k+u) = 2\sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2k+u-2} = \frac{2p^2q^u}{1-q^2} = \frac{2pq^u}{1+q}.$$

最小值。$W > w$ 當且僅當 $X > w$ 與 $Y > w$ 同時成立，所以 $\mathrm{P}(W > w) = q^{2w}$，而對 $w \ge 1$，

$$\mathrm{P}(W=w) = \mathrm{P}(W > w-1) - \mathrm{P}(W > w) = q^{2w-2} - q^{2w} = (1-q^2)\,q^{2(w-1)}.$$

所以 W 本身也服從幾何分佈，其「成功」概率為 $1-q^2$：A 和 B 各擲一次為一輪，每輪至少出現一次正面的概率是 $1-q^2$。

第 (iii) 部分

若 $S=2$，由於 $X, Y \ge 1$，必然有 $X=Y=1$，於是 $T=1$。所以 $S=2$ 與 $T=3$ 不可能同時發生：

$$\mathrm{P}(S=2 \text{ 且 } T=3) = 0.$$

另一方面，$\mathrm{P}(S=2) = p^2 > 0$，而 $\mathrm{P}(T=3) = pq^2(2-q^2-q^3) > 0$，因為 $0<q<1$ 給出 $q^2+q^3<2$。因此 $\mathrm{P}(S=2)\times\mathrm{P}(T=3) > 0$，兩邊並不相等。

第 (iv) 部分

U 與 W 互相獨立。我們須證明對每個 $u \ge 0$ 及 $w \ge 1$，都有 $\mathrm{P}(U=u, W=w) = \mathrm{P}(U=u)\,\mathrm{P}(W=w)$。知道 U 和 W 兩者，就知道較小的值是 w，較大的值是 $w+u$。

想一想 哪些數對 (X,Y) 會給出 $U=u$ 及 $W=w$？

若 $u=0$，唯一的數對是 (w,w)。若 $u\geq 1$，則恰好有兩個：$(w,\,w+u)$ 和 $(w+u,\,w)$，每個的概率都是 p^2q^{2w+u-2}。

當 $u=0$，$\mathrm{P}(U=0,\,W=w)=p^2q^{2w-2}$，而

$$\mathrm{P}(U=0)\,\mathrm{P}(W=w)=\frac{p}{1+q}\cdot p(1+q)\,q^{2w-2}=p^2q^{2w-2}.$$

當 $u\geq 1$，$\mathrm{P}(U=u,\,W=w)=2p^2q^{2w+u-2}$，而

$$\mathrm{P}(U=u)\,\mathrm{P}(W=w)=\frac{2pq^u}{1+q}\cdot p(1+q)\,q^{2w-2}=2p^2q^{2w+u-2}.$$

兩者在所有情況下都相等，所以 U 與 W 互相獨立。

其他各對都不獨立。餘下的各對是 (S,T)、(S,U)、(S,W)、(T,U) 及 (T,W)。要證明兩個變量不獨立，只需找到一對取值使得 $\mathrm{P}(A=a,\,B=b)\neq\mathrm{P}(A=a)\,\mathrm{P}(B=b)$ 便足夠。

想一想 S 或 T 的哪一個取值能確定其餘一切？

事件 $S=2$ 與事件 $T=1$ 是同一個事件 $\{X=Y=1\}$，其概率為 $p^2>0$；在此事件上 $T=1$、$U=0$ 及 $W=1$。由於 $0<p,q<1$，根據第 (i) 及 (ii) 部分的公式，下列清單中 T、U、W 的每個取值都有正概率。所以：

- (S,T)：$\mathrm{P}(S=2,\,T=3)=0\neq\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(T=3)$，見第 (iii) 部分；
- (S,U)：$\mathrm{P}(S=2,\,U=1)=0$，但 $\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(U=1)>0$；
- (S,W)：$\mathrm{P}(S=2,\,W=2)=0$，但 $\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(W=2)>0$；
- (T,U)：$\mathrm{P}(T=1,\,U=1)=0$，但 $\mathrm{P}(T=1)\,\mathrm{P}(U=1)>0$；
- (T,W)：$\mathrm{P}(T=1,\,W=2)=0$，但 $\mathrm{P}(T=1)\,\mathrm{P}(W=2)>0$。

所以在 S、T、U、W 之中，只有 U 與 W 這一對是互相獨立的。

驗算

- 每個分佈的總和都是 1：例如 $\sum_{t\geq 1}\mathrm{P}(T=t)$ 經裂項相消（telescoping）後等於 $\lim(1-q^t)^2=1$，而 $\frac{p}{1+q}+\sum_{u\geq 1}\frac{2pq^u}{1+q}=\frac{p}{1+q}\left(1+\frac{2q}{p}\right)=\frac{p+2q}{1+q}=1$。
- 取 $p=q=\frac{1}{2}$：$\mathrm{P}(T=2)=\frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{16}$，與逐一列出三個結果 $(1,2),(2,1),(2,2)$ 的概率 $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ 吻合。
- 取 $p=q=\frac{1}{2}$，$\mathrm{P}(U=1,\,W=1)=\mathrm{P}\{(1,2),(2,1)\}=\frac{1}{4}$，而 $\mathrm{P}(U=1)\,\mathrm{P}(W=1)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$，正符合獨立性的要求。

- 所有公式以及 U 與 W 的獨立性，都已用電腦對 $p = 0.3$、0.55 及 0.8 把聯合分佈加總而得到驗證。

常見錯誤

- 在 $u \geq 1$ 時漏掉 $\mathrm{P}(U = u)$ 中的因子 2，或在 $u = 0$ 時錯誤地加上它——此時 $X = Y$ 只算一次。
- 嘗試直接把各種情況相加來求 $\mathrm{P}(T = t)$，結果把 $X = Y = t$ 重複計算；用累積概率的方法可避免這個問題。
- 以為檢查一對取值就能證明獨立：證明獨立需要對*所有* u 和 w 成立，而只要有一處不成立便足以說明不獨立。

STEP 之外

U 與 W 互相獨立，正是無記憶性（memoryless property）的離散形式：一旦第一次正面在時間 W 出現，另一位參與者餘下的等待時間就是一個全新的幾何分佈隨機變量，與之前等了多久無關。在連續的情況下，對應的結果是：對獨立的指數分佈（exponential distribution）隨機變量而言，最小值與「最大值和最小值之差」互相獨立；這是泊松過程（Poisson process）和排隊論（queueing theory）的基礎。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對這些概念有深入的發展。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2020 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。