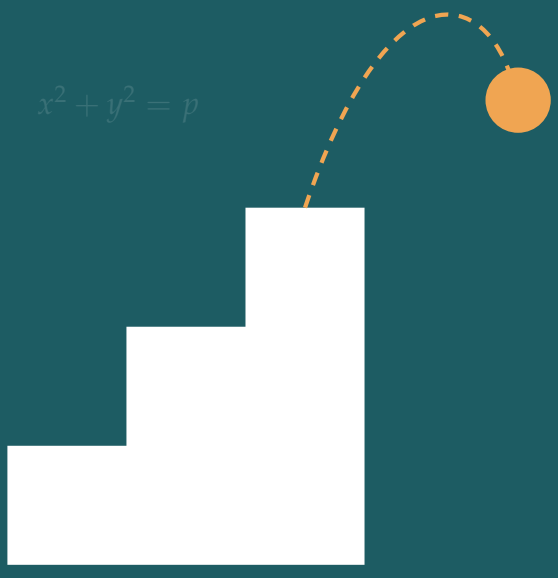
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

2019 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP I, II 及 III

2019 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2019 年詳細解答

2019 年 STEP 試卷（STEP I, II 及 III）全部 35 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP I

第 1 題 三角函數的最優化 純數學 . . . 3

第 2 題 參數曲線的切線 純數學 . . . 7

第 3 題 積分法 純數學 . . . 11

第 4 題 四次方程的因式分解 純數學 . . . 14

第 5 題 三維向量 純數學 . . . 18

第 6 題 不等式與界限 純數學 . . . 23

第 7 題 無理性與同餘 純數學 . . . 27

第 8 題 代換積分法 純數學 . . . 31

第 9 題 傾倒與摩擦力 力學 . . . 34

第 10 題 拋體運動 力學 . . . 38

第 11 題 幾何分佈 概率與統計 . . . 41

STEP II

第 1 題 三次曲線的切線 純數學 . . . 45

第 2 題 反函數的積分 純數學 . . . 49

第 3 題 多項式根的界限 純數學 . . . 52

第 4 題 三角函數裂項相消乘積 純數學 . . . 56

第 5 題 迭代的不動點 純數學 . . . 59

第 6 題 一階微分方程 純數學 . . . 63

第 7 題 向量與純量積 純數學 . . . 68

第 8 題 矩陣的積性函數 純數學 . . . 71

第 9 題 拋體與原點的距離 力學 . . . 74

第 10 題 剛體平衡 力學 . . . 78

第 11 題 三角形的計數 概率與統計 . . . 82

第 12 題 連續分佈與分位數 概率與統計 86

STEP III

第 1 題 耦合微分方程 純數學 90
第 2 題 函數方程 純數學 94
第 3 題 矩陣的不變直線 純數學 98
第 4 題 根與係數 純數學 102
第 5 題 代換積分法 純數學 106
第 6 題 阿根圖上的圓 純數學 110
第 7 題 曲線描繪 純數學 114
第 8 題 向量與三維幾何 純數學 120
第 9 題 移動半球上的質點 力學 124
第 10 題 鏈碰撞 力學 128
第 11 題 蓬松稀疏化 概率與統計 132
第 12 題 隨機子集 概率與統計 136

詳細解答

STEP I 2019，第 1 題

純數學 • 三角函數的最優化

> **STEP I 2019，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

一切都取決於直線與兩軸的交點。求周界（perimeter）時，定點 $P=(1,k)$ 把斜邊（hypotenuse）XY 分成兩段，每段都是一個小直角三角形（right-angled triangle）的斜邊，而且該小三角形有一條邊的長度已知，所以根本不必展開任何平方根。求最小值時，面積是兩項之和，而這兩項的積是常數（正是算術－幾何平均不等式（AM–GM inequality）的典型情況）；至於周界的導數（derivative），只要利用 $\cos^2\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$，便會漂亮地化簡。

解答

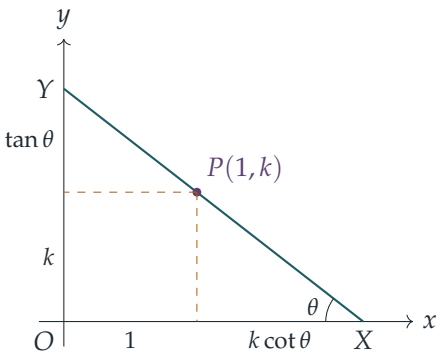
經過 $(1,k)$ 而斜率（gradient）為 $-\tan\theta$ 的直線是

$$y-k=-\tan\theta\,(x-1).$$

代入 $y=0$ 得 $x-1=k\cot\theta$；代入 $x=0$ 得 $y=k+\tan\theta$，所以

$$X=(1+k\cot\theta,\,0),\qquad Y=(0,\,k+\tan\theta).$$

由於 $k>0$ 且 $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$，兩個截距（intercept）都是正數，因此 OXY 確實是第一象限內的一個直角三角形，而 $P=(1,k)$ 位於其斜邊上。



第 (i) 部分

三角形在 O 處是直角，所以

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}(1+k\cot\theta)(k+\tan\theta) = \tfrac{1}{2}\big(k+\tan\theta+k^2\cot\theta+k\big) \\ &= k+\tfrac{1}{2}\big(\tan\theta+k^2\cot\theta\big), \end{aligned}$$

這裏用了 $\cot\theta\tan\theta=1$。

求最小值時，$\tan\theta$ 與 $k^2\cot\theta$ 均為正數，而且兩者之積是常數 k^2。由算術－幾何平均不等式，

$$\tan\theta+k^2\cot\theta \geq 2\sqrt{\tan\theta\cdot k^2\cot\theta} = 2k,$$

等號成立當且僅當 $\tan\theta = k^2\cot\theta$，即 $\tan\theta = k$（由於 $k>0$，範圍內必有某個 θ 達到此值）。因此 $A \geq k+k = 2k$，而

$$A_{\min} = 2k.$$

（用微分亦得同樣結果：$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}(\sec^2\theta - k^2\operatorname{cosec}^2\theta) = 0$ 當 $\tan^2\theta = k^2$。）取最小值時 $X=(2,0)$、$Y=(0,2k)$，所以 P 是 XY 的中點。

第 (ii) 部分

兩條直角邊分別是 $OX = 1+k\cot\theta$ 和 $OY = k+\tan\theta$。至於斜邊，按圖在 P 處把它分開。

- 由 P 到 Y：水平距離是 1，而直線與水平方向成 θ 角，所以 $PY = 1/\cos\theta = \sec\theta$。
- 由 P 到 X：鉛垂距離是 k，所以 $PX = k/\sin\theta = k\operatorname{cosec}\theta$。

把四段長度相加，

$$L = 1+\tan\theta+\sec\theta+k\big(1+\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta\big),$$

正如所求。

想一想 導數中含有 $\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta$。在令它等於零之前，有沒有辦法把它大大化簡？

有的。逐項微分，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}=\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta-k\big(\operatorname{cosec}^2\theta+\operatorname{cosec}\theta\cot\theta\big)=\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}-k\,\frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

由於 $\cos^2\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$、$\sin^2\theta=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$，而 $1+\sin\theta$ 和 $1+\cos\theta$ 都不為零，所以可以約去：

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{1-\sin\theta}-\frac{k}{1-\cos\theta}.$$

它等於零當且僅當 $1-\cos\theta=k(1-\sin\theta)$。所以最小值出現在 $\theta=\alpha$，其中

$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=k,$$

這正是要證明的。（事實上這是唯一的駐點（stationary point），而且是最小值：當 θ 在 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 上遞增時，$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$ 的第一項遞增，第二項遞減，所以 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$ 是遞增的，並且只會由負轉正一次。）

想一想 怎樣才能把最小值中的 k 消去？

把 L 的各項分組並通分：

$$1+\tan\alpha+\sec\alpha=\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha},\qquad 1+\cot\alpha+\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

記 $s=\sin\alpha$、$c=\cos\alpha$，且 $k=\dfrac{1-c}{1-s}$，則第二部分變成

$$k\,\frac{1+s+c}{s}=\frac{(1+s+c)(1-c)}{s(1-s)}=\frac{1+s-sc-c^2}{s(1-s)}=\frac{s^2+s-sc}{s(1-s)}=\frac{1+s-c}{1-s},$$

這裏用了 $1-c^2=s^2$。因此

$$\begin{aligned}L_{\min}=\frac{1+s+c}{c}+\frac{1+s-c}{1-s}&=\frac{(1+s+c)(1-s)+c(1+s-c)}{c(1-s)}\\&=\frac{1-s^2+c-sc+c+sc-c^2}{c(1-s)}\\&=\frac{2c}{c(1-s)},\end{aligned}$$

因為 $1-s^2-c^2=0$。所以

$$L_{\min}=\frac{2}{1-\sin\alpha}.$$

驗算

取 $k=1$。此時 $\tan\theta=1$ 給出 $X=(2,0)$、$Y=(0,2)$ 及 $A=2=2k$，與預測相符。周界的條件 $(1-\cos\alpha)/(1-\sin\alpha)=1$ 給出 $\alpha=\frac{1}{4}\pi$，而 $2/(1-\frac{1}{\sqrt{2}})=4+2\sqrt{2}\approx 6.828$，恰好等於頂點為 $(0,0)$、$(2,0)$、$(0,2)$ 的三角形的周界 $2+2+2\sqrt{2}$。對於其他一系列 k 值，用電腦對 θ 進行搜索，亦證實了兩個最小值以及周界最小值出現的位置。

常見錯誤

- 求斜邊時去展開 $\sqrt{(1+k\cot\theta)^2+(k+\tan\theta)^2}$，而不是在 P 處把它分開。
- 直接令未化簡的導數等於零，結果迷失在算式中；應先約去 $1+\sin\theta$ 和 $1+\cos\theta$。
- 最終答案中仍保留 k：題目要求只用 α 表示最小值。

STEP 之外

這個簡潔的答案背後有一個幾何解釋。經過 P 而使周界最小的直線，正是在 P 處與一個同時和兩軸相切的圓（OXY 的一個旁切圓（excircle））相切的那條直線；此時周界等於由 O 到該圓的切線長的兩倍。這個圓經過 P，半徑為 r，且 $r=1/(1-\sin\alpha)$。帶有「直線經過 P」這類約束條件的最優化（optimisation）問題，正是大學一年級微積分課程中拉格朗日乘數法（Lagrange multipliers）的起點。想看更多同類問題，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）。

詳細解答

STEP I 2019，第 2 題

純數學 • 參數曲線的切線

STEP I 2019，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

這個參數化（parametrisation）的設計，使參數 t 處的斜率（gradient）恰好就是 t，因此每條切線（tangent line）的方程都非常簡潔。要找兩條切線的交點，只需把立方差（difference of cubes）因式分解（factorise）；而垂直（perpendicular）條件 $pq = -1$ 讓我們可以把所有式子改寫成以和 $p + q$ 表示。至於兩條曲線的公共點，把其中一個參數化代入另一條曲線，會得到一個帶有重根（repeated root）的多項式（polynomial），而這個重根正透露了某種幾何信息。

解答

切線

設 $x = 3t^2$ 及 $y = 2t^3$，則

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{6t^2}{6t} = t \qquad (t \neq 0).$$

所以在 $(3p^2, 2p^3)$ 處的切線斜率為 p，方程為

$$y - 2p^3 = p\,(x - 3p^2) \quad \Longrightarrow \quad y = px - 3p^3 + 2p^3 = px - p^3,$$

與所求相符。（當 $p = 0$ 時，該點是原點，是一個尖點（cusp）；在該處曲線為 $y = \pm 2(x/3)^{3/2}$，它與 x 軸 $y = 0$ 相切，所以公式仍然成立。）

兩條切線的交點

當 $p \neq q$ 時，切線 $y = px - p^3$ 與 $y = qx - q^3$ 的交點滿足

$$(p-q)\,x = p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2).$$

由於 $p \neq q$，可以兩邊除以 $p-q$，得 $x = p^2+pq+q^2$，於是

$$y = px - p^3 = p^3 + p^2q + pq^2 - p^3 = pq(p+q).$$

所以兩條切線相交於

$$\left(p^2+pq+q^2,\ pq(p+q)\right).$$

兩條切線的斜率分別為 p 和 q，所以它們互相垂直當且僅當 $pq = -1$。設 $u = p+q$，則 $p^2+pq+q^2 = (p+q)^2 - pq = u^2+1$，且 $pq(p+q) = -u$。因此兩條互相垂直的切線相交於 $(u^2+1,\ -u)$，與所求相符。

想一想 $\widetilde{C}$ 上的每一點，是否真的都來自一對互相垂直的切線？

是的：對任意實數 u，我們需要 $p+q = u$ 及 $pq = -1$，所以 p 和 q 是 $z^2 - uz - 1 = 0$ 的根。其判別式（discriminant）u^2+4 恆為正，所以總有兩個相異實根。因此 $\widetilde{C}$ 恰好就是所有可以向 C 作兩條互相垂直切線的點所組成的集合。

兩條曲線的公共點

消去參數後，$\widetilde{C}$ 是拋物線（parabola）$x = y^2+1$。C 上的點 $(3t^2, 2t^3)$ 位於其上當且僅當

$$3t^2 = 4t^6 + 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 4s^3 - 3s + 1 = 0, \quad \text{其中} s = t^2.$$

由於 $s = -1$ 是一個根，可以因式分解：

$$4s^3 - 3s + 1 = (s+1)(4s^2 - 4s + 1) = (s+1)(2s-1)^2.$$

因為 $s = t^2 \geq 0$，唯一可能是 $s = \frac{1}{2}$，所以 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。於是 $x = 3t^2 = \frac{3}{2}$，$y = 2t^3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。公共點為

$$\left(\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad 及 \quad \left(\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

想一想 重複因式 $(2s-1)^2$ 告訴了我們甚麼？

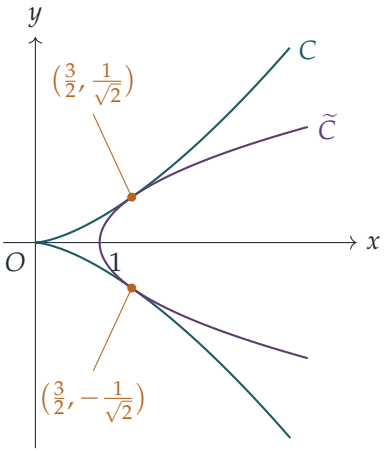
重根通常意味着相切（tangency），這裏正是如此。在 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 處，C 的斜率為 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$。在 $\widetilde{C}$ 上，由 $x = y^2+1$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，數值相同。由對稱性，下方那一點亦然。所以兩條曲線在這兩點都只是相切，而不是相交穿過。

草圖

從 C 消去 t，得 $y^2 = \frac{4}{27}x^3$，其中 $x \geq 0$。這是一條半立方拋物線(semicubical parabola)，關於 x 軸對稱，在原點有一個指向左方的尖點。$\widetilde{C}$ 是拋物線 $y^2 = x - 1$，頂點（vertex）為 $(1, 0)$，開口向右。要判斷哪條曲線在外，可比較 $x \geq 1$ 時兩者 y^2 的值：

$$f(x) = \tfrac{4}{27}x^3 - (x-1), \qquad f'(x) = \tfrac{4}{9}x^2 - 1,$$

所以 f 在 $x \geq 1$ 上的最小值出現在 $x = \frac{3}{2}$，此時 $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$。因此 $f(x) \geq 0$，且等號只在 $x = \frac{3}{2}$ 時成立。所以 $\widetilde{C}$ 位於 C 的內側（較接近 x 軸），並在兩個公共點與 C 相切。



驗算

- 取 $p = 1$，$q = -1$（於是 $pq = -1$，$u = 0$）。切線為 $y = x - 1$ 及 $y = -x + 1$，兩者互相垂直，相交於 $(1, 0)$，即 $\widetilde{C}$ 的頂點，與 $(u^2 + 1, -u)$ 的預測一致。
- 取 $p = 2$，$q = -\frac{1}{2}$，於是 $u = \frac{3}{2}$。切線 $y = 2x - 8$ 與 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$ 的交點滿足 $\frac{5}{2}x = \frac{65}{8}$，所以 $x = \frac{13}{4} = u^2 + 1$，$y = -\frac{3}{2} = -u$。
- 點 $(1.5, 0.7071)$ 同時滿足 $y^2 = \frac{4}{27}x^3$（因為 $\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{8} = \frac{1}{2}$）及 $y^2 = x - 1$。電腦驗算亦確認 $3t^2 - 4t^6 - 1$ 從不大於零，所以沒有其他公共點。

常見錯誤

- 忘記 $s = t^2$ 不可能是負數，而嘗試使用根 $s = -1$。
- 把拋物線畫成在公共點穿過 C，而不是在該處與 C 相切。

STEP 之外

曲線 $\widetilde{C}$ 是 C 的正交切線軌跡（orthoptic）：即所有可以向 C 作兩條互相垂直切線的點的軌跡（locus）；對拋物線而言，它就是準線（directrix）。以一族切線來描述曲線，會引出包絡線（envelope）以及射影幾何（projective geometry）中的對偶（duality）概念。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題解》）收錄了更多這類題目。

詳細解答

STEP I 2019，第 3 題

純數學 • 積分法

> **STEP I 2019，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

把分子和分母同乘以 $1-\sin x$，就能把 $1+\sin x$ 變成 $1-\sin^2 x = \cos^2 x$，而分母是 $\cos x$ 的冪的式子，都可以拆成幾個標準部分：$\sec^2 x$、$\sec x \tan x$、$\tan^2 x \sec^2 x$ 和 $\sin x / \cos^4 x$，每一個都可以一眼看出其積分（integral）。另外兩個積分其實是同一招的變奏：第二個積分會變成含 $1+\cos x$ 的積分，再用代換（substitution）$x = \frac{1}{2}\pi - u$ 便化為第一類；第三個積分則把因子 $1-\sin x$ 平方。

解答

第一個積分

由於 $(1+\sin x)(1-\sin x) = 1-\sin^2 x = \cos^2 x$，

$$\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \sec x \tan x.$$

我們知道 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \sec^2 x$ 及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x = \sec x \tan x$，所以

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \tan x - \sec x + C. \qquad (*)$$

利用 $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$、$\sec \frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$、$\tan 0 = 0$ 及 $\sec 0 = 1$：

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \left(1-\sqrt{2}\right) - \left(0-1\right) = 2-\sqrt{2}.$$

（乘以 $1-\sin x$ 是可以的，因為在整個區間內 $\sin x < 1$，所以我們從不會乘以零。）

第二個積分

把分子和分母同乘以 $\cos x$（在 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ 上不為零），

$$\frac{1}{1+\sec x} = \frac{\cos x}{\cos x + 1} = 1 - \frac{1}{1+\cos x}. \tag{$*$}$$

想一想 怎樣才能把 $(*)$ 用在 $\dfrac{1}{1+\cos x}$ 上？

由於 $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$，代入 $u = \frac{1}{2}\pi - x$，於是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$；當 $x = \frac{1}{4}\pi$ 時，$u = \frac{1}{4}\pi$；當 $x = \frac{1}{3}\pi$ 時，$u = \frac{1}{6}\pi$。於是

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{1+\sin u}\,\mathrm{d}u &= \Big[\tan u - \sec u\Big]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= (1-\sqrt{2}) - \Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\Big) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

這裏用了 $\tan\frac{1}{6}\pi = 1/\sqrt{3}$ 及 $\sec\frac{1}{6}\pi = 2/\sqrt{3}$。區間長度為 $\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{12}\pi$，所以

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\sec x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12} - \Big(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

（同樣地，也可以把 $\frac{1}{1+\cos x}$ 乘以 $\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$，得到 $\operatorname{cosec}^2 x - \cot x \operatorname{cosec} x$，其原函數（antiderivative）為 $\operatorname{cosec} x - \cot x = \tan\frac{1}{2}x$；由於 $\tan\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1$，這會得出相同的答案。）

第三個積分

現在把分子和分母同乘以 $(1-\sin x)^2$，使分母變成 $\cos^4 x$：

$$\frac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^4 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} - \frac{2\sin x}{\cos^4 x}.$$

對於第一部分，在分子中寫 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$：

$$\frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^4 x} = \sec^2 x + 2\tan^2 x \sec^2 x.$$

想一想 $\tan^2 x \sec^2 x$ 和 $\sin x / \cos^4 x$ 的積分分別是甚麼？

兩者都是 $f(x)^n f'(x)$ 的形式。取 $f = \tan x$，有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^3 x = 3\tan^2 x \sec^2 x$；取 $f = \cos x$，有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-3} = 3\sin x\,(\cos x)^{-4}$。因此

$$\int \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan x + \tfrac{2}{3}\tan^3 x - \tfrac{2}{3}\sec^3 x + C.$$

當 $x = \frac{1}{4}\pi$ 時：$\tan = 1$ 而 $\sec^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$，得 $1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$。當 $x = 0$ 時：$0 + 0 - \frac{2}{3}$。所以

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7-4\sqrt{2}}{3}.$$

驗算

- 大小：在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上，第一個被積函數（integrand）由 1 遞減至 $2-\sqrt{2} \approx 0.59$，所以積分值介乎 0.46 與 0.79 之間；$2-\sqrt{2} \approx 0.586$ 符合。同樣，第三個被積函數是第一個的平方，所以其積分應該較小：$(7-4\sqrt{2})/3 \approx 0.448$。
- 把你的原函數求導：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x - \sec x) = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1+\sin x}$。
- 辛普森法則（Simpson's rule）給出三個積分的值為 0.585786、0.098663 及 0.447715，與 $2-\sqrt{2}$、$\frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 及 $\frac{1}{3}(7-4\sqrt{2})$ 準確至十位小數。

常見錯誤

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x$ 或 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^3 x$ 的正負號出錯：兩者都帶正號，因為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-n} = n\sin x(\cos x)^{-n-1}$。
- 在第一和第三個積分中忘記下限：$\sec 0 = 1$，不是 0。
- 代換 $u = \frac{1}{2}\pi - x$ 後錯誤地對調上下限：$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ 中的負號正是用來把上下限調回遞增次序的。

STEP 之外

乘以「共軛」（conjugate）這個技巧，其實是一個系統方法的特例：代換 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 能把任何 $\sin x$ 與 $\cos x$ 的有理函數（rational function）變成 t 的有理函數，然後便可用部分分式（partial fractions）求積分。（我們得到 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$ 的答案是 $\tan\frac{1}{2}x$，正好透露了這一點。）大學一年級的分析（analysis）課程還會探討這類積分在甚麼情況下才存在，例如在 $x = -\frac{1}{2}\pi$ 附近，$1+\sin x$ 等於零。關於這兩個概念，可參閱 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）；如想做更多同類風格的積分，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）。

詳細解答

STEP I 2019，第 4 題

純數學 • 四次方程的因式分解

STEP I 2019，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

沒有 x^3 項的四次多項式（quartic），其各根（roots）之和為零。因此，若把四個根分成兩對，兩對各自的和互為相反數，這正是兩個二次因式（quadratic factors）的 x 係數分別為 s 和 $-s$ 的原因。接着比較係數（comparing coefficients）得出三條方程，消去 p 和 q 後便剩下一個關於 s^2 的三次方程（cubic）。第 (i) 部分是為了處理最後一步的根式（surds）而設。

解答

第 (i) 部分

把 $m+n\sqrt{2}$ 平方得 $m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$，所以我們需要 $m^2+2n^2=3$ 及 $mn=1$。取 $m=n=1$ 即可：

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2},$$

而由於 $1+\sqrt{2}>0$，它就是正平方根。因此 $m=1$，$n=1$：

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

同理，$(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$，所以 $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$。兩個結果我們都會用到。

第 (ii) 部分

為何存在這樣的因式分解。設四個實根為 a、b、c、d，則 $\mathrm{f}(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$。f 中 x^3 的係數是 $-(a+b+c+d)$，而它等於零，所以 $c+d=-(a+b)$。把

根兩兩配對，

$$\mathrm{f}(x) = \big(x^2 - (a+b)x + ab\big)\big(x^2 - (c+d)x + cd\big) = \big(x^2 + sx + p\big)\big(x^2 - sx + q\big),$$

其中 $s = -(a+b)$、$p = ab$、$q = cd$，由於各根皆為實數，它們全都是實數。

三條方程。展開，

$$(x^2 + sx + p)(x^2 - sx + q) = x^4 + (p + q - s^2)x^2 + s(q-p)x + pq.$$

與 $x^4 - 10x^2 + 12x - 2$ 比較：

$$\begin{aligned} p + q - s^2 &= -10, \\ s(q-p) &= 12, \\ pq &= -2. \end{aligned}$$

關於 s 的方程。第二條方程顯示 $s \neq 0$，所以可以除以 s：$q - p = 12/s$。第一條方程給出 $p + q = s^2 - 10$。現在利用恆等式 $(p+q)^2 - (q-p)^2 = 4pq = -8$：

$$(s^2 - 10)^2 - \frac{144}{s^2} = -8.$$

兩邊乘以 s^2（它不為零）得

$$s^2(s^2 - 10)^2 + 8s^2 - 144 = 0,$$

此即所求。

s^2 的值。設 $u = s^2$。展開，

$$u(u-10)^2 + 8u - 144 = u^3 - 20u^2 + 108u - 144.$$

試代入 144 的較小因數，$u = 2$ 給出 $8 - 80 + 216 - 144 = 0$，所以 $u - 2$ 是一個因式，並且

$$u^3 - 20u^2 + 108u - 144 = (u-2)(u^2 - 18u + 72) = (u-2)(u-6)(u-12).$$

所以 s^2 的三個可能值為 $s^2 = 2$、6 及 12。

? **想一想** 我們只需要一種因式分解，為甚麼 s^2 卻有三個值？

把四個根分成兩對共有三種方法，而每一種配對都給出各自的一對二次因式，且 $s^2 = (a+b)^2$。用任何一種都可以解方程；取最小的值只是令根式最整潔。

解 $\mathrm{f}(x) = 0$。取 $s^2 = 2$ 及 $s = \sqrt{2}$（選 $s = -\sqrt{2}$ 只會把兩個因式對調）。於是

$$p + q = 2 - 10 = -8, \qquad q - p = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2},$$

所以 $p = -4 - 3\sqrt{2}$，$q = -4 + 3\sqrt{2}$。（驗證：$pq = 16 - 18 = -2$。）因此

$$\mathrm{f}(x) = \left(x^2 + \sqrt{2}\,x - 4 - 3\sqrt{2}\right)\left(x^2 - \sqrt{2}\,x - 4 + 3\sqrt{2}\right).$$

第一個因式的判別式（discriminant）為

$$2 + 4(4 + 3\sqrt{2}) = 18 + 12\sqrt{2} = 6(3 + 2\sqrt{2}) = 6(1 + \sqrt{2})^2,$$

這裏用了第 (i) 部分的結果，所以其平方根為 $\sqrt{6}(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{6} + 2\sqrt{3}$。其根為

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \left(\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\right)}{2}.$$

第二個因式的判別式為

$$2 - 4(-4 + 3\sqrt{2}) = 18 - 12\sqrt{2} = 6(3 - 2\sqrt{2}) = 6(\sqrt{2} - 1)^2,$$

其平方根為 $\sqrt{6}(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$（為正數，因為 $2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{6}$）。其根為

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \left(2\sqrt{3} - \sqrt{6}\right)}{2}.$$

所以 $\mathrm{f}(x) = 0$ 的四個解為

$$x = \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{2} + \sqrt{6} + 2\sqrt{3}\right), \qquad x = \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{2} - \sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right),$$
$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}\right), \qquad x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right).$$

驗算

- 各根的數值約為 2.2497、-3.6639、1.2144 及 0.1998。它們之和為 0，正如沒有 x^3 項所要求的；它們之積約為 -2，即常數項。
- 代入 $x \approx 0.1998$：$x^4 - 10x^2 + 12x - 2 \approx 0.0016 - 0.3992 + 2.3976 - 2 \approx 0$。
- f 的變號情況吻合：$\mathrm{f}(0) = -2$，$\mathrm{f}(1) = 1$，$\mathrm{f}(2) = -2$，$\mathrm{f}(3) = 25$，$\mathrm{f}(-4) = 46$，所以 $(-4, 0)$、$(0, 1)$、$(1, 2)$ 及 $(2, 3)$ 各有一個根。

常見錯誤

- 沒有解釋為何 x 係數是 s 和 $-s$：這源於 x^3 的係數為零，即各根之和為零。
- 除以 s 之前忘記指出 $s \neq 0$。
- 把根寫成 $\sqrt{18 \pm 12\sqrt{2}}$ 便停下：題目要求完全化簡，而這正是第 (i) 部分的用途。

STEP 之外

這其實是經過包裝的費拉里（Ferrari）四次方程解法：關於 s^2 的三次方程就是預解三次式（resolvent cubic），它的三個根對應把四個根兩兩配對的三種方法。為何四次方程可以化為三次方程，而一般的五次方程（quintic）卻根本無法用根式求解（solved by radicals），正是伽羅瓦理論（Galois theory）的主題；這套理論把方程的可解性與其根的對稱性聯繫起來。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是大學一年級邁向這個理論的好途徑。

詳細解答

STEP I 2019，第 5 題

純數學 • 三維向量

STEP I 2019，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

兩個向量（vector）相等，當且僅當它們的分量（component）全部相同，因此題中每個幾何條件都可化為關於 p、q、r 和 s 的幾條簡單方程。四點共面（coplanar）等價於純量三重積（scalar triple product）（即一個 3×3 行列式（determinant））等於零。把條件用坐標寫出後，每一部分都只是簡短的代數運算。

解答

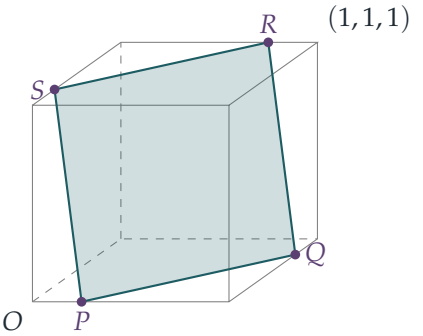
第 (i) 部分

若 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$，則對邊 PQ 與 SR 平行且等長，所以 $PQRS$ 是**平行四邊形**（parallelogram）。（此時由 $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{SR}$ 亦得 $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$。）

若同時有 $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PS}|$，則平行四邊形的兩條鄰邊相等，因而四條邊全部相等：$PQRS$ 是**菱形**（rhombus）。

第 (ii) 部分：共面條件

各點位於單位立方體（unit cube）的棱上，所以 $p, q, r, s \in [0, 1]$。這裏 P 和 Q 位於面 $z = 0$ 上，而 R 和 S 位於面 $z = 1$ 上。



四點共面，當且僅當 $\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{PS}$ 和 $\overrightarrow{PR}$ 線性相關（linearly dependent），亦即它們的純量三重積為零。由

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -p \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} r-p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

沿第一行展開行列式，得

$$\begin{vmatrix} 1-p & q & 0 \\ -p & s & 1 \\ r-p & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-p)(s-1) - q\big(-p-(r-p)\big) + 0$$
$$= (1-p)(s-1) + qr.$$

令其等於零，即得 $rq = (1-s)(1-p)$，正是所求。

如果你想避開行列式，可把經過 P、Q、R 的平面寫成 $\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{PQ} + \mu\overrightarrow{PR}$，其上的點為

$$\big(p + \lambda(1-p) + \mu(r-p),\ \lambda q + \mu,\ \mu\big).$$

要 $S = (0, s, 1)$ 在此平面上，由 z 分量需 $\mu = 1$，再由 y 分量得 $\lambda q = s - 1$，由 x 分量得 $r + \lambda(1-p) = 0$。把最後一條方程乘以 q 並代入，得 $rq + (s-1)(1-p) = 0$，即同一條件。（這裏用到 P、Q、R 不共線（collinear），這是成立的，因為 R 在頂面，而 P、Q 在底面。）

第 (ii)(a) 部分

我們有

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} r \\ 1-s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

兩者的 z 分量已經相同，所以

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \iff r = 1-p \text{ 且 } q = 1-s \iff p+r = 1 \text{ 且 } q+s = 1.$$

形心（centroid）為

$$\tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} p+1+r \\ q+1+s \\ 2 \end{pmatrix},$$

而立方體的中心是 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。第三個分量總是相同，所以形心位於中心當且僅當 $p+1+r=2$ 且 $q+1+s=2$，這正是同樣的兩個條件 $p+r=1$、$q+s=1$。因此兩個命題等價。

（留意當 $r = 1-p$ 且 $s = 1-q$ 時，共面條件 $rq = (1-s)(1-p)$ 變成 $(1-p)q = q(1-p)$，自動成立：沒有任何位置被排除。）

第 (ii)(b) 部分

由 (a)，$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ 給出 $r = 1-p$ 及 $s = 1-q$。對於第二個條件，比較長度的平方，並利用 $\overrightarrow{PS} = (-p,\, s,\, 1)$ 及 $s = 1-q$：

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PS}|^2 &\iff (1-p)^2+q^2 = p^2+(1-q)^2+1 \\ &\iff 1-2p = 2-2q \\ &\iff q = p+\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以

$$q = p+\tfrac{1}{2}, \qquad r = 1-p, \qquad s = \tfrac{1}{2}-p.$$

由於 $q \le 1$ 及 $s \ge 0$，只有當 $0 \le p \le \frac{1}{2}$ 時各點才位於棱上。

想一想 哪兩個向量給出角 PQR？

在 Q 處的角是 $\overrightarrow{QP}$ 與 $\overrightarrow{QR}$ 之間的夾角（兩者都背離 Q）。利用剛求得的值，

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} p-1 \\ -p-\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} r-1 \\ 1-q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ \frac{1}{2}-p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

於是

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} &= -p(p-1)-(p+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-p) = p-p^2-(\tfrac{1}{4}-p^2) = p-\tfrac{1}{4}, \\ |\overrightarrow{QP}|^2 &= (1-p)^2+(p+\tfrac{1}{2})^2 = 2p^2-p+\tfrac{5}{4}, \\ |\overrightarrow{QR}|^2 &= p^2+(\tfrac{1}{2}-p)^2+1 = 2p^2-p+\tfrac{5}{4}. \end{aligned}$$

兩個長度相等，這正是菱形應有的性質，所以

$$\cos PQR = \frac{p-\frac{1}{4}}{2p^2-p+\frac{5}{4}} = \frac{4p-1}{5-4p+8p^2},$$

這是把分子分母同乘以 4 所得。這就是所求的結果。

正方形。 菱形是正方形，當且僅當它的角都是直角，即 $\cos PQR = 0$。分母 $8p^2-4p+5 = 8(p-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{2}$ 恆為正，所以這只在 $4p-1=0$ 時發生：

$$p=\tfrac{1}{4}, \qquad q=\tfrac{3}{4}, \qquad r=\tfrac{3}{4}, \qquad s=\tfrac{1}{4}.$$

此時邊長的平方為

$$2\cdot\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{5}{4}=\tfrac{9}{8},$$

所以每條邊的長度為 $\sqrt{9/8}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$。要與 $\frac{21}{20}$ 比較，可比較這兩個正數的平方：

$$\left(\tfrac{21}{20}\right)^2 = \tfrac{441}{400} < \tfrac{450}{400} = \tfrac{9}{8}.$$

因此正方形的邊長大於 $\frac{21}{20}$。（實際上約為 1.0607。）

驗算

- 當 $p=\frac{1}{4}$ 時，四點為 $(\frac{1}{4},0,0)$、$(1,\frac{3}{4},0)$、$(\frac{3}{4},1,1)$、$(0,\frac{1}{4},1)$；它們的平均值是 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，與 (a) 的預測一致，而直接計算亦得 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\frac{3}{16}-\frac{3}{16}=0$。
- 當 $p=0$ 時，公式給出 $\cos PQR=-\frac{1}{5}$。直接計算：$\overrightarrow{QP}=(-1,-\frac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{QR}=(0,\frac{1}{2},1)$，點積（dot product）為 $-\frac{1}{4}$，長度平方均為 $\frac{5}{4}$，所以 $\cos PQR=-\frac{1}{5}$。✓
- 共面恆等式、(a) 中的等價關係及 $\cos PQR$ 的公式，均已用電腦以精確算術在大量隨機數值上驗證。

常見錯誤

- 用 $\overrightarrow{QP}$ 和 $\overrightarrow{RQ}$（一個指向 Q，一個背離 Q）求在 Q 處的角：這會令餘弦的符號相反。
- 弄錯字母次序：$\overrightarrow{SR}$ 是 $R-S$，不是 $S-R$。
- 單憑計算機數值就斷言 $\frac{3\sqrt{2}}{4}>\frac{21}{20}$，而沒有作精確比較；由於兩者都是正數，把兩邊平方可以保持論證嚴謹。

STEP 之外

用行列式判斷共面，是一個一般事實在三維的特例：一組向量線性相關，當且僅當由它們組成的矩陣（matrix）的行列式為零。立方體的平面截面也是豐富的例子來源（經過中心並垂直於一條體對角線的平面，截出一個正六邊形（regular hexagon））。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是從這種幾何觀點出發，發展行列式、體積與線性相關的理論。

詳細解答

STEP I 2019，第 6 題

純數學 • 不等式與界限

STEP I 2019，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

每條方程直接求解看來都無從入手，但可以把它拆成「某式 = 另一式」的形式，其中左邊永遠不會小於某個數，而右邊永遠不會大於同一個數。於是方程只在兩邊都恰好等於那個數時才成立，而這兩個條件各自都很容易求解。每一部分前面的小題，正是為了建立這兩個界（bound）。

解答

第 (i) 部分

配方（completing the square），

$$\begin{aligned} 9x^2 - 12x\cos\theta + 4 &= (3x - 2\cos\theta)^2 - 4\cos^2\theta + 4 \\ &= (3x - 2\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta. \end{aligned}$$

平方數永不為負，所以最小值是 $4\sin^2\theta$，當且僅當 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$ 時取得。

把這個四次式（quartic）看成 x^2 的二次式（quadratic），

$$12x^2\sin\theta - 9x^4 = -\left(3x^2 - 2\sin\theta\right)^2 + 4\sin^2\theta.$$

所以 $12x^2\sin\theta - 9x^4 \le 4\sin^2\theta$，當且僅當 $x^2 = \frac{2}{3}\sin\theta$ 時取等號。由於 $0 < \theta < \pi$，我們有 $\sin\theta > 0$，所以 x^2 確實可以取這個值，而最大值是 $4\sin^2\theta$。

現在把所給方程中的 x^2 項拆成 $9x^2 - 12x^2\sin\theta$，再移項整理：

$$\underbrace{9x^2 - 12x\cos\theta + 4}_{\ge 4\sin^2\theta} = \underbrace{12x^2\sin\theta - 9x^4}_{\le 4\sin^2\theta}.$$

想一想 一個至少是 $4\sin^2\theta$ 的量，怎樣才能等於一個至多是 $4\sin^2\theta$ 的量？

只有兩者都等於 $4\sin^2\theta$ 才行。所以方程成立當且僅當同時有

$$x = \tfrac{2}{3}\cos\theta \qquad 和 \qquad x^2 = \tfrac{2}{3}\sin\theta.$$

消去 x：$\frac{4}{9}\cos^2\theta = \frac{2}{3}\sin\theta$，所以 $2\cos^2\theta = 3\sin\theta$，即 $2 - 2\sin^2\theta = 3\sin\theta$。因此

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) = 0.$$

由於 $\sin\theta \neq -2$，得 $\sin\theta = \frac{1}{2}$，所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 或 $\theta = \frac{5\pi}{6}$。再由 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$ 分別得 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 或 $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$，而兩種情況下都有 $x^2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\sin\theta$，符合要求。解為

$$(x,\theta) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\pi}{6}\right) \quad 和 \quad (x,\theta) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{5\pi}{6}\right).$$

第 (ii) 部分

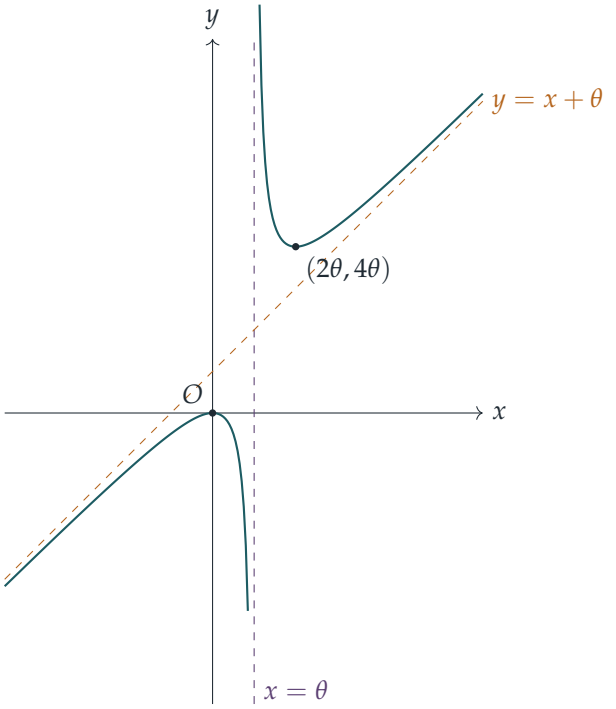
草圖。這裏 $\theta > 0$。曲線 $y = \dfrac{x^2}{x-\theta}$ 經過原點（而且不在其他地方與坐標軸相交），並有鉛垂漸近線（vertical asymptote）$x = \theta$。作除法，

$$\frac{x^2}{x-\theta} = x + \theta + \frac{\theta^2}{x-\theta},$$

所以 $y = x + \theta$ 是一條斜漸近線（oblique asymptote）；當 $x > \theta$ 時曲線在它上方，當 $x < \theta$ 時曲線在它下方。用商法則（quotient rule）求導，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x-\theta) - x^2}{(x-\theta)^2} = \frac{x(x-2\theta)}{(x-\theta)^2},$$

所以駐點（stationary point）是局部極大點 $(0,0)$ 和局部極小點 $(2\theta, 4\theta)$（斜率在 $x = 0$ 處由 $+$ 變為 $-$，在 $x = 2\theta$ 處由 $-$ 變為 $+$）。



推論。若 $x < \theta$，分子 $x^2 \geq 0$ 而分母為負，所以 $y \leq 0$。若 $x > \theta$，該分支的最低點是 $(2\theta, 4\theta)$，所以 $y \geq 4\theta$。用代數方法說明：當 $x > \theta$ 時，

$$x^2 - 4\theta(x-\theta) = (x-2\theta)^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x-\theta} \geq 4\theta,$$

這裏除以了正數 $x-\theta$。所以曲線永遠不會取嚴格介乎 0 與 4θ 之間的值。

三角函數的界。分子滿足 $\sin^2\theta\cos^2 x \leq 1 \cdot 1 = 1$，分母滿足 $1 + \cos^2\theta\sin^2 x \geq 1$。一個至多為 1 的數除以一個至少為 1（且為正）的數，結果至多為 1：

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2 x}{1+\cos^2\theta\sin^2 x} \leq 1.$$

要取等號，必須同時有 $\sin^2\theta\cos^2 x = 1$ 和 $\cos^2\theta\sin^2 x = 0$。另外留意這個分式 ≥ 0，因為它是平方數除以正數。

最後的方程。記 $L = \dfrac{x^2}{4\theta(x-\theta)}$，並以 R 表示右邊。把前面的結果除以 $4\theta > 0$，得 $L \leq 0$ 或 $L \geq 1$。但 $0 \leq R \leq 1$。

> ? **想一想** 一個 ≤ 0 或 ≥ 1 的數，能在哪裏與 $[0,1]$ 中的數相等？

只能在 0 或 1。所以我們需要 $L = R = 0$ 或 $L = R = 1$。

► $L = 0$ 迫使 $x = 0$，但這時 $R = \sin^2\theta > 0$，因為 $0 < \theta < \pi$。無解。

- $L = 1$ 表示 $x^2 = 4\theta(x-\theta)$，即 $(x-2\theta)^2 = 0$，所以 $x = 2\theta$。$R = 1$ 需要 $\sin^2\theta\cos^2 x = 1$，這迫使 $\sin^2\theta = 1$ 和 $\cos^2 x = 1$。由於 $0 < \theta < \pi$，得 $\theta = \frac{\pi}{2}$，所以 $x = \pi$，而且確實有 $\cos^2\pi = 1$ 和 $\cos^2\theta\sin^2 x = 0$。

唯一的解是 $x = \pi$，$\theta = \frac{\pi}{2}$。

驗算

- 把 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$，$\theta = \frac{\pi}{6}$ 代入四次方程：$9\cdot\frac{1}{9} + (9-6)\cdot\frac{1}{3} - 12\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4 = 1+1-6+4 = 0$。
- 在最後的方程中取 $x = \pi$，$\theta = \frac{\pi}{2}$：$L = \pi^2/(2\pi\cdot\frac{\pi}{2}) = 1$，而 $R = 1\cdot 1/(1+0) = 1$。
- 用電腦在 (x,θ) 的細密網格上搜尋，兩條方程都沒有找到其他近似解，只有在被排除的端點 $\theta \to 0$ 和 $\theta \to \pi$ 附近出現一些虛假的近似解（那裏 $\sin\theta \to 0$，兩個界都失效）。

常見錯誤

- 求得 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ 就停下來：x 必須滿足 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$，這對每個 θ 都確定了 x 的正負號，所以 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5\pi}{6})$ 不是解。
- 在最後一部分忘記考慮 $L = R = 0$ 的情況；這個情況必須排除，而它之所以能被排除，只是因為 $\sin\theta \neq 0$。
- 聲稱分式 ≤ 1「因為 $\sin^2$ 和 $\cos^2$ 都不超過 1」，卻沒有說明為何分母不會破壞這個結論。

STEP 之外

把一條方程夾在一個下界和一個上界之間、而兩者只在單一值相遇，這個技巧是分析學（analysis）的常用手法：證明 AM–GM（算術–幾何平均）不等式或柯西–施瓦茨（Cauchy–Schwarz）不等式何時取等號，就是這樣做的；夾逼定理（squeeze theorem）確定極限，也是靠這個道理。學會問「這個不等式何時取等號？」，往往是找到解法的捷徑。想看更多同類思路，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析學》），或 Siklos 的習題集 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

詳細解答

STEP I 2019，第 7 題

純數學 • 無理性與同餘

> **STEP I 2019，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

若以最簡形式（lowest terms）寫成 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a/b$，平方兩次便可消去根式（surd），得到一條關於整數 a 和 b 的多項式（polynomial）方程。接著，我們在模（modulo）某個小質數（prime）下考察這條方程。方程迫使該質數要麼同時整除 a 和 b，要麼兩者都不整除。「兩者都整除」與最簡形式矛盾，而餘數則排除了「兩者都不整除」的情況。整個技巧的精髓，在於選出一個能令餘數真正產生衝突的質數。

解答

第 (i) 部分

步驟 1。每個整數都可寫成 $3k$、$3k+1$ 或 $3k-1$（其中 k 為某整數），因此若 $3\nmid a$，則 $a=3k\pm1$。無論哪種情況，

$$a^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1,$$

即比 3 的某個倍數大一。

步驟 3。將 $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 平方，得

$$\frac{a^2}{b^2}=2+2\sqrt{6}+3,\qquad 故\qquad a^2-5b^2=2\sqrt{6}\,b^2.$$

現在根式已單獨置於一邊，再平方一次便可把它消去：

$$a^4-10a^2b^2+25b^4=24b^4,$$
$$a^4+b^4=10a^2b^2,$$

此即所求。（我們只需要這個方向的蘊涵：步驟 2 中的任何 a, b 都必須滿足這條方程。）

步驟 4。假設 $3 \mid a$。將步驟 3 的結果移項，

$$b^4 = 10a^2b^2 - a^4 = a^2\,(10b^2 - a^2),$$

而右方可被 3 整除（甚至可被 9 整除）。若 $3 \nmid b$，則由步驟 1 得 $b^2 = 3m + 1$，於是 $b^4 = (b^2)^2 = 9m^2 + 6m + 1$ 不是 3 的倍數，矛盾。因此 $3 \mid b$。

> **想一想** 步驟 4 處理了 $3 \mid a$ 的情況。那麼 3 既不整除 a 也不整除 b 的情況又如何？

步驟 5。步驟 3 中的方程對 a 和 b 是對稱的，所以把兩者的角色互換後，步驟 4 依然成立：若 $3 \mid b$，則 $3 \mid a$。由於 a 和 b 沒有大於一的公因數，它們不會同時是 3 的倍數，故由步驟 4，兩者都不是 3 的倍數。步驟 2 至 4 並未涵蓋這種情況，而這正是步驟 1 派上用場之處。設 $a^2 = 3r + 1$ 及 $b^2 = 3s + 1$。那麼 a^4、b^4 和 a^2b^2 都比 3 的某個倍數大一（兩個這類數的乘積仍具有此形式）。在模 3 下考察步驟 3 的方程，

$$a^4 + b^4 \equiv 1 + 1 = 2, \qquad 10a^2b^2 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \pmod 3,$$

因為 $10 \equiv 1$。步驟 3 中方程兩邊除以 3 的餘數不同，這是不可能的。所以這樣的 a 和 b 並不存在。此外，$\sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$，所以若它是有理數，便可寫成 a, b 均為正數且互質（coprime）的形式。因此 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是無理數（irrational）。

第 (ii) 部分

假設 $\sqrt{6} + \sqrt{7} = a/b$，其中 a, b 為正整數，且沒有大於一的公因數。與之前一樣，

$$\frac{a^2}{b^2} = 13 + 2\sqrt{42} \quad \Longrightarrow \quad (a^2 - 13b^2)^2 = 168\,b^4,$$

展開得 $a^4 - 26a^2b^2 + 169b^4 = 168b^4$，即

$$a^4 + b^4 = 26a^2b^2.$$

模 5 下的平方數。若 $5 \nmid a$，則 $a = 5k \pm 1$ 或 $a = 5k \pm 2$，從而

$$a^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1 \qquad 或 \qquad a^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4.$$

所以 $a^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$，因此 $a^4 \equiv 1 \pmod 5$。

整除性。若 $5 \mid a$，則 $b^4 = a^2(26b^2 - a^2)$ 是 5 的倍數。但若 $5 \nmid b$，則 $b^4 \equiv 1 \pmod 5$，所以必有 $5 \mid b$。由對稱性，$5 \mid b$ 蘊涵 $5 \mid a$。由於 a 和 b 互質，兩者都不能被 5 整除。

矛盾。現在 $a^4 \equiv b^4 \equiv 1$，而 $a^2b^2 \equiv (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1 \pmod 5$。由於 $26 \equiv 1$，

$$a^4 + b^4 \equiv 2, \qquad 26a^2b^2 \equiv \pm 1 \pmod 5.$$

但 $2 \not\equiv \pm 1 \pmod 5$，所以方程不可能成立。因此 $\sqrt{6} + \sqrt{7}$ 是無理數。

? **想一想** 若我們在這裏嘗試用 3 代替 5，哪一步會失效？

為何 3 行不通。論證的前半部分在模 3 下依然成立：若 $3 \mid a$，則 $3 \mid b^4$，故 $3 \mid b$，所以 a 和 b 都不是 3 的倍數。但此時 $a^4 \equiv b^4 \equiv a^2b^2 \equiv 1 \pmod 3$，而由於 $26 \equiv 2 \pmod 3$，

$$a^4 + b^4 \equiv 2 \qquad 及 \qquad 26a^2b^2 \equiv 2 \pmod 3.$$

兩邊一致，因此沒有矛盾。在模 3 下，每一對非 3 的倍數都滿足方程 $a^4 + b^4 = 26a^2b^2$，所以單靠被 3 整除的性質無法排除它。（在第 (i) 部分，係數是 $10 \equiv 1$，而 $2 \neq 1$ 造成了衝突。這裏係數是 $26 \equiv 2$，所以衝突消失了。）

驗算

- 數值上，$x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3.1463$ 使 $x^4 - 10x^2 + 1 \approx 0$（誤差約為 10^{-14}）。同樣，$y = \sqrt{6} + \sqrt{7} \approx 5.0952$ 使 $y^4 - 26y^2 + 1 \approx 0$。所以這兩條四次方程是正確的。
- 逐一嘗試每一對餘數：$a^4 + b^4 \equiv 10a^2b^2 \pmod 3$ 的唯一解是 $a \equiv b \equiv 0$，而 $a^4 + b^4 \equiv 26a^2b^2 \pmod 5$ 亦然。但 $a^4 + b^4 \equiv 26a^2b^2 \pmod 3$ 還有 $(1,1)$、$(1,2)$、$(2,1)$ 和 $(2,2)$ 這些解。這正是 3 在第 (ii) 部分行不通的原因。
- 電腦搜尋顯示，不存在滿足任一方程且 $a, b \leq 400$ 的互質正整數 a, b。

常見錯誤

- 在步驟 4 後便停下。步驟 4 只說明 a 和 b 不能是 3 的倍數，你仍需要步驟 1 去處理兩者都不是 3 的倍數的情況。
- 未給理由便斷言 $3 \mid b^4 \Rightarrow 3 \mid b$。步驟 1 正好提供了理由：若 $3 \nmid b$，則 b^4 的餘數是 1。
- 在第 (ii) 部分，忘記了平方數在模 5 下的餘數可以是 4（即 -1），所以 a^2b^2 可以 $\equiv \pm 1$，而不只是 1。

STEP 之外

數 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是 $x^4 - 10x^2 + 1$ 的根，而這裏的論證實際上是在證明這個多項式沒有有理根。有理根定理（rational root theorem）提供了一條更快的途徑：任何有理根都必須是 ± 1，而兩者都不成立。把多項式在模某個質數下約化，藉此證明它沒有根或因式，是大學一年級代數中的標準工具（例如用於不可約性（irreducibility）檢驗）。有趣的是，儘管 $x^4 - 10x^2 + 1$ 在有理數上不可約，它在模每一個質數下卻都可以因式分解，這是一個著名的例子。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）進一步發展了這些概念，

而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）則是一本關於同餘（congruences）的精彩入門書。

詳細解答

STEP I 2019，第 8 題

純數學 • 代換積分法

STEP I 2019，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

題目說明不必求出 f 的表達式，所以每一部分都是要把一個積分改造，直至它的樣子完全變成

$$\int_1^X \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{f}(X)$$

其中 X 是某個積分上限。兩個步驟幾乎完成全部工作：一是伸縮（stretch）（$u = kt$），把 $\frac{u-k}{u+k}$ 變成 $\frac{t-1}{t+1}$；二是平移（shift）（$u = t + c$），使分式中的兩個數關於零對稱。最後一部分還需要多一個代換，把一個商的平方根變成形式合適的函數。

解答

全題都用到這個事實：代換（substitution）會同時改變被積函數（integrand）、微分（differential）以及積分限（limits）；答案正正出現在積分上限之中。

第 (i) 部分

若設 $u = 2t$，被積函數 $\sqrt{\frac{u-2}{u+2}}$ 便會變成 $\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$，因為此時 $\frac{2t-2}{2t+2} = \frac{t-1}{t+1}$。由於 $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t$，而積分限為 $u = 2 \mapsto t = 1$、$u = x \mapsto t = \frac{1}{2}x$，

$$\int_2^x \sqrt{\frac{u-2}{u+2}}\,\mathrm{d}u = \int_1^{x/2} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,2\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{f}\left(\tfrac{1}{2}x\right).$$

條件 $x > 2$ 正好保證 $\frac{1}{2}x > 1$，因此 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ 有定義。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

這裏分式中的兩個數是 0 和 -4，並不關於零對稱。它們的中點是 -2，所以我們平移 2：設 $u = v - 2$。於是 $\frac{u}{u+4} = \frac{v-2}{v+2}$，$\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$，而積分限 $u = 0, x$ 變成 $v = 2, x+2$。現在以 $x+2$（它大於 2）代替 x 應用第 (i) 部分，便可完成：

$$\int_0^x \sqrt{\frac{u}{u+4}}\,\mathrm{d}u = \int_2^{x+2} \sqrt{\frac{v-2}{v+2}}\,\mathrm{d}v = 2\,\mathrm{f}\big(\tfrac{1}{2}x+1\big).$$

第 (iii) 部分

分式中的兩個數是 5 和 -1，中點是 2。所以設 $u = v+2$，則

$$\frac{u-5}{u+1} = \frac{v-3}{v+3},$$

而積分限 $u = 5, x$ 變成 $v = 3, x-2$。接着伸縮 3 倍，設 $v = 3t$，使得 $\frac{v-3}{v+3} = \frac{t-1}{t+1}$ 及 $\mathrm{d}v = 3\,\mathrm{d}t$，積分限為 $t = 1, \frac{1}{3}(x-2)$：

$$\begin{aligned}\int_5^x \sqrt{\frac{u-5}{u+1}}\,\mathrm{d}u &= \int_3^{x-2} \sqrt{\frac{v-3}{v+3}}\,\mathrm{d}v = \int_1^{(x-2)/3} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,3\,\mathrm{d}t \\ &= 3\,\mathrm{f}\Big(\frac{x-2}{3}\Big).\end{aligned}$$

由於 $x > 5$，自變量 $\frac{x-2}{3}$ 大於 1，這正是應有的情況。（兩個代換可合併為單一代換 $u = 3t+2$。）

第 (iv) 部分

這個被積函數中完全看不到商的平方根，而且次方也不對：分子是 u^2，根號內是 u^2+4。

> ? **想一想** 甚麼代換可以把 u^2+4 變成第 (ii) 部分中的 $u+4$？

設 $u^2 = w$，則 $u = \sqrt{w}$（在 $[1,2]$ 上 $u > 0$），且 $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}}$。積分限 $u = 1, 2$ 變成 $w = 1, 4$，而

$$\frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u = \frac{w}{\sqrt{w+4}} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+4}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w,$$

這正是第 (ii) 部分的被積函數。在 0 處把區間分拆，並兩次應用第 (ii) 部分（分別取 $x = 4$ 和 $x = 1$），

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\left(\int_0^4 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w - \int_0^1 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(2\,\mathrm{f}(3) - 2\,\mathrm{f}\big(\tfrac{3}{2}\big)\Big) = \mathrm{f}(3) - \mathrm{f}\big(\tfrac{3}{2}\big).\end{aligned}$$

驗算

- 每個答案在積分下限處的表現都正確：在 (i) 中取 $x = 2$，得 $2\,\mathrm{f}(1) = 0$；在 (ii) 中取 $x = 0$，得 $2\,\mathrm{f}(1) = 0$；在 (iii) 中取 $x = 5$，得 $3\,\mathrm{f}(1) = 0$。
- 求導是快捷的檢驗方法。對於 (iii)，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,3\,\mathrm{f}\left(\frac{x-2}{3}\right) = \mathrm{f}'\left(\frac{x-2}{3}\right) = \sqrt{\frac{x-5}{x+1}}$，與預期相符。
- 以數值計算，(iv) 兩邊都等於 0.91007；而在 (iii) 中取 $x = 11$，兩邊都等於 3.19704，兩者均由直接數值積分（numerical integration）求得。

常見錯誤

- 忘記 $\mathrm{d}u = k\,\mathrm{d}t$ 帶來的因子，結果得出 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ 而非 $2\,\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$。
- 改了被積函數卻沒有改積分限，尤其是上限——而答案正正就在上限之中。
- 在 (iv) 中只寫出 $\frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{f}(3)$：第 (ii) 部分給出的是由 0 開始的積分，所以必須減去由 0 到 1 的那一段。

STEP 之外

這裏的核心想法是：一整族積分其實只是同一個積分，透過不同的仿射變量代換（affine change of variable）$u = at + b$ 去看而已。辨認出隱藏在表達式中的「標準形式」，是大學分析學以及把微分方程（differential equations）化為標準型（canonical forms）時經常用到的技巧。（事實上，利用雙曲函數（hyperbolic functions）可以求出 f 的閉式（closed form），但這道題顯示，即使不用它也可以走得很遠。）關於代換與積分的嚴謹理論，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；如想找更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

詳細解答

STEP I 2019，第 9 題

力學 • 傾倒與摩擦力

STEP I 2019，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

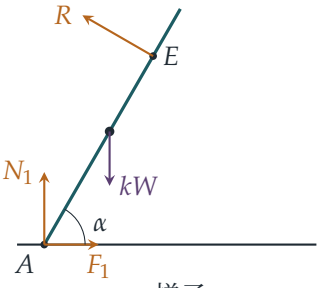
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

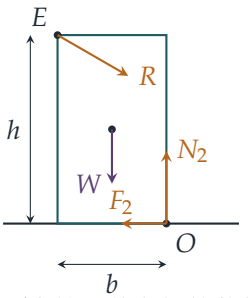
把梯子和箱子看作兩個獨立的物體，兩者之間只靠一個力相連。由於接觸處光滑（smooth），這個力垂直於梯子，所以它的作用線由 α 決定，只有大小是未知的。對梯子以其底端取力矩（moments），可求出這個力的大小；對箱子以它將要翻倒（topple）所繞的那條棱取力矩，便得到翻倒的條件。關係式 $h = b\tan\alpha$ 的作用，是讓箱子的力矩化簡成一個倍角表達式。

解答

把箱子視為均勻的剛性長方體（rigid cuboid），梯子視為輕桿（light rod），油漆工視為質點（particle）。梯子與箱子之間的接觸是光滑的；兩處與地面的接觸都是粗糙（rough）的。設 E 為梯子所接觸的那條棱，A 為梯子的底端，O 為箱子底部離梯子最遠的那條棱（即箱子翻倒時所繞的棱）。



梯子



箱子（處於即將翻倒的狀態）

第 (i) 部分

由於 E 處沒有摩擦，箱子對梯子的作用力 R 垂直於梯子。因為 E 位於高度 h，沿梯子量度有 $AE = h/\sin\alpha$。當油漆工位於高度 λh 時，其沿梯子與 A 的距離為 $\lambda h/\sin\alpha$，所以與 A 的水平距離為 $\lambda h\cot\alpha$。

梯子是輕的，所以對 A 的力矩只來自 R 和油漆工的重量（N_1 和 F_1 都作用於 A）。由於 R 垂直於 AE，它的力臂就是 AE 本身：

$$R\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = kW\cdot\lambda h\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad\Longrightarrow\quad R = k\lambda W\cos\alpha,$$

即為所求。（嚴格來說，這在攀爬的每一階段都成立，其中 λh 是油漆工當時的高度。）

第 (ii) 部分

根據牛頓第三定律（Newton's third law），梯子在 E 處以垂直於梯子、指向箱子內部的力 R 推動箱子。它的分量是水平方向的 $R\sin\alpha$（背離梯子，指向 O）及豎直向下的 $R\cos\alpha$。

當箱子即將繞 O 翻倒時，地面的反作用力完全作用於 O，所以 N_2 和 F_2 對 O 沒有力矩。對 O 取力矩，以順時針方向（即箱子翻倒的方向）為正。E 與 O 的水平距離為 b，並位於 O 上方高度 h 處，所以

- 水平分量 $R\sin\alpha$ 作用於高度 h，其力矩為 $+Rh\sin\alpha$；
- 豎直分量 $R\cos\alpha$ 作用於 O 靠梯子一側、距離為 b 處，其力矩為 $-Rb\cos\alpha$（在那一側向下壓會阻止翻倒）；
- 重量 W 作用於與 O 距離 $\frac{1}{2}b$ 處，其力矩為 $-\frac{1}{2}Wb$。

當總力矩達到零時，箱子開始翻倒：

$$R(h\sin\alpha - b\cos\alpha) = \tfrac{1}{2}Wb.$$

> **想一想** $h = b\tan\alpha$ 在這裏有甚麼幫助？

代入後得

$$h\sin\alpha - b\cos\alpha = b\,\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

利用第 (i) 部分的 $R = k\lambda W\cos\alpha$，條件變為

$$-k\lambda W\cos\alpha\cdot\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}Wb \quad\Longrightarrow\quad 2k\lambda\cos 2\alpha + 1 = 0,$$

即為所求。注意這要求 $\cos 2\alpha < 0$，即 $\alpha > 45°$，這與 $h > b$ 一致。

第 (iii) 部分

對箱子分解力（地面對它的反作用力有指向梯子的分量 F_2 和向上的分量 N_2）：

$$F_2 = R\sin\alpha, \qquad N_2 = W + R\cos\alpha.$$

箱子不滑動，所以 $F_2 \le \mu N_2$，即 $\mu \ge \dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha}$。

想一想 在攀爬過程中的哪一刻，這個條件最難滿足？

比值 $\dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{W/R + \cos\alpha}$ 隨 R 遞增，而 R 隨油漆工往上爬而增大。所以對摩擦力要求最大的時刻就是即將翻倒的一刻，我們需要不等式在該處成立。由 (ii)，$k\lambda = -\dfrac{1}{2\cos 2\alpha}$，所以

$$R = -\frac{W\cos\alpha}{2\cos 2\alpha}.$$

於是

$$R\sin\alpha = -\frac{W\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos 2\alpha} = -\frac{W\sin 2\alpha}{4\cos 2\alpha},$$

$$W + R\cos\alpha = W\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2\cos 2\alpha}\right) = W\,\frac{4\cos 2\alpha - (1+\cos 2\alpha)}{4\cos 2\alpha} = W\,\frac{3\cos 2\alpha - 1}{4\cos 2\alpha},$$

這裏用了 $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$。兩式相除，得

$$\mu \ge \frac{-\sin 2\alpha}{3\cos 2\alpha - 1} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - 3\cos 2\alpha},$$

即為所求。由於 $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ 給出 $\sin 2\alpha > 0$ 及 $\cos 2\alpha < 0$，分子和分母都是正數。

驗算

- 取 $\alpha = 60^\circ$，則 $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$。第 (ii) 部分給出 $k\lambda = 1$，所以 $R = \frac{1}{2}W$。於是 $F_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}W$ 及 $N_2 = \frac{5}{4}W$，得 $\mu \ge \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0.346$，與 $\sin 120^\circ/(1 - 3\cos 120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}/\frac{5}{2}$ 吻合。
- 當 $\alpha \to 45^\circ$（箱子接近正方體，高度只是略大於寬度），$\cos 2\alpha \to 0$，而 (ii) 要求 $k\lambda \to \infty$：E 處的推力幾乎沿着直線 EO，所以幾乎沒有轉動效果。這與幾何吻合：由於 $h = b\tan\alpha$，當 α 接近 45° 時，通過 E 的 R 的作用線差不多經過 O。
- 力矩方程、翻倒高度和摩擦力的界限，亦已用電腦就 α、b、k 和 W 的多組隨機取值驗證。

常見錯誤

- 把 E 處的力當作水平方向（就像光滑牆壁的情況）。這裏的接觸是與一條棱接觸，所以力垂直於梯子。

- 忘記 R 的豎直分量會加到箱子的法向反作用力（normal reaction）上，因此 $N_2 = W + R\cos\alpha$，而不是 W。
- 對箱子底部錯誤的那條棱取力矩：箱子是繞離梯子較遠的那條棱翻倒的。

STEP 之外

這是雙物體靜力學（statics）：把每個物體分開考慮，在接觸處運用牛頓第三定律，並選取能消去未知量的力矩中心。物體會先滑動還是先翻倒、隨着負載增加哪個約束會最先失效，這些問題貫穿工程力學以及接觸剛體的研究。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）正是以這種精神處理剛體靜力學與摩擦。

詳細解答

STEP I 2019，第 10 題

力學 • 拋體運動

STEP I 2019，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

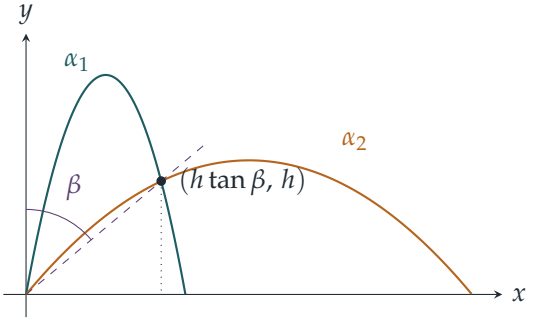
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

先寫出以 x 表示 y 的軌跡方程（trajectory equation），代入那個定點，然後留意 $1/\sin^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$ 可把方程化為關於 $c = \cot\alpha$ 的二次方程（quadratic）。之後，(i) 的一切都只是二次方程的代數：根之和與根之積（sum and product of roots）配合 cot 的和角公式（addition formula）就能得出 $\alpha_1 + \alpha_2$，而「兩個相異的根」則是一個判別式（discriminant）條件。第 (ii) 部分只需用一行能量論證（或 $v^2 = u^2 + 2as$）便可完成。

解答

把粒子視為在重力作用下自由運動的質點（point mass），不計空氣阻力。角 α 從向上的鉛垂線量起，因此初速度的水平分量為 $u\sin\alpha$，鉛垂分量為 $u\cos\alpha$。



上圖顯示經過該點的兩條可能軌跡（以 $\beta = 50°$、$k = 8$ 繪製）。該點位於經過 O、與鉛垂線成 β 角的直線上。

第 (i) 部分

在時間 t，

$$x = ut\sin\alpha, \qquad y = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

由於 $0 < \beta < 90°$，該點的 $x > 0$，所以 $\sin\alpha \neq 0$，於是可以消去 $t = x/(u\sin\alpha)$：

$$y = x\cot\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\sin^2\alpha} = cx - \frac{gx^2}{2u^2}(1+c^2),$$

這裏用了 $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$。現在代入 $x = h\tan\beta$、$y = h$，並除以 $h > 0$：

$$1 = c\tan\beta - \frac{gh}{2u^2}\tan^2\beta\,(1+c^2) = c\tan\beta - \frac{\tan^2\beta}{k}(1+c^2).$$

兩邊乘以 $k\cot^2\beta$，得 $k\cot^2\beta = ck\cot\beta - 1 - c^2$，即

$$c^2 - ck\cot\beta + 1 + k\cot^2\beta = 0, \qquad (*)$$

此即所求。

(a) 兩個值 $c_1 = \cot\alpha_1$ 和 $c_2 = \cot\alpha_2$ 就是關於 c 的二次方程 $(*)$ 的兩個根。（它們相異，因為 cot 在 $(0,\pi)$ 上是一一對應（one-to-one）的。）因此，由根之和與根之積，

$$\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 = k\cot\beta, \qquad \cot\alpha_1\cot\alpha_2 = 1 + k\cot^2\beta.$$

第一式就是第一個結果。至於第二個結果，利用 cot 的和角公式：

$$\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{\cot\alpha_1\cot\alpha_2 - 1}{\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2} = \frac{k\cot^2\beta}{k\cot\beta} = \cot\beta.$$

? **想一想** $\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \cot\beta$ 真的能推出 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ 嗎？

單靠這一點並不能：cot 的週期（period）是 180°，所以我們還需要確定 $\alpha_1 + \alpha_2$ 的範圍。這裏根之和 $k\cot\beta$ 與根之積 $1 + k\cot^2\beta$ 都是正數（因為 $k > 0$ 且 $\cot\beta > 0$），所以兩個根 c_1, c_2 都是正數。因此兩個角都是銳角，$0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 180°$，而 cot 在這個區間上是一一對應的。由於 β 也在這個區間內，所以 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$。

(b) 要有兩個相異的實數值 c，$(*)$ 的判別式必須為正：

$$k^2\cot^2\beta - 4(1 + k\cot^2\beta) > 0.$$

兩邊乘以 $\tan^2\beta > 0$，

$$k^2 - 4k - 4\tan^2\beta > 0.$$

左邊關於 k 的二次式的根為 $k = 2 \pm \sqrt{4 + 4\tan^2\beta} = 2 \pm 2\sec\beta$（利用 $1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$ 及 $\sec\beta > 0$），所以不等式成立當且僅當 $k < 2 - 2\sec\beta$ 或 $k > 2 + 2\sec\beta$。但 $\sec\beta > 1$，所以 $2 - 2\sec\beta < 0 < k$，第一種情況不可能出現。因此

$$k > 2(1 + \sec\beta).$$

第 (ii) 部分

粒子必須升到高度 $h > 0$，所以其初始鉛垂速度 $u\cos\alpha$ 為正。在鉛垂方向上，運動的加速度恆為 $-g$，而在最高點時鉛垂速度為零，所以由 $v^2 = u^2 + 2as$，最大高度為

$$H = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}.$$

粒子經過高度為 h 的一點，所以 $H \geq h$：

$$\frac{u^2\cos^2\alpha}{2g} \geq h \quad\Longrightarrow\quad \frac{2u^2}{gh}\cos^2\alpha \geq 4 \quad\Longrightarrow\quad k \geq 4\sec^2\alpha,$$

其中先乘以 $4/(gh) > 0$，再除以 $\cos^2\alpha > 0$。等號成立當且僅當點 $(h\tan\beta, h)$ 正是軌跡的最高點。

驗算

- 取 $\beta = 50°$、$k = 8$。此時 $2(1+\sec 50°) \approx 5.11 < 8$，所以存在兩個角；解 $(*)$ 得 $\alpha_1 \approx 10.29°$ 及 $\alpha_2 \approx 39.71°$，兩者之和為 $50°$。以數值方法逐步推進運動，兩條軌跡在 $x = h\tan\beta$ 處都達到高度 $1.0000\,h$。
- 對這兩個角，$k\cos^2\alpha \approx 7.74$ 及 4.73，都不小於 4，符合 (ii) 的要求。
- 以電腦對數千組隨機的 β、h、k 進行檢驗，證實 $(*)$ 有兩個相異根當且僅當 $k > 2(1+\sec\beta)$，並且每次都有 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$。
- 單位：$u^2/(gh)$ 是無量綱（dimensionless）的，正如 k 應有的那樣。

常見錯誤

- 出於習慣，從水平線量度 α：本題中水平分量是 $u\sin\alpha$，而不是 $u\cos\alpha$。
- 未證明兩個角都是銳角，便由 $\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \cot\beta$ 得出 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$。
- 在 (b) 中保留了負數的根 $k < 2 - 2\sec\beta$。

STEP 之外

結果 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ 說明兩個發射方向關於鉛垂線與目標連線之間的角平分線（bisector）對稱，這是關於「安全拋物線」(parabola of safety) 的一個經典事實：安全拋物線是所有速率為 u 的軌跡的包絡線 (envelope)，對應於兩根重合的臨界情況 $k = 2(1+\sec\beta)$。曲線族的包絡線是大學一年級一個連繫微積分與幾何的有趣課題。如想閱讀更多同類風格的力學，可參考 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

詳細解答

STEP I 2019，第 11 題

概率與統計 • 幾何分佈

STEP I 2019，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP I 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 12.9 節用不公平的硬幣作公平的決定中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/von-neumann.html

關鍵思路

兩人程序的每一輪都是一次獨立（independent）試驗，要麼作出決定，要麼不作出決定，因此作出決定的輪次服從幾何分佈（geometric distribution）。題目中「無論 p 取何值」這個界限，歸結為在 $p+q=1$ 的條件下 pq 最大可以是多少，而算術–幾何平均不等式（AM–GM inequality）正好回答了這個問題。在第 (ii) 部分，第二輪不再是重新開始，所以我們按第一輪的結果分情況討論，再用同一個關於 pq 的界限完成證明。

解答

第 (i) 部分

在任何一輪中，兩枚硬幣是獨立的。當兩枚都是正面（概率 p^2）或兩枚都是反面（概率 q^2）時便作出決定，所以

$$\mathrm{P}(\text{在某一輪作出決定}) = p^2+q^2, \qquad \mathrm{P}(\text{未作出決定}) = pq+qp = 2pq.$$

驗證一下：$p^2+q^2+2pq=(p+q)^2=1$。

由於每一輪都重新擲硬幣，各輪之間是獨立的。在第 n 輪作出決定，即是先有 $n-1$ 輪未作出決定，接着有一輪作出決定，所以

$$\mathrm{P}(\text{作出決定的輪次為}n) = (2qp)^{n-1}(q^2+p^2),$$

這就是所求的結果。

至於第二個結果，用補事件（complement）最為簡便。在第 n 輪或之前仍未作出決定，即是連續 n 輪都未作出決定，其概率為 $(2pq)^n$。因此

$$\mathrm{P}(\text{作出決定的輪次不遲於}n) = 1 - (2pq)^n.$$

（利用 $p^2 + q^2 = 1 - 2pq$，把幾何級數（geometric series）$\sum_{r=1}^{n}(p^2+q^2)(2pq)^{r-1}$ 求和，也會得到相同結果。）

現在我們需要一個對所有 p 都成立的 pq 上界（upper bound）。由於 $p, q \geq 0$，算術–幾何平均不等式給出

$$\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad pq \leq \frac{1}{4},$$

等號成立當且僅當 $p = q = \frac{1}{2}$。（等價地，$pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2$。）因此 $0 \leq 2pq \leq \frac{1}{2}$，所以 $(2pq)^n \leq \frac{1}{2^n}$，從而

$$\mathrm{P}(\text{作出決定的輪次不遲於}n) = 1 - (2pq)^n \geq 1 - \frac{1}{2^n}$$

對 p 的每一個值都成立，正如所求。公平硬幣是最差的情況。

第 (ii) 部分

設 D_1 為在第 1 輪作出決定的事件，D_2 為在第 2 輪作出決定的事件。由於這兩個事件互斥（mutually exclusive），我們需要求的是 $\mathrm{P}(D_1) + \mathrm{P}(D_2)$。

第 1 輪。三枚全是正面或全是反面：$\mathrm{P}(D_1) = p^3 + q^3$。

第 2 輪。若第 1 輪未作出決定，則硬幣顯示的是兩正一反，或兩反一正。

- **兩正一反**（概率 $3p^2q$，因為三人中任何一人都可以是擲出反面的那位）。擲出正面的兩人再擲一次，第三人則把反面的硬幣翻轉成正面。此時不可能全是反面，而全是正面當且僅當兩次新的投擲都是正面，概率為 p^2。這種情況貢獻 $3p^2q \cdot p^2 = 3p^4q$。
- **兩反一正**（概率 $3pq^2$）。同理，第三枚硬幣此時顯示反面，我們需要兩次新的投擲都是反面，概率為 q^2。這種情況貢獻 $3pq^2 \cdot q^2 = 3pq^4$。

第 2 輪的投擲與第 1 輪獨立，所以可以把概率相乘。於是

$$\mathrm{P}(D_2) = 3p^4q + 3pq^4 = 3pq\,(p^3 + q^3).$$

想一想 有沒有簡潔的方法整理 $p^3 + q^3 + 3pq(p^3 + q^3)$？

先抽出公因式 $p^3 + q^3$，再利用立方和公式及 $p + q = 1$：

$$p^3 + q^3 = (p+q)(p^2 - pq + q^2) = (p+q)^2 - 3pq = 1 - 3pq.$$

因此

$$\begin{aligned}\text{P(作出決定的輪次不遲於 2)} &= (p^3+q^3)(1+3pq)\\ &= (1-3pq)(1+3pq)\\ &= 1-9p^2q^2.\end{aligned}$$

由第 (i) 部分，$0 \le pq \le \frac{1}{4}$，所以 $p^2q^2 \le \frac{1}{16}$，從而

$$\text{P(作出決定的輪次不遲於 2)} \ge 1-\frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

無論 p 取何值都成立，且當 $p=\frac{1}{2}$ 時等號成立。證明完畢。

驗算

- 當 $p=1$（兩面都是正面的硬幣）時，立即作出決定。在第 (i) 部分，$1-(2pq)^n = 1$；在第 (ii) 部分，$1-9p^2q^2=1$，與預期相符。
- 在第 (ii) 部分取 $p=\frac{1}{2}$：第 1 輪作出決定的概率為 $\frac{1}{4}$。否則（概率 $\frac{3}{4}$）第 2 輪作出決定的概率為 $\frac{1}{4}$，得 $\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$，所以這個界限是可以達到的。
- 取 $p=0.3$，公式給出 $1-9(0.21)^2 = 0.6031$。用電腦模擬三人程序 200 000 次，得到 0.602。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分第 1 輪中，忘記乘上表示誰是與眾不同那一位的因子 3。
- 把第 (ii) 部分的第 2 輪當作全新的三枚硬幣一輪來處理。被翻轉的硬幣已經固定，所以「全是正面」和「全是反面」只有其中一個可能發生。
- 只在 $p=\frac{1}{2}$ 時證明這個界限。你需要對每一個 p 都有 $pq \le \frac{1}{4}$，而算術–幾何平均不等式這類不等式正好給你這個結果。

STEP 之外

第 (i) 部分是一個經典技巧，通常歸功於馮·諾伊曼（von Neumann），用來從一枚有偏差的硬幣得出公平的決定。在兩人程序中，只有當 $p=\frac{1}{2}$ 時，「酒店」和「茶室」的可能性才相等；但如果由一人擲兩次，並以 HT 和 TH 作為結果，那麼對每一個 p 結果都是公平的。作出決定前所需的輪數是一個幾何隨機變量（geometric random variable），而關於這類程序多快停止的問題，引出了停時（stopping times）和馬可夫鏈（Markov

chains）的研究。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對兩者都有介紹。

詳細解答

STEP II 2019，第 1 題

純數學 • 三次曲線的切線

STEP II 2019，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

先寫出 $x = a$ 處的切線(tangent)通過 $(p, 0)$ 的條件，再代入 $f(x) = (x - p)g(x)$：幾乎所有項都互相抵消，只剩下 $g'(a)$ 的某個倍數。因此，對於三次函數（cubic）而言，從根 p 出發的切線與曲線相切之處，正是另一個二次因式(quadratic factor)取駐值(stationary)之處，即另外兩個根的正中間。第 (ii) 部分則歸結為比較兩個斜率（gradient），以及把「切線與三次曲線交點」的方程因式分解(factorise)；這個方程在接觸點(point of contact)處必定有一個重根（double root）。

解答

開首的結果

$x = a$ 處的切線為 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$。由乘積法則（product rule），$f'(x) = g(x) + (x - p)g'(x)$。切線通過 $(p, 0)$ 當且僅當

$$\begin{aligned} 0 &= f(a) + f'(a)(p - a) \\ &= (a - p)g(a) + \big[g(a) + (a - p)g'(a)\big](p - a) \\ &= (a - p)g(a) - (a - p)g(a) - (a - p)^2 g'(a) \\ &= -(a - p)^2 g'(a). \end{aligned}$$

由於 $a \neq p$，因子 $(a - p)^2$ 不為零，所以上式成立當且僅當 $g'(a) = 0$。這就一次過證明了結果的兩個方向。

第 (i) 部分

此處 $f(x) = (x-p)g(x)$，其中 $g(x) = A(x-q)(x-r) = A\big(x^2 - (q+r)x + qr\big)$，所以 $g'(x) = A\big(2x - (q+r)\big)$。由開首的結果，並因為 $A \neq 0$，

$$g'(a) = 0 \iff 2a = q + r.$$

（注意 $a = \frac{1}{2}(q+r) > q > p$，所以 $a \neq p$，符合要求。）

至於斜率，由於 $g'(a) = 0$，有 $f'(a) = g(a) + (a-p)g'(a) = g(a)$。利用 $a - q = \frac{1}{2}(r-q)$ 及 $a - r = -\frac{1}{2}(r-q)$，

$$f'(a) = A \cdot \tfrac{1}{2}(r-q) \cdot \big(-\tfrac{1}{2}(r-q)\big) = -\frac{A(r-q)^2}{4}.$$

第 (ii) 部分

現在改為抽出根 r：$f(x) = (x-r)h(x)$，其中 $h(x) = A(x-p)(x-q)$。開首的結果以 r 代替 p 後同樣適用（推導中完全沒有用到選了哪一個根），所以 $x = c$ 處的切線通過 $(r, 0)$ 當且僅當 $h'(c) = 0$，即 $c = \frac{1}{2}(p+q)$。與第 (i) 部分完全一樣，其斜率為

$$f'(c) = h(c) = A \cdot \tfrac{1}{2}(q-p) \cdot \big(-\tfrac{1}{2}(q-p)\big) = -\frac{A(q-p)^2}{4}.$$

因此，由於 $A \neq 0$，

$$\text{兩切線平行} \iff (r-q)^2 = (q-p)^2 \iff r - q = q - p \iff q = \tfrac{1}{2}(p+r),$$

其中中間一步用到 $r - q > 0$ 及 $q - p > 0$，所以可以取正平方根。

想一想 不解三次方程，怎樣找出切線與三次曲線的另一個交點？

我們其實已經知道一個根，而且是重複兩次的：接觸點。在 $x = q$ 處，斜率為 $f'(q) = A(q-p)(q-r)$（乘積法則中另外兩項因含有 $x - q$ 而消失），且 $f(q) = 0$，所以該處的切線為 $y = A(q-p)(q-r)(x-q)$。它與曲線相交於

$$A(x-p)(x-q)(x-r) = A(q-p)(q-r)(x-q).$$

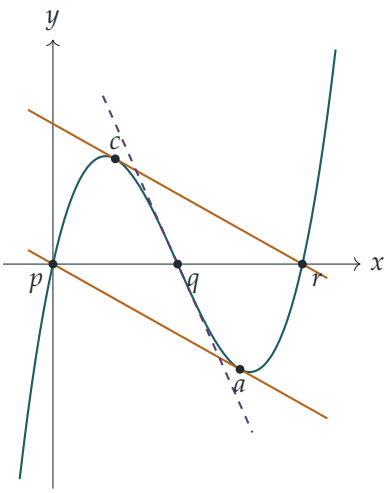
兩邊除以 $A \neq 0$ 並抽出因子 $x - q$，

$$\begin{aligned} 0 &= (x-q)\big[(x-p)(x-r) - (q-p)(q-r)\big] \\ &= (x-q)\big[x^2 - q^2 - (p+r)(x-q)\big] \\ &= (x-q)^2\,(x + q - p - r). \end{aligned}$$

所以切線與曲線相交於 $x = q$（一個重根，正如接觸點所應有的）及 $x = p + r - q$，除此以外再無其他交點。切線不會再與曲線相交，當且僅當這第三個根與 q 重合：

$$p + r - q = q \iff q = \tfrac{1}{2}(p+r).$$

這與之前的條件相同，所以第 (i) 及第 (ii) 部分的兩條切線互相平行，當且僅當 $x = q$ 處的切線不再與曲線相交。



草圖顯示 $q = \frac{1}{2}(p+r)$ 的情況：兩條切線(琥珀色)互相平行，而 q 處的切線(虛線)在該點穿過曲線，卻不在其他任何地方與曲線相交，因為此時 q 正是拐點 (point of inflection)。

驗算

- 取 $p = 0$、$q = 1$、$r = 2$、$A = 3$，則 $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$。於是 $f'(x) = 9x^2 - 18x + 6$，得 $f'(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$ 及 $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$，兩者都等於 $-A(r-q)^2/4 = -A(q-p)^2/4 = -\frac{3}{4}$，所以兩切線平行；這與預測相符，因為 q 是 p 與 r 的中點 (midpoint)。
- $x = \frac{3}{2}$ 處的切線為 $y = -\frac{9}{8} - \frac{3}{4}(x - \frac{3}{2})$，在 $x = 0$ 時其值為 0：它確實通過 $(p, 0)$。
- 以上所有恆等式亦已用電腦以精確算術，就大約二千組隨機選取的 $p < q < r$ 及 A 驗證過。

常見錯誤

- 忘記正是 $a \neq p$ 才容許我們約去 $(a-p)^2$；沒有這個條件，「僅當」方向便不成立，因為 p 處本身的切線必定通過 $(p, 0)$。
- 寫出 $(r-q)^2 = (q-p)^2 \Rightarrow r - q = q - p$，卻沒有說明為何排除負根。
- 嘗試從頭解三次方程求交點，而不利用接觸點處已知的重根。

STEP 之外

$x = q$ 處的切線之所以特別，是因為此時 q 是拐點，亦即三次曲線的對稱中心（centre of symmetry）：每條三次曲線繞其拐點作半周旋轉（half-turn）後都保持不變，這正是兩條切線變得平行的原因。這裏的切線與弦（chord）構作，是邁向三次曲線幾何的第一步；在那裏，直線與三次曲線的第三個交點被用來定義曲線上點的加法（橢圓曲線（elliptic curves））。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）有更多同類風格的題目。

詳細解答

STEP II 2019，第 2 題

純數學 • 反函數的積分

STEP II 2019，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

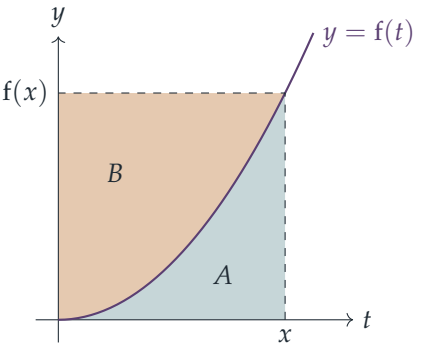
關鍵思路

$y = \mathrm{f}(t)$ 的圖像把以 $(0,0)$ 和 $(x,\mathrm{f}(x))$ 為頂點的長方形分成兩塊。其中一塊是曲線下方的面積，另一塊是曲線與 y 軸之間的面積，而後者正是反函數（inverse function）的積分。因此兩個積分之和等於長方形的面積。第 (i) 及 (ii) 部分的函數都只是隱式地定義，我們無法直接把它們積分，但它們的反函數卻是簡單的三次函數。這條恆等式讓我們把一個困難的積分換成一個容易的積分。

解答

開首的結果

由於當 $t > 0$ 時 $\mathrm{f}'(t) > 0$，而且 $\mathrm{f}(0) = 0$，所以 f 在 $[0,x]$ 上嚴格遞增(strictly increasing)，因此當 $t > 0$ 時 $\mathrm{f}(t) > 0$，而 f 有一個由 $[0,\mathrm{f}(x)]$ 到 $[0,x]$ 的反函數 f^{-1}。同一條曲線既可以用 $y = \mathrm{f}(t)$ 描述，也可以用 $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$ 描述。



區域 A 是在 $0 \le t \le x$ 範圍內曲線與 t 軸之間的部分，其面積為

$$A = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

區域 B 是在 $0 \le y \le \mathrm{f}(x)$ 範圍內曲線與 y 軸之間的部分，由一條條水平窄條組成。位於高度 y 的窄條由 $t = 0$ 延伸至 $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$，因此

$$B = \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

由於曲線遞增，並由 $(0,0)$ 走到 $(x,\mathrm{f}(x))$，A 與 B 恰好拼合在一起，互不重疊，填滿長方形 $0 \le t \le x$，$0 \le y \le \mathrm{f}(x)$。該長方形的面積是 $x\,\mathrm{f}(x)$，因此

$$\int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{f}(x),$$

即為所求。

第 (i) 部分

設 $\phi(y) = y^3 + y$。那麼 $\phi'(y) = 3y^2 + 1 > 0$，所以 ϕ 嚴格遞增，而且當 $y \to \pm\infty$ 時 $\phi(y) \to \pm\infty$。因此對每個實數 t，恰好有一個實數 y 使 $\phi(y) = t$，這個 y 就是 $\mathrm{g}(t)$。換句話說，$\mathrm{g} = \phi^{-1}$。

$\mathrm{g}(0) = 0$。代入 $t = 0$，得 $\mathrm{g}(0)\big(\mathrm{g}(0)^2 + 1\big) = 0$。由於 $\mathrm{g}(0)$ 是實數，$\mathrm{g}(0)^2 + 1 \ge 1$，故此 $\mathrm{g}(0) = 0$。

$\mathrm{g}'(t) > 0$。把 $\mathrm{g}(t)^3 + \mathrm{g}(t) = t$ 對 t 作隱函數求導（implicit differentiation），

$$\big(3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1\big)\,\mathrm{g}'(t) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{g}'(t) = \frac{1}{3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1} > 0,$$

因為分母至少是 1。

> **想一想** 我們寫不出 $\mathrm{g}(t)$ 的表達式，那怎樣才能把它積分？

我們根本不需要寫出來。g 滿足開首結果的條件，而它的反函數是 $\phi(y) = y^3 + y$，很容易積分。以 $x = 2$ 應用該結果時需要知道 $\mathrm{g}(2)$，即 $y^3 + y = 2$ 的實根。這個根是 $y = 1$，而且由於 ϕ 嚴格遞增，它是唯一的實根。因此

$$\int_0^2 \mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{g}(2) - \int_0^1 (y^3 + y)\,\mathrm{d}y = 2 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

第 (ii) 部分

比較兩個定義，$\mathrm{h}(t)$ 是 $y^3 + y = t + 2$ 的實數解，所以 $\mathrm{h}(t) = \mathrm{g}(t+2)$。代入 $u = t + 2$，

$$\int_0^8 \mathrm{h}(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^{10} \mathrm{g}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{10} \mathrm{g}(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^2 \mathrm{g}(u)\,\mathrm{d}u.$$

對於第一個積分，我們以 $x = 10$ 應用開首的結果。由於 $2^3 + 2 = 10$，我們有 $\mathrm{g}(10) = 2$，因此

$$\int_0^{10} \mathrm{g}(u)\,\mathrm{d}u = 10 \times 2 - \int_0^2 (y^3 + y)\,\mathrm{d}y = 20 - (4 + 2) = 14.$$

第二個積分則用第 (i) 部分的結果，

$$\int_0^8 \mathrm{h}(t)\,\mathrm{d}t = 14 - \frac{5}{4} = \frac{51}{4}.$$

另一種方法。我們也可以直接對 h 應用這幅圖。這次 $\mathrm{h}(0) = 1$，而不是 0。曲線由 $(0,1)$ 走到 $(8,2)$，而 $\mathrm{h}^{-1}(y) = y^3 + y - 2$。曲線下方的面積等於 8×2 的長方形，減去 0×1 的長方形（這裏是空的），再減去在 $1 \le y \le 2$ 範圍內曲線左方的面積：

$$16 - \int_1^2 (y^3 + y - 2)\,\mathrm{d}y = 16 - \left(\tfrac{15}{4} + \tfrac{3}{2} - 2\right) = 16 - \tfrac{13}{4} = \tfrac{51}{4}.$$

驗算

- 在 $[0,2]$ 上 $0 \le \mathrm{g}(t) \le 1$，所以 (i) 的積分必定介乎 0 與 2 之間。此外，g 在該區間上是凹函數（concave）（它是一個遞增凸函數（convex function）的反函數），所以積分至少等於三角形面積 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$。答案 $\frac{5}{4}$ 符合這些要求。
- 在 (ii) 中，在 $[0,8]$ 上 $1 \le \mathrm{h}(t) \le 2$，所以積分介乎 8 與 16 之間，而 12.75 亦符合。
- 在多個點上以數值方法解這些三次方程，再用辛普森法則（Simpson's rule）積分，得到 1.25000 和 12.75000，與準確答案吻合。

常見錯誤

- 反函數積分的上限用錯：上限是 $\mathrm{g}(2) = 1$，而不是 2。
- 把開首的結果應用於 h 時，誤以為 $\mathrm{h}(0) = 0$。由於 $\mathrm{h}(0) = 1$，圖中多了一條窄條，恆等式需要作出調整（或者改用 $\mathrm{h}(t) = \mathrm{g}(t+2)$）。
- 忘記證明 g 的定義是良好的，即 $y^3 + y = t$ 恰好有一個實根。

STEP 之外

開首的恆等式是*楊氏不等式*（Young's inequality）取等號的情況：對於滿足 $\mathrm{f}(0) = 0$ 的遞增函數 f 及任何 $a, b \ge 0$，都有 $ab \le \int_0^a \mathrm{f} + \int_0^b \mathrm{f}^{-1}$。取 $\mathrm{f}(t) = t^{p-1}$ 便得到 $ab \le a^p/p + b^q/q$，這是分析學中赫爾德不等式（Hölder's inequality）的出發點。g 可導且 $\mathrm{g}' = 1/\phi'(\mathrm{g})$ 這個事實，就是*反函數定理*（inverse function theorem）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對此有仔細的證明。

詳細解答

STEP II 2019，第 3 題

純數學 • 多項式根的界限

STEP II 2019，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

三角不等式（triangle inequality）讓我們把多項式（polynomial）的每一項換成它的大小，從而估計整個多項式的上界；而當 $|x| < 1$ 時，這些大小構成一個等比級數（geometric series）。這就給出細小的根（root）的一個下界（lower bound）。至於較大的根，竅門是考慮 $1/\omega$：把 f 的係數（coefficient）倒轉排列，得到的多項式形式完全相同，於是關於細小根的結果可以再派上用場一次。在第 (ii) 部分，這些界把尋找整數根的範圍縮小至只剩四個候選值。

解答

三角不等式

兩邊均為非負，因此只需比較它們的平方。由於 $x_1x_2 \leq |x_1x_2| = |x_1||x_2|$，

$$|x_1 + x_2|^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \leq |x_1|^2 + 2|x_1||x_2| + |x_2|^2 = \big(|x_1| + |x_2|\big)^2,$$

取非負平方根即得 $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$。

對於 n 個數，我們對 n 用歸納法（induction）。$n = 1$ 的情況是等式，而 $n = 2$ 已經證明。若結果對 $n - 1$ 個數成立，則對 $x_1 + \cdots + x_{n-1}$ 和 x_n 應用兩個數的情況，得

$$\begin{aligned} |x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n| &\leq |x_1 + \cdots + x_{n-1}| + |x_n| \\ &\leq |x_1| + \cdots + |x_{n-1}| + |x_n|, \end{aligned}$$

這正是 n 個數的結果。

第 (i)(a) 部分

我們有 $\mathrm{f}(x)-1=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$。先用三角不等式，再用 $|a_i|\le A$，最後對末項用 $1\le A$，得

$$\begin{aligned}|\mathrm{f}(x)-1| &\le |a_1||x|+\cdots+|a_{n-1}||x|^{n-1}+|x|^n\\ &\le A\big(|x|+|x|^2+\cdots+|x|^n\big).\end{aligned}$$

因為 $0\le|x|<1$，而無窮級數的所有項均為非負，所以有限的等比和不超過無窮的等比和：

$$|x|+|x|^2+\cdots+|x|^n\le\sum_{k=1}^{\infty}|x|^k=\frac{|x|}{1-|x|}.$$

因此 $|\mathrm{f}(x)-1|\le\dfrac{A|x|}{1-|x|}$，得證。

第 (i)(b) 部分

由於 $\mathrm{f}(\omega)=0$，我們有 $|\mathrm{f}(\omega)-1|=1$，故由 (a) 部分得

$$1\le\frac{A|\omega|}{1-|\omega|}.$$

因為 $1-|\omega|>0$，兩邊同乘時不等號方向不變：$1-|\omega|\le A|\omega|$，即 $1\le(1+A)|\omega|$，所以

$$|\omega|\ge\frac{1}{1+A}.$$

上界則是顯然的：$|\omega|<1\le1+A$。因此 $(*)$ 成立。

第 (i)(c) 部分

現在 $|\omega|\ge1$。下界很容易：由於 $A\ge1>0$，有 $|\omega|\ge1>\frac{1}{1+A}$。真正需要證明的是上界。

若 $|\omega|=1$，則立即有 $|\omega|\le1+A$，因此設 $|\omega|>1$。令 $\mathrm{g}(y)=y^n\,\mathrm{f}(1/y)$，即

$$\mathrm{g}(y)=1+a_{n-1}y+a_{n-2}y^2+\cdots+a_1y^{n-1}+y^n.$$

> ? **想一想** 為甚麼 g 可以使用 (a) 和 (b) 部分的結果？

它的形式與 f 完全相同：常數項（constant term）為 1，首項係數（leading coefficient）為 1，其餘係數是倒序排列的 $a_{n-1},\ldots,a_1$，每個的大小仍然不超過 A。因此 (b) 部分可以用同一個 A 應用於 g。

由於 $\omega \neq 0$，$g(1/\omega) = \omega^{-n} f(\omega) = 0$，所以 $1/\omega$ 是 g 的一個實根，且 $|1/\omega| < 1$。對 g 應用 (b) 部分，得

$$\frac{1}{|\omega|} \geq \frac{1}{1+A}, \qquad \text{所以} \qquad |\omega| \leq 1 + A.$$

因此，無論大小如何，f 的每個實根都滿足 $(*)$。（注意 0 永遠不是根，因為 $f(0) = 1$。）

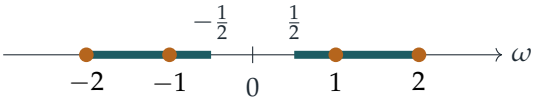
第 (ii) 部分

除以 135 並按升冪排列各項，方程即為 $f(x) = 0$，其中

$$f(x) = 1 - \tfrac{126}{135}x - \tfrac{91}{135}x^2 - \tfrac{100}{135}x^3 - x^4 + x^5.$$

這具有第 (i) 部分的形式，其中 $n = 5$：常數項和首項係數都是 1，其餘係數的大小為 $\frac{126}{135}, \frac{91}{135}, \frac{100}{135}, 1$，全部不超過 $A = 1$。所以每個實根都滿足

$$\tfrac{1}{2} \leq |\omega| \leq 2.$$



容許範圍（塗色部分）內的整數只有 ± 1 和 ± 2。代入原來的五次多項式（quintic）$p(x) = 135x^5 - 135x^4 - 100x^3 - 91x^2 - 126x + 135$：

$$\begin{aligned} p(1) &= 135 - 135 - 100 - 91 - 126 + 135 = -182, \\ p(-1) &= -135 - 135 + 100 - 91 + 126 + 135 = 0, \\ p(2) &= 4320 - 2160 - 800 - 364 - 252 + 135 = 879, \\ p(-2) &= -4320 - 2160 + 800 - 364 + 252 + 135 = -5657. \end{aligned}$$

所以唯一的整數根是 $x = -1$。事實上

$$p(x) = (x+1)\big(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135\big),$$

而四次因式（quartic factor）在 $x = -1$ 時的值為 971，所以 -1 是單根（simple root）。

驗算

- 展開 $(x+1)(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135)$，應得回原來的五次多項式。
- 這個五次多項式還有另外兩個實根，約為 0.595 和 1.725；兩者都在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 之內，與第 (i) 部分的預測一致。
- 試取 $f(x) = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$，其中 $A = 2$：根 1 落在 $[\frac{1}{3}, 3]$ 之內。這些界亦已用電腦在數百個隨機多項式上驗證過。

常見錯誤

- 在 (a) 部分忘記 x^n 項：它的係數是 1，而不是某個 a_n；正是 $A \geq 1$ 才讓它可以併入等比級數。
- 在 (c) 部分，當 $|\omega| \geq 1$ 時試圖直接在 ω 處再用 (a) 部分：此時等比級數不再收斂（converge）。應改為考慮 $1/\omega$。
- 在第 (ii) 部分把 135 的所有因數（divisors）逐一當作候選根測試：這樣做是正確的，但第 (i) 部分的界只留下四個需要測試。

STEP 之外

以係數估計多項式的根的範圍是一個經典課題；這裏的結果是柯西（Cauchy）界（Cauchy's bound）的一個版本，而且同一論證對複根（complex roots）一字不改地成立，只需把絕對值（absolute value）換成模（modulus）。倒轉變換 $y^n \mathrm{f}(1/y)$ 把細小的根與較大的根互換，是代數和複分析（complex analysis）中的標準工具。若想了解這類界以及更多關於複根幾何的內容，可以閱讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）。

詳細解答

STEP II 2019，第 4 題

純數學 • 三角函數裂項相消乘積

STEP II 2019，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

若一串餘弦的乘積中，角度每次加倍（或減半），只要乘以最小角的正弦，乘積便會伸縮相消（telescopes）：二倍角公式（double-angle formula）$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ 會把因子逐一「吞掉」。乘積一旦化為閉合形式（closed form），取對數（logarithm）便把它變成和，再求導便把 $\ln\cos$ 變成 $\tan$：正切之和正是由此而來。無窮的版本則可令 $n \to \infty$，並利用兩個標準極限得出。

解答

第 (i) 部分

把該乘積記為 P。由於 $\sin\frac{\pi}{9} \neq 0$，我們可以乘以它，並把恆等式使用三次：

$$\begin{aligned} 8\sin\tfrac{\pi}{9}\,P &= 4\big(2\sin\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{\pi}{9}\big)\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = 2\big(2\sin\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9}\big)\cos\tfrac{4\pi}{9} \\ &= 2\sin\tfrac{4\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \sin\tfrac{8\pi}{9} = \sin\big(\pi - \tfrac{\pi}{9}\big) = \sin\tfrac{\pi}{9}. \end{aligned}$$

兩邊除以 $8\sin\frac{\pi}{9}$，得

$$\cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

第 (ii) 部分

這裏的角 $x, \frac{x}{2}, \ldots, \frac{x}{2^n}$ 逐次減半，所以最小的是 $x/2^n$。由於 $0 < x/2^n < \frac{1}{2}\pi$，它的正弦不為零。乘以 $\sin(x/2^n)$ 後，因子 $\cos(x/2^n)$ 與它配對，得出 $\frac{1}{2}\sin(x/2^{n-1})$；這又與

$\cos(x/2^{n-1})$ 配對，如此類推，直至 $\cos x$。這 $n+1$ 步每一步都貢獻一個因子 $\frac{1}{2}$：

$$\sin\Big(\frac{x}{2^n}\Big)\prod_{k=0}^{n}\cos\Big(\frac{x}{2^k}\Big)=\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2x,\qquad \text{所以}\qquad \prod_{k=0}^{n}\cos\Big(\frac{x}{2^k}\Big)=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)}.$$

想一想 求導怎樣能把餘弦的乘積變成正切的和？

取對數。每個因子都是正數，因為對每個 k 都有 $0<x/2^k<\frac{1}{2}\pi$，而且 $\sin 2x>0$。因此

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\cos\Big(\frac{x}{2^k}\Big)=\ln\sin 2x-(n+1)\ln 2-\ln\sin\Big(\frac{x}{2^n}\Big).$$

對 x 求導，並由連鎖法則（chain rule）得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\cos(x/2^k)=-\frac{1}{2^k}\tan(x/2^k)$：

$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\Big(\frac{x}{2^k}\Big)=2\cot 2x-\frac{1}{2^n}\cot\Big(\frac{x}{2^n}\Big).$$

乘以 -1，正好得出所求結果：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\Big(\frac{x}{2^k}\Big)=\frac{1}{2^n}\cot\Big(\frac{x}{2^n}\Big)-2\cot 2x.$$

第 (iii) 部分

把乘積公式除以 $\cos x\neq 0$，並利用 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，得

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\Big(\frac{x}{2^k}\Big)=\frac{2\sin x\cos x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)\cos x}=\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}.$$

想一想 當 $n\to\infty$ 時，$2^n\sin(x/2^n)$ 會怎樣？

設 $\theta=x/2^n$，於是當 $n\to\infty$ 時 $\theta\to 0$。那麼

$$2^n\sin\Big(\frac{x}{2^n}\Big)=x\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\ \longrightarrow\ x\cdot 1=x,$$

因此

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{x}{2^k}\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}=\frac{\sin x}{x}.$$

至於級數（series），代入 $j=k+2$：那麼 $\frac{1}{2^{j-2}}=\frac{1}{2^k}$ 且 $\frac{\pi}{2^j}=\frac{\pi/4}{2^k}$，所以這個和就是第 (ii) 部分的級數取 $x=\frac{\pi}{4}$ 的情形，而此值位於 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 內。取這個 x 時，$2\cot 2x=2\cot\frac{\pi}{2}=0$，所以直至 $k=n$ 的部分和（partial sum）為

$$\frac{1}{2^n}\cot\Big(\frac{\pi}{4\cdot 2^n}\Big)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\theta}{\tan\theta}\qquad\Big(\theta=\frac{x}{2^n},\ x=\frac{\pi}{4}\Big).$$

當 $n\to\infty$ 時，$\theta\to 0$ 且 $\theta/\tan\theta\to 1$，所以部分和趨於 $1/x$：

$$\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{2^{j-2}}\tan\Big(\frac{\pi}{2^j}\Big)=\frac{4}{\pi}.$$

驗算

- 第 (i) 部分：$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \approx 0.9397 \times 0.7660 \times 0.1736 \approx 0.1250$。
- 第 (ii) 部分取 $n = 0$：乘積就是 $\cos x$，而公式給出 $\sin 2x/(2\sin x) = \cos x$。取 $n = 0$ 時，和的恆等式變成 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$，這正是 cot 的二倍角公式移項後的形式。
- 第 (iii) 部分：級數的首幾項為 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$、$\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{8} \approx 0.2071$、$\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{16} \approx 0.0497$、...；經電腦驗證，總和為 $1.27324\ldots = 4/\pi$。
- 在 $\prod\cos(x/2^k) = \sin x/x$ 中令 $x \to 0$，得 $1 = 1$，理應如此。

常見錯誤

- 數錯 $\frac{1}{2}$ 因子的個數：由 $k = 0$ 到 n 的乘積有 $n+1$ 個因子，所以分母是 2^{n+1}，而不是 2^n。
- 取對數時沒有指出每個因子都是正數；這正是範圍 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 重要的原因。
- 忘記 $2\cot 2x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 時為零，或者錯用 $x = \frac{\pi}{2}$（這樣 $j = 1$ 的項便是 $\tan\frac{\pi}{2}$，而它沒有定義）。

STEP 之外

在 $\prod\cos(x/2^k) = \sin x/x$ 中設 $x = \frac{\pi}{2}$，並把每個餘弦寫成嵌套平方根，便得到韋達（Viète）公式 $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdots$，這是數學史上第一個無窮乘積（infinite product）。像我們對有限乘積那樣，對無窮乘積的對數逐項求導，是需要理據支持的；分析（analysis）的入門課程會講清楚何時可以這樣做。歐拉（Euler）乘積 $\sin x = x\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ 也是從同樣的思路發展而來。如想了解嚴謹的理論背景，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP II 2019，第 5 題

純數學 • 迭代的不動點

STEP II 2019，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

常數數列（constant sequence）的首項是一個不動點（fixed point），即 $\mathrm{f}(x) = x$ 的解。週期（period）為 2 的數列，其首項是 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ 的一個解，而且不是不動點。每個不動點同時也是 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ 的解，所以 $\mathrm{f}(x) - x$ 必定是四次多項式（quartic）$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$ 的因式（factor）。只要求出另一個因式（它是一個二次式（quadratic）），一切便歸結為判別式（discriminant）的問題。

解答

兩部分通用的因式分解

在兩部分中，$\mathrm{f}(x) = x^2 - px + c$，其中 c 為常數（在 (i) 中 $c = p$，在 (ii) 中 $c = q$）。對任意 x 和 y，

$$\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(x) = (y^2 - x^2) - p(y - x) = (y - x)(y + x - p).$$

令 $y = \mathrm{f}(x)$，再在兩邊加上 $\mathrm{f}(x) - x$，得

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x &= \big[\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - \mathrm{f}(x)\big] + \big[\mathrm{f}(x) - x\big] \\ &= \big(\mathrm{f}(x) - x\big)\big(\mathrm{f}(x) + x - p + 1\big).\end{aligned}$$

我們會用到以下兩個推論：

- 數列的週期為 2，當且僅當 a 是 $Q(x) = \mathrm{f}(x) + x - p + 1$ 的根，而不是 $\mathrm{f}(x) - x$ 的根。事實上，若 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a$，則 $u_2 = u_0$；由於每一項都由前一項決定，以歸納法（induction）可知對所有 n 都有 $u_{n+2} = u_n$。此時數列不是常數數列，當且僅當 $u_1 \neq u_0$，即 $\mathrm{f}(a) \neq a$。

- 若 x 是不動點，則 $Q(x) = 2x - p + 1$。因此不動點要同時是 Q 的根，只可能是 $x = \frac{1}{2}(p-1)$。

第 (i) 部分

這裏 $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + p$，所以

$$\mathrm{f}(a) - a = a^2 - (p+1)a + p = (a-1)(a-p).$$

數列是常數數列，當且僅當 $u_1 = u_0$（此時每一項都等於 a），所以所求的值為

$$a = 1 \quad \text{及} \quad a = p.$$

至於週期 2，另一個因式是

$$Q(x) = x^2 - px + p + x - p + 1 = x^2 + (1-p)x + 1,$$

其判別式為

$$(1-p)^2 - 4 = (p-1-2)(p-1+2) = (p-3)(p+1).$$

- 若 $-1 < p < 3$，判別式為負，Q 沒有實根，因此沒有實數 a 能給出週期 2。
- 若 $p = 3$ 或 $p = -1$，Q 只有一個根 $x = \frac{1}{2}(p-1)$，分別為 1 或 -1。當 $p = 3$ 時，不動點是 1 和 3；當 $p = -1$ 時，不動點是 1 和 -1。兩種情況下 Q 的根都是不動點，所以由此出發的數列是常數數列，而不是週期 2。
- 若 $p > 3$ 或 $p < -1$，Q 有兩個相異實根。兩者都不是不動點：根據上面第二點，若是不動點則必須等於 $\frac{1}{2}(p-1)$，但

  $$Q\left(\tfrac{1}{2}(p-1)\right) = \tfrac{1}{4}(p-1)^2 - \tfrac{1}{2}(p-1)^2 + 1 = 1 - \tfrac{1}{4}(p-1)^2 \neq 0$$

  因為 $(p-1)^2 > 4$。所以取 a 為任一個根，都得到週期為 2 的數列。

因此，存在能給出週期 2 的 a 值，當且僅當 $p > 3$ 或 $p < -1$。

第 (ii) 部分

現在 $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + q$，所以

$$\mathrm{f}(x) - x = x^2 - (p+1)x + q.$$

常數數列需要某個 a 使 $\mathrm{f}(a) = a$，即這個二次式的一個實根。

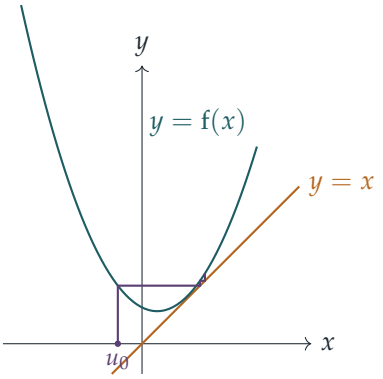
若對所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) > x$，則對每個 a 都有 $\mathrm{f}(a) \neq a$，所以沒有數列是常數數列。

反過來，假設沒有 a 給出常數數列，即 $g(x) = x^2 - (p+1)x + q$ 沒有實根。那麼 g 是連續（continuous）的而且永不為零，所以它不會變號；又因為當 $x \to \infty$ 時 $g(x) \to +\infty$，它處處為正。（等價地說：判別式為負，而首項係數（leading coefficient）為正。）也就是說，對所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) > x$，這便完成了「當且僅當」的證明。

推論。假設不存在常數數列。那麼對所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) > x$，所以對任何 a，

$$u_{n+1} = \mathrm{f}(u_n) > u_n \quad \text{對所有} n.$$

數列嚴格遞增（strictly increasing），所以 $u_2 > u_1 > u_0$。特別地，$u_2 \neq u_0$，數列不可能有週期 2。



上圖展示了這個情況：拋物線（parabola）完全位於 $y = x$ 之上，所以迭代（iterate）形成的「階梯」只能不斷向上攀升。

最後一部分。逆命題（converse）是錯誤的。取 $p = q = 0$，即 $\mathrm{f}(x) = x^2$。當 $a = 0$ 和 $a = 1$ 時，數列是常數數列。至於週期 2，我們需要 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a^4 = a$，即 $a(a-1)(a^2 + a + 1) = 0$。因式 $a^2 + a + 1$ 的判別式為負，所以唯一的實數解是 $a = 0$ 和 $a = 1$，兩者都是不動點。因此，雖然有些 a 值給出常數數列，卻沒有任何 a 值給出週期 2。

想一想 $\mathrm{f}(x) = x^2$ 只是碰巧成立嗎？

不是。一般而言，不動點的二次方程的判別式為 $D = (p+1)^2 - 4q$，而 $Q(x) = x^2 + (1-p)x + q - p + 1$ 的判別式是

$$(1-p)^2 - 4(q-p+1) = (p+1)^2 - 4q - 4 = D - 4.$$

與 (i) 一樣，Q 的根只有在 Q 的判別式為零時才會是不動點。所以當 $D \geq 0$ 時存在常數數列，當 $D > 4$ 時存在週期 2 的數列。任何滿足 $0 \leq D \leq 4$ 的 p、q 都給出一個反例（counterexample）。

驗算

- 在 (i) 中取 $p = 4$，$Q(x) = x^2 - 3x + 1$ 的根為 $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}) \approx 2.618,\ 0.382$。從 2.618 出發，$\mathrm{f}(2.618) = 4 + (2.618 - 4)(2.618) \approx 0.382$，而 $\mathrm{f}(0.382) \approx 2.618$：週期為 2，與預測一致。
- 當 $p = 3$ 時，Q 的根是 $x = 1$，而 $\mathrm{f}(1) = 3 + (1 - 3) = 1$：這是不動點，證實邊界值須被排除。
- 展開 $(x^2 - (p+1)x + p)(x^2 + (1-p)x + 1)$ 得 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$；以電腦在數千組隨機的 (p, x) 上檢驗，連同 (ii) 中「週期 2 當且僅當 $D > 4$」這個條件，均沒有發現例外。

常見錯誤

- 把 $p = 3$ 和 $p = -1$ 也包括在內：此時 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a$ 有重根，但它是不動點，所以數列是常數數列。
- 忘記在尋找週期 2 的點之前，必須先從 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$ 中除去因式 $\mathrm{f}(x) - x$。
- 在最後一部分只憑不等式的方向來論證；要回答「是否成立... ?」這類問題，一個明確的反例才是決定性的。

STEP 之外

這是踏入*離散動力系統*（discrete dynamical systems）的第一步。每一個二次映射，經過線性變量代換後，都等價於邏輯斯諦映射（logistic map）$x \mapsto rx(1-x)$。隨着參數增大，不動點讓位給 2-循環，然後是 4-循環，如此類推，形成一連串倍週期分岔（period-doubling cascade），最終進入混沌（chaos）。你所找到的臨界值，即 Q 的判別式為零之處，正是這些分岔（bifurcation）中的第一個。Strogatz 的 *Nonlinear Dynamics and Chaos*（《非線性動力學與混沌》）是一本非常易讀的入門書。

詳細解答

STEP II 2019，第 6 題

純數學 • 一階微分方程

> **STEP II 2019，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

兩條方程的右方都只透過一個組合依賴 x 和 y：第 (i) 部分是 $y+x$，第 (ii) 部分是 $y-x$，因為那個二次式其實就是 $(y-x)^2+4(y-x)+3$。單憑這一個觀察，就能找出直線解，把駐點（stationary point）限制在某些直線上，並且（在第 (i) 部分）把方程化成可以分離變數（separation of variables）的形式。之後，題目中關於解曲線（solution curve）永不相交的提示就能完成餘下的工作：一條從兩條直線解之間出發的曲線，會永遠被困在兩者之間。

解答

第 (i) 部分

直線解。若 $y=mx+c$，則 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=m$，所以我們需要

$$m=mx+c+x+1=(m+1)x+(c+1)\quad \text{對所有} x.$$

比較 x 的係數得 $m=-1$，再比較常數項得 $c+1=m=-1$，所以 $c=-2$。這個解是 $y=-x-2$。

駐點在哪裏。在 $y=y_3(x)$ 的駐點上，我們有 $0=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x+1$，所以該點位於直線 $y=-x-1$ 上。

現在假設 $k<-2$。曲線 $y=y_3(x)$ 和直線 $y=-x-2$ 都是解，而在 $x=0$ 時曲線位於直線下方（$k<-2$）。兩者永不相遇，所以對每個 x，曲線都留在直線下方：$y_3(x)<-x-2<-x-1$。因此 $y_3(x)+x+1<-1<0$ 處處成立。斜率永不為零（事實上總是小於 -1），所以沒有駐點。

每個駐點都是極小點。把方程求導，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1.$$

在駐點上一階導數（derivative）為 0，所以二階導數是 $1 > 0$，該點是局部極小點（local minimum）。

求解。設 $Y = y + x$，則 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 = Y + 2$。在直線 $Y = -2$ 上，這就是我們已有的解；否則便分離變數：

$$\int \frac{\mathrm{d}Y}{Y+2} = \int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|Y+2| = x + \text{常數} \quad \Longrightarrow \quad Y + 2 = Ae^x,$$

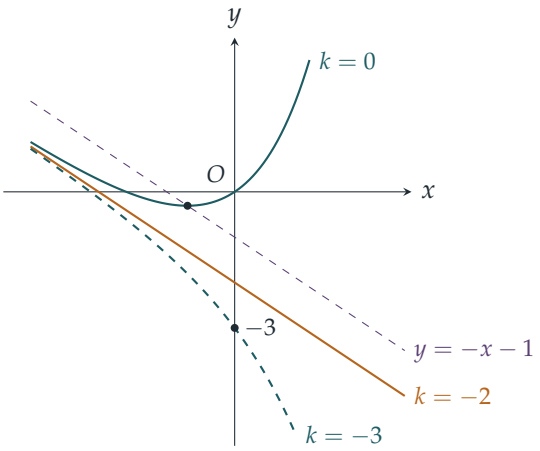
其中 A 是常數（而 $A = 0$ 對應那條直線）。所以 $y = Ae^x - x - 2$，由 $y(0) = k$ 得 $A = k + 2$：

$$y_3(x) = (k+2)e^x - x - 2.$$

這與我們之前的發現一致：$y_3'(x) = (k+2)e^x - 1$，當 $k \le -2$ 時永不為零；當 $k > -2$ 時，它在 $e^x = 1/(k+2)$ 處為零，且只有一次。

三條曲線。

- $k = 0$：$y = 2e^x - x - 2$，經過原點。極小點在 $e^x = \frac{1}{2}$ 處，即 $(-\ln 2,\ \ln 2 - 1) \approx (-0.69, -0.31)$，位於直線 $y = -x - 1$ 上。當 $x \to -\infty$ 時，$2e^x \to 0$，曲線從上方趨近 $y = -x - 2$；當 $x \to \infty$ 時，指數項佔主導。
- $k = -2$：就是直線 $y = -x - 2$ 本身。
- $k = -3$：$y = -e^x - x - 2$，經過 $(0, -3)$，一直遞減。當 $x \to -\infty$ 時，它從下方趨近 $y = -x - 2$；當 $x \to \infty$ 時，它像 $-e^x$ 一樣急降。



第 (ii) 部分

改寫右方。把各項歸組，

$$x^2+y^2-2xy-4x+4y+3=(y-x)^2+4(y-x)+3=(y-x+1)(y-x+3).$$

不妨設 $u=y-x$，於是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(u+1)(u+3)$。

直線解。若 $y=mx+c$，則 $u=(m-1)x+c$，我們需要

$$m=\big((m-1)x+c+1\big)\big((m-1)x+c+3\big)\quad\text{對所有}x.$$

若 $m\neq 1$，右方是一個真正的 x 的二次式，不可能等於常數，所以 $m=1$。於是 $1=(c+1)(c+3)$，即 $c^2+4c+2=0$，得 $c=-2\pm\sqrt{2}$。兩個解是

$$y=x-2+\sqrt{2}\qquad\text{及}\qquad y=x-2-\sqrt{2}.$$

y_4 的駐點。斜率恰好在 $u=-1$ 或 $u=-3$ 時為零，所以任何駐點都位於

$$y=x-1\qquad\text{或}\qquad y=x-3.$$

在這兩條直線之間，我們有 $-3<y-x<-1$，所以 $u+1<0<u+3$，斜率 $(u+1)(u+3)$ 是負的。（在兩線之外，斜率是正的。）

曲線落在哪裏。在 $x=0$ 時，$u=-2$，介乎 $-2-\sqrt{2}\approx-3.41$ 與 $-2+\sqrt{2}\approx-0.59$ 之間。所以在 $x=0$ 時，曲線位於兩條直線解之間；又因為解曲線永不相交，

$$x-2-\sqrt{2}<y_4(x)<x-2+\sqrt{2}\quad\text{對所有}x.$$

由兩條駐點直線所夾的帶狀區域（$-3<u<-1$）位於這條帶狀區域之內。

想一想 曲線被困在兩條平行線之間，但它在帶狀區域內會走向哪裏？

追蹤 $u=y_4-x$。它滿足

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(u+1)(u+3)-1=u^2+4u+2=\big(u+2-\sqrt{2}\big)\big(u+2+\sqrt{2}\big),$$

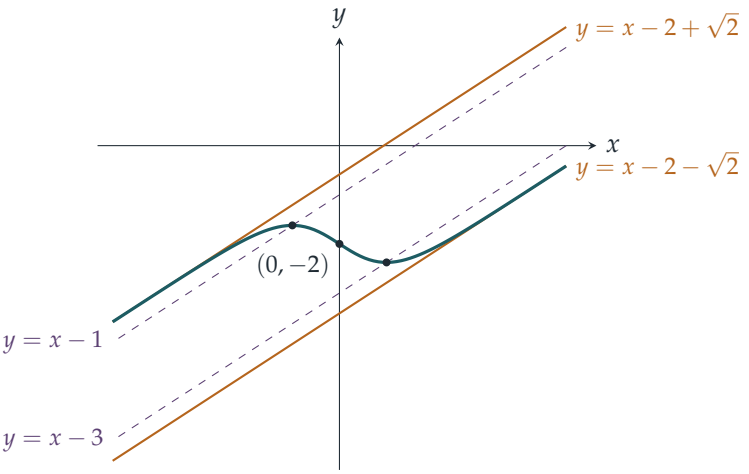
只要 $-2-\sqrt{2}<u<-2+\sqrt{2}$，這就是負數，而這一直成立。所以 u 嚴格遞減且有界，因此當 $x\to\pm\infty$ 時有極限。在這樣的極限處，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 必須趨於 0（否則 u 會無界地改變），所以極限就是那兩個根：當 $x\to-\infty$ 時 $u\to-2+\sqrt{2}$，當 $x\to+\infty$ 時 $u\to-2-\sqrt{2}$。

所以，由左至右看：

- 在最左方，曲線從下方緊貼 $y=x-2+\sqrt{2}$，斜率接近 1；
- 當 u 下降穿過 -1 時，曲線與 $y=x-1$ 相交於唯一一點，這是一個局部極大點（斜率由正轉負）；

- 它以斜率 $(-1)(1) = -1$ 向下穿過 $(0, -2)$；
- 當 u 下降穿過 -3 時，曲線與 $y = x - 3$ 相交於唯一一點，這是一個局部極小點；
- 之後它再次上升，從上方緊貼 $y = x - 2 - \sqrt{2}$，斜率趨於 1。

由於 u 嚴格遞減，$u = -1$ 和 $u = -3$ 各自恰好只經過一次，所以恰好有兩個駐點。還有一個漂亮的特點：把 (x, y) 換成 $(-x, -4 - y)$，方程和起點 $(0, -2)$ 都保持不變，所以曲線關於 $(0, -2)$ 有半周旋轉對稱（half-turn symmetry），而極大點和極小點互為關於該點的鏡像。



驗算

- 在第 (i) 部分代回原式：$y = (k+2)e^x - x - 2$ 給出 $y' = (k+2)e^x - 1$，而 $y + x + 1 = (k+2)e^x - 1$。設 $k = -2$ 便得回那條直線。
- 當 $k = 0$ 時，極小點 $(-\ln 2, \ln 2 - 1) \approx (-0.693, -0.307)$ 確實位於 $y = -x - 1$ 上。
- 在第 (ii) 部分，從 $(0, -2)$ 出發的逐步數值解（經電腦核實）一直留在兩條直線之間，在 $y = x - 1$ 上約 $(-0.623, -1.623)$ 處達到極大，在 $y = x - 3$ 上約 $(0.623, -2.377)$ 處達到極小，到了 $x = \pm 6$ 時與漸近線（asymptote）的距離約在 10^{-7} 之內。這兩點互為關於 $(0, -2)$ 的像，正如對稱性所預測。

常見錯誤

- 忘記運用不相交的性質：「$k < -2$ 意味着沒有駐點」需要曲線對*所有* x 都留在 $y = -x - 2$ 下方，而不只是在 $x = 0$ 時。

- 畫 y_4 時讓它穿過其中一條直線解，或把極大點和極小點的位置弄反。$(u+1)(u+3)$ 在兩條虛線之間的正負號可以判定哪個是哪個。
- 在第 (ii) 部分求 m 和 c 時，未先排除（或確認）$m=1$ 便除以 $m-1$。

STEP 之外

題目開頭的提示，就是皮卡－林德洛夫定理（Picard–Lindelöf theorem）中關於唯一性（uniqueness）的那一半：對於光滑的右方，每一點恰好有一個解經過，所以解曲線不能相交。第 (ii) 部分其實是一條喬裝的自治（autonomous）方程 $u'=u^2+4u+2$；我們不用任何公式，只憑平衡點（equilibrium）以及 u' 在平衡點之間的正負號，就找出曲線的走向，這正是微分方程定性理論（qualitative theory of differential equations）的起點。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）既涵蓋唯一性，也涵蓋這種相線（phase line）圖像。

詳細解答

STEP II 2019，第 7 題

純數學 • 向量與純量積

STEP II 2019，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

對於單位向量（unit vector），長度和角度都可以由標量積（scalar product）得出：$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$。因此訣竅是把「總和為零」這個條件拆開，一些向量放在一邊，其餘放在另一邊，然後計算兩邊長度的平方。這樣便把向量方程轉化為標量積之間的等式，而這些等式就能告訴我們圖形的形狀。

解答

以下我們會一直用到這個事實：對於單位向量 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$，

$$|\mathbf{u}\pm\mathbf{v}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 2 \pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

第 (i) 部分

由於 $\mathbf{a}+\mathbf{b} = -\mathbf{c}$，兩邊取長度的平方，得

$$2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2 = 1,$$

所以 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{2}$，得證。

這個條件對 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 是對稱的，所以用同樣的方法（寫成 $\mathbf{b}+\mathbf{c} = -\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{c}+\mathbf{a} = -\mathbf{b}$），可得 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = -\frac{1}{2}$。因此

$$AB^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2 - 2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 3,$$

同理 $BC^2 = CA^2 = 3$。三條邊的長度都是 $\sqrt{3}$，所以**三角形 ABC 是等邊三角形（equilateral triangle）**。（每對位置向量（position vector）之間的夾角都是 120°，而由於 $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{0}$，$O$ 既是三角形的外心（circumcentre），也是它的形心（centroid）。）

第 (ii) 部分

把條件寫成 $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2=-(\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4)$，兩邊取長度的平方：

$$2+2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=2+2\,\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_4 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_4.$$

以另外兩種可能的方式把向量分組，同樣可得

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_4, \qquad \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_4=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3.$$

由於 $A_iA_j^2=2-2\,\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j$，這表示對棱相等：$A_1A_2=A_3A_4$、$A_1A_3=A_2A_4$ 及 $A_1A_4=A_2A_3$。

(a) 四點共面

想一想 四點所在的平面是否一定經過原點？

是的。四點的形心是 $\frac{1}{4}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4)=\mathbf{0}$，而平面上各點的形心必定在該平面上。所以該平面包含 O；又由於每個 A_i 與 O 的距離都是 1，四點都在該平面上以 O 為圓心、半徑為 1 的圓上。以下我們都在這個平面上討論。

設 $\mathbf{w}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$，於是 $\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4=-\mathbf{w}$。

若 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$，則 $\mathbf{a}_2=-\mathbf{a}_1$ 及 $\mathbf{a}_4=-\mathbf{a}_3$。

若 $\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$，把 $\mathbf{a}_3$ 與 $\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4=-\mathbf{w}$ 取點積，並利用 (ii) 的結果：

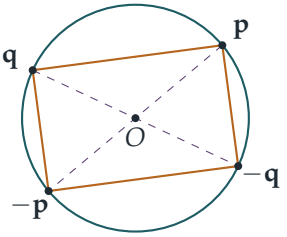
$$\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{w}=-(1+\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_4)=-(1+\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2)=-\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2.$$

所以 $\mathbf{a}_3$ 是一個沿 $\mathbf{w}$ 方向分量固定的單位向量：它的端點落在一條垂直於 $\mathbf{w}$ 的固定直線上，而一條直線與一個圓最多相交於兩點。現在 $-\mathbf{a}_1$ 和 $-\mathbf{a}_2$ 正是兩個這樣的向量，因為

$$(-\mathbf{a}_1)\cdot\mathbf{w}=-(1+\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2)=-\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2,$$

$-\mathbf{a}_2$ 亦同理；又因 $A_1\neq A_2$，兩者並不相同。因此 $\mathbf{a}_3=-\mathbf{a}_1$ 或 $\mathbf{a}_3=-\mathbf{a}_2$，而 $\mathbf{a}_4=-\mathbf{w}-\mathbf{a}_3$ 就是另一個。

在所有情況下，四個位置向量都是 $\mathbf{p},-\mathbf{p},\mathbf{q},-\mathbf{q}$，其中 $\mathbf{q}\neq\pm\mathbf{p}$ 為某兩個單位向量。所以四點是圓上兩條直徑（diameter）的端點。它們組成的四邊形的對角線（diagonal）互相平分（於 O），所以它是平行四邊形（parallelogram）；而且對角線相等（長度都是 2），所以它是**長方形（rectangle）**。當且僅當兩條直徑互相垂直時，它是正方形。



（嚴格來說，頂點應按圓周上的次序排列。若標記剛好是 $A_1 = \mathbf{p}$、$A_2 = \mathbf{q}$、$A_3 = -\mathbf{q}$、$A_4 = -\mathbf{p}$，按此次序連接各點，畫出的會是這個長方形的兩條邊和兩條對角線。）

(b) 正四面體 現在全部六條棱 A_iA_j 都相等，所以全部六個標量積 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$（$i \neq j$）取同一個值，設為 k。把 $\mathbf{a}_1$ 與零和取點積：

$$0 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) = 1 + 3k,$$

所以 $k = -\frac{1}{3}$。於是每條棱都有

$$A_1A_2^2 = 2 - 2k = 2 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{3}, \qquad \text{所以邊長為} \qquad \sqrt{\tfrac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

驗算

- 以 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$ 為頂點的四面體是正四面體（regular tetrahedron），其位置向量都是單位向量且總和為 $\mathbf{0}$，棱長為 $\frac{1}{\sqrt{3}}|(0,2,2)| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.633$。
- 與 (i) 比較：三個夾角為 120° 的單位向量給出邊長 $\sqrt{3} \approx 1.732$，稍長一點。這是合理的，因為正四面體的頂點在球面上「更擠迫」。
- 用電腦對數千組隨機的、總和為零的四個單位向量進行驗算，證實了 (ii) 中三條標量積等式全部成立，而且在共面的情況下，各點總是以相反的成對形式 $\pm\mathbf{p}$、$\pm\mathbf{q}$ 出現。

常見錯誤

- 在 (i) 中，得出 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{2}$ 便停下來：必須求出全部三個標量積（或全部三條邊長），才可斷定三角形是等邊三角形。
- 在 (a) 中，只憑對邊相等便斷定是「平行四邊形」，而沒有檢查頂點的排列方式；或忘記證明該平面經過 O。

STEP 之外

一組總和為零、且兩兩標量積都相等的單位向量，正是正單形（*regular simplex*）的頂點：在 n 維空間中共有 $n+1$ 個這樣的向量，且 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = -\frac{1}{n}$，這就給出了上面的 $-\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{3}$。這類構型見於化學（甲烷的鍵角 109.5° 就是 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$）以及編碼理論（coding theory）。由所有標量積 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ 組成的矩陣稱為 *Gram* 矩陣（*Gram matrix*），它在不計旋轉的意義下決定了一組向量的構型，而這正是整道題背後的想法。想深入了解，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

詳細解答

STEP II 2019，第 8 題

純數學 • 矩陣的積性函數

STEP II 2019，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 7.3 節甚麼才算行列式中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/determinant-axioms.html

關鍵思路

一切都源於單一法則 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$，只要把它套用到精心挑選的乘積上即可。每次的竅門都是找出同一個矩陣的兩種不同寫法，或者找出一個等於它自身與另一矩陣之乘積的矩陣，然後比較 f 的值。行列式（determinant）正是這樣的一個函數，所以它能幫助我們預料答案應該是甚麼；但我們絕不能假設 f 就是行列式。

解答

第 (i) 部分

由於 $\mathbf{MI} = \mathbf{M}$，

$$\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{MI}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\,\mathrm{f}(\mathbf{I}).$$

題目給出 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) \neq 0$，因此可以兩邊同除以它，得 $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$。

（若沒有這個假設，便無法得出此結論：恆等於零的函數同樣是可乘的（multiplicative）。）

第 (ii) 部分

直接相乘可得 $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$，因此

$$\mathrm{f}(\mathbf{J})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{J}^2) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1.$$

故此 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = \pm 1$；又因為 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$，所以 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$。

想一想 乘以 **J** 對一個矩陣有甚麼作用？

左乘 **J** 會交換兩行（rows）；右乘則會交換兩列（columns）：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

對兩式分別取 f，並利用 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$，得

$$\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

第一式給出 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$；把第二式乘以 -1，便知道這也等於 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$，正如所求。

第 (iii) 部分

設 **A** 的第一行為 $(a \quad b)$，第二行為它的 λ 倍。設 **B** 為兩行相同的矩陣，並在 **K** 中取 $k = \lambda$。左乘 **K** 會把第二行乘以 k，因此

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \mathbf{KB}.$$

交換 **B** 的兩行後矩陣保持不變，所以由第 (ii) 部分（取 $c = a$、$d = b$）得

$$\mathrm{f}(\mathbf{B}) = -\mathrm{f}(\mathbf{B}),$$

這迫使 $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$。因此 $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\mathbf{K})\,\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$。這對每個實數 λ 都成立，包括 $\lambda = 0$。

第 (iv) 部分

首先計算這三個矩陣。當 $k \neq 0$ 時，$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$，而且

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

接着，以 **K** 作共軛（conjugation）不會改變 f 的值。事實上 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$，所以

$$\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\,\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{P}).$$

想一想 k 取哪些值時，$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}$ 會變成 $\mathbf{P}^2$ 和 $\mathbf{P}^{-1}$？

取 $k=2$ 得 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}=\mathbf{P}^2$，所以

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})=\mathrm{f}(\mathbf{P}^2)=\mathrm{f}(\mathbf{P})^2,$$

因此 $\mathrm{f}(\mathbf{P})=0$ 或 1。

取 $k=-1$ 得 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}=\mathbf{P}^{-1}$，所以 $\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1})=\mathrm{f}(\mathbf{P})$。但 $\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1})=\mathrm{f}(\mathbf{I})=1$，所以

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})^2=1,$$

特別地 $\mathrm{f}(\mathbf{P})\neq 0$。綜合兩個結果，

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})=1.$$

驗算

行列式滿足所有假設：它是可乘的，$\det\mathbf{I}=1$ 而且 $\det\mathbf{J}=-1$。它亦與我們的所有結論吻合：交換兩行或兩列會改變其正負號，兩行成比例的矩陣的行列式為 0，以及 $\det\mathbf{P}=1$。一個較不明顯的例子是 $\mathrm{f}(\mathbf{M})=\operatorname{sgn}(\det\mathbf{M})\,|\det\mathbf{M}|^{0.7}$。我們用電腦對數以千計的隨機矩陣作檢驗，證實這兩個函數都滿足可乘法則、行與列的交換恆等式、兩行成比例時 $\mathrm{f}(\mathbf{A})=0$，以及 $\mathrm{f}(\mathbf{P})=1$。

常見錯誤

- 假設 $\mathrm{f}=\det$。題目要求你單憑可乘性推導出這些性質；行列式只是一個參考。
- 未加解釋便使用 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})=1/\mathrm{f}(\mathbf{K})$。這需要第 (i) 部分的 $\mathrm{f}(\mathbf{I})=1$，以及 $k\neq 0$，使 $\mathbf{K}$ 可逆。
- 停在 $\mathrm{f}(\mathbf{P})^2=\mathrm{f}(\mathbf{P})$，忘記排除 $\mathrm{f}(\mathbf{P})=0$ 的情況。

STEP 之外

像 f 這樣保持乘法的映射，是從 2×2 可逆矩陣所成的羣（group）到非零實數的一個同態（homomorphism）。第 (iv) 部分是一個經典論證的開端：像 $\mathbf{P}$ 這樣的錯切矩陣（shear matrix）都是交換子（commutator）的乘積，所以每個這樣的同態都把它們映射到 1，最終 f 只取決於行列式。你亦可以證明：行列式是唯一一個對每一行都是線性的、交錯的（alternating），並且在 $\mathbf{I}$ 處等於 1 的函數。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是從這類性質出發建構行列式，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）則涵蓋同態的內容。

詳細解答

STEP II 2019，第 9 題

力學 • 拋體與原點的距離

STEP II 2019，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 11.10 節會朝你飛回來的球中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/coming-back.html

關鍵思路

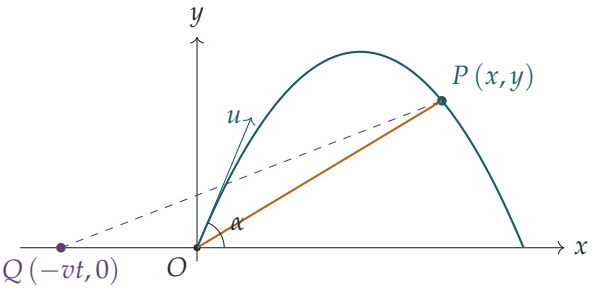
距離本身不易求導，但距離的平方卻很容易：OP 遞增，當且僅當 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(OP^2) > 0$。對 $x^2 + y^2$ 求導（differentiate），會得到 t 乘以一個關於 t 的二次式，於是整道題就變成「這個二次式何時為正？」，而這可由它的判別式（discriminant）回答。第 (ii) 部分是同一個計算，只是在水平距離上加入 Q 的運動。

解答

把 P 和 Q 視為質點（particle），忽略空氣阻力，並以 O 為原點，x 軸取水平方向（沿 P 的運動方向），y 軸取鉛直向上。記 $s = \sin\alpha$ 及 $c = \cos\alpha$，由於 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，兩者皆為正。在時間 t，

$$x = uct, \qquad y = ust - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

而當 $y = 0$ 再次成立時 P 落地，時間為 $T = \dfrac{2us}{g}$。



第 (i) 部分

設 $r = OP$，則 $r^2 = x^2 + y^2$；利用 $\dot{x} = uc$ 及 $\dot{y} = us - gt$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\right) = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) &= 2\left[u^2c^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= 2t\left[u^2c^2 + u^2s^2 - \tfrac{3}{2}usgt + \tfrac{1}{2}g^2t^2\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2\right),\end{aligned}$$

這裏用了 $c^2 + s^2 = 1$。由於飛行期間 $r > 0$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = 2r\dot{r}$ 與 $\dot{r}$ 同號；又由於 $t > 0$，其符號與下式相同：

$$f(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2.$$

這個二次式的首項係數為正，判別式為

$$9u^2s^2g^2 - 8u^2g^2 = u^2g^2\left(9s^2 - 8\right).$$

若 $s < \frac{2\sqrt{2}}{3}$，則 $9s^2 < 8$（因為 $s > 0$），故判別式為負，對所有 t 皆有 $f(t) > 0$。因此在整個飛行過程中 $\dot{r} > 0$：OP 遞增。

若 $s > \frac{2\sqrt{2}}{3}$，則判別式為正，f 有兩個相異的根

$$t_{1,2} = \frac{u\left(3s \mp \sqrt{9s^2 - 8}\right)}{2g},$$

且當 $t_1 < t < t_2$ 時 $f(t) < 0$。兩根皆為正（它們的和 $3us/g$ 與積 $2u^2/g^2$ 皆為正）。我們必須檢查這段區間確實出現在 P 仍在空中的時候。

想一想 這個二次式在某處變為負值，但我們怎樣知道這發生在 P 落地之前？

計算 f 在落地時刻的值：

$$f(T) = g^2 \cdot \frac{4u^2s^2}{g^2} - 3usg \cdot \frac{2us}{g} + 2u^2 = 2u^2(1 - s^2) = 2u^2c^2 > 0.$$

所以 T 不在兩根之間。但 f 的頂點位於 $t = \frac{3us}{2g} < \frac{2us}{g} = T$，所以 T 在頂點右方；既然它不在 $[t_1, t_2]$ 之內，就必然有 $T > t_2$。因此 $0 < t_1 < t_2 < T$，而當 $t_1 < t < t_2$ 時 $\dot{r} < 0$：OP 在 P 落地前的某段時間遞減，得證。

第 (ii) 部分

Q 在光滑地面上以恆定速率 v 朝遠離 P 那一側的方向滑行，所以在時間 t 它位於 $(-vt, 0)$。P 與 Q 的水平距離為 $x + vt = wt$，其中

$$w = uc + v > 0,$$

而鉛直距離為 y。所以 $QP^2 = w^2t^2 + y^2$，與之前完全一樣，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(QP^2\right) &= 2\left[w^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2w^2 + 2u^2s^2\right).\end{aligned}$$

飛行期間其符號與 $h(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2(w^2 + u^2s^2)$ 相同，而 h 的判別式為

$$9u^2s^2g^2 - 8g^2\left(w^2 + u^2s^2\right) = g^2\left(u^2s^2 - 8w^2\right).$$

這個判別式為負，當且僅當 $8w^2 > u^2s^2$，即（由於 w 和 us 皆為正）$2\sqrt{2}\,w > us$。代入 $w = uc + v$，

$$2\sqrt{2}\,(uc + v) > us \iff 2\sqrt{2}\,v > \left(\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha\right)u.$$

所以在題設條件下，對所有 t 皆有 $h(t) > 0$，因此當 $t > 0$ 時 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(QP^2) > 0$，$QP$ 在 P 的整個飛行過程中遞增，得證。

與第 (i) 部分相同的論證（現在 $h(T) = 2w^2 > 0$）顯示，當不等式嚴格反轉時，QP 確實會在 P 落地前遞減一段時間，所以除了等號成立的邊界情況外，這個條件其實也是必要條件。

驗算

- 在第 (ii) 部分中令 $v = 0$，得 $2\sqrt{2}\cos\alpha > \sin\alpha$，即 $\tan\alpha < 2\sqrt{2}$，即 $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$：正是第 (i) 部分的結果，理應如此，因為此時 Q 一直停在 O。
- 臨界角為 $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5°$，與 u 和 g 無關，這正是量綱分析（dimensional analysis）所要求的（唯一可用的無量綱量是 α）。
- 取 $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $\sin\alpha = 0.97$，兩根為 $t_1 \approx 1.14\,\mathrm{s}$ 和 $t_2 \approx 1.83\,\mathrm{s}$，都在落地時刻 $T \approx 1.98\,\mathrm{s}$ 之前。用電腦逐步模擬整個飛行過程，證實 OP 在這兩個時刻之間減少；而且在大量隨機的 u、α、v 之下，距離 QP 遞增恰好與第 (ii) 部分的不等式成立相吻合。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分只停留於「判別式為正」：你必須證明 OP 的下降發生在 P 落地之前，而不是之後。
- 把 Q 放在 $(vt, 0)$：Q 是朝遠離 P 那一側移動，所以它與 P 的水平距離是 $uct + vt$。
- 漏掉因子 t，或者約去它時沒有指出 $t > 0$。

STEP 之外

研究 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2 = 2\,\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ 的符號，是判斷物體正在接近還是遠離的標準方法；它在軌道力學（orbital mechanics）和兩物體的相對運動（relative motion）中一再出現，而第 (ii) 部分其實就是關於 P 相對於 Q 的位置的問題。一個拋射體若以比約 $70.5°$ 更陡的角度拋出，在飛行的一段時間內會朝拋擲者回來——這個巧妙的事實是力學教科書的熱門例子。想了解更多，可參閱 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

詳細解答

STEP II 2019，第 10 題

力學 • 剛體平衡

STEP II 2019，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

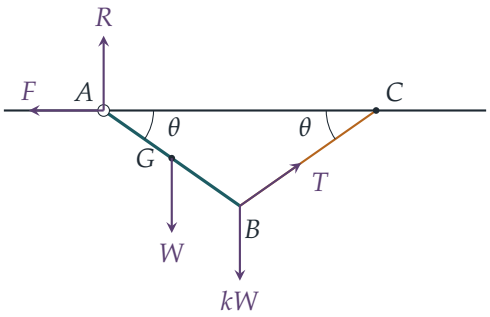
關鍵思路

由於 $AB = BC = 2a$，而且 A、C 都在軌道上，三角形 ABC 是等腰三角形（isosceles triangle），所以繩子與軌道所成的角也是 θ。掌握了這個幾何關係後，這就是一道標準的剛體（rigid body）平衡（equilibrium）問題：對 A 取力矩（moments），可以求出張力（tension）而不牽涉環上的未知力；然後再分解（resolving）各力，便得到法向反作用力（normal reaction）和摩擦力（friction）。最後一部分比較 k 的兩個臨界值：當 k 增大時，哪一個會先被達到？

解答

模型與受力。 桿是均勻的剛體，所以其重量 W 作用於中點 G，且 $AG = a$。環是輕的，所以軌道對環的力會直接傳到桿的 A 端：一個鉛垂向上的法向反作用力 R，以及一個沿軌道方向的摩擦力 F。繩子是輕而不可伸長的，張力 T 在 B 點沿 BC 方向作用。額外負載 kW 在 B 點鉛垂向下作用。

在三角形 ABC 中，AB 和 BC 兩邊都等於 $2a$，所以 A 和 C 處的底角相等：繩子與軌道所成的角是 θ。在水平方向上，B 與 A 相距 $2a\cos\theta$，C 與 A 相距 $4a\cos\theta$。



我們設 F 沿軌道指向遠離 C 的方向；稍後會看到它必然如此，因為繩子把桿拉向 C。

第 (i) 部分

對 A 取力矩，這樣便消去了 R 和 F。重量和負載的力臂分別是 $a\cos\theta$ 和 $2a\cos\theta$。至於張力，把它在 B 點分解為水平分量 $T\cos\theta$（指向 C）和鉛垂向上的分量 $T\sin\theta$。鉛垂分量的力臂是 $2a\cos\theta$，水平分量的力臂是 $2a\sin\theta$（即 B 在軌道下方的深度），而兩者都使桿向同一方向轉動，即圖中的逆時針方向。所以

$$T\sin\theta\cdot 2a\cos\theta + T\cos\theta\cdot 2a\sin\theta = W\cdot a\cos\theta + kW\cdot 2a\cos\theta,$$
$$4aT\sin\theta\cos\theta = aW(1+2k)\cos\theta.$$

由於當 $0<\theta<90^\circ$ 時 $\cos\theta\neq 0$，我們可以除以 $a\cos\theta$：

$$T=\frac{(2k+1)W}{4\sin\theta}.$$

只要環沒有滑動，不論環的情況如何，這個結果都成立。若 $T>W$，繩子便會斷裂，即 $(2k+1)W>4W\sin\theta$（兩邊乘以 $4\sin\theta>0$），亦即

$$2k+1>4\sin\theta,$$

此即所求。

第 (ii) 部分

對整條桿分解各力。鉛垂方向：

$$R+T\sin\theta = W+kW \quad\Longrightarrow\quad R=(1+k)W-\frac{(2k+1)W}{4}=\frac{(2k+3)W}{4}.$$

水平方向上，只有 F 和張力的水平分量，所以

$$F=T\cos\theta=\frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta}.$$

這是正數，證實了摩擦力的方向是遠離 C。另外留意 $R>0$，所以環確實是從上方壓在軌道上。

想一想 粗糙軌道上的環，究竟在甚麼時候會滑動？

摩擦力最多只能提供 μR。若平衡需要 $F > \mu R$，摩擦力便無法令環保持靜止，環就會滑動。所以環滑動的條件是

$$\frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta} > \mu\,\frac{(2k+3)W}{4}.$$

兩邊乘以 $4\sin\theta/(W\cos\theta) > 0$，得

$$2k+1 > (2k+3)\mu\tan\theta,$$

此即所求。

第 (iii) 部分

記 $t = \tan\theta$ 及 $s = \sin\theta$。每個條件都表示 k 已超過某個臨界值。

繩子。由第 (i) 部分，當 $2k+1 > 4s$ 時繩子斷裂，即當

$$k > k_{\text{斷裂}} = \frac{4s-1}{2}.$$

環。把第 (ii) 部分的條件重新整理：

$$2k+1 > (2k+3)\mu t \iff 2k(1-\mu t) > 3\mu t - 1.$$

這裏用到 $\mu t < 1$：除以 $2(1-\mu t) > 0$ 不會改變不等式（inequality）的方向，所以當

$$k > k_{\text{滑動}} = \frac{3\mu t - 1}{2(1-\mu t)}.$$

時環便會滑動。（若沒有 $\mu t < 1$ 這個條件，環永遠不會滑動。若 $\mu t \geq 1$，則對所有 k 都有 $(2k+3)\mu t \geq 2k+3 > 2k+1$。這正是題目給出此條件的原因。）

當 k 從零開始增大時，較低的臨界值會先被越過。所以環在繩子斷裂之前滑動，當且僅當 $k_{\text{滑動}} < k_{\text{斷裂}}$。先乘以 $1-\mu t > 0$，

$$\begin{aligned}
\frac{3\mu t-1}{1-\mu t} < 4s-1 &\iff 3\mu t - 1 < (4s-1)(1-\mu t)\\
&\iff 3\mu t - 1 < 4s - 1 - 4s\mu t + \mu t\\
&\iff 2\mu t + 4s\mu t < 4s\\
&\iff \mu t(1+2s) < 2s\\
&\iff \mu < \frac{2\sin\theta}{\tan\theta\,(1+2\sin\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+2\sin\theta},
\end{aligned}$$

最後一步除以了 $t(1+2s) > 0$。這就是所求的條件。

桿起初處於平衡狀態，所以在 $k = 0$ 時兩個臨界值都尚未被越過。由於每個條件都是「k 大於某個值」，兩個臨界值都只會被越過一次。所以比較兩個臨界值，確實能決定哪件事先發生。

驗算

- 改為對 B 取力矩，會得到相同的答案。A 處的力對 B 的力矩是 $R \cdot 2a\cos\theta - F \cdot 2a\sin\theta$，而重量的力矩是 $Wa\cos\theta$。代入 R 和 F 的值，得 $\frac{1}{2}(2k+3)Wa\cos\theta - \frac{1}{2}(2k+1)Wa\cos\theta = Wa\cos\theta$，恰好與重量的力矩平衡。
- 取 $\theta = 30°$。那麼 $k_{\text{斷裂}} = \frac{1}{2}$，而臨界摩擦係數（coefficient of friction）是 $2\cos 30°/(1+2\sin 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$，所以 $\mu t = 0.866 \times 0.577 = \frac{1}{2}$。在這個 μ 下，$k_{\text{滑動}} = \frac{3/2-1}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ 也成立，所以兩個臨界值重合，正如在邊界上應有的情況。
- 我們用電腦驗證了，對許多隨機的 θ 和 k，所有力和力矩都平衡。我們亦對隨機的 θ 和 μ 把 k 逐小步增大：環先滑動，當且僅當 $\mu < 2\cos\theta/(1+2\sin\theta)$。

常見錯誤

- 在對 A 取力矩時忘記了張力的水平分量。它的力臂是 $2a\sin\theta$，並令張力的力矩加倍，$4\sin\theta$ 中的 4 正是由此而來。
- 取 $R = (1+k)W$。繩子承擔了部分重量，所以法向反作用力小於總負載。
- 除以 $1 - \mu\tan\theta$ 時沒有說明它是正數。題目給出的條件 $\mu\tan\theta < 1$ 正是為此而設。

STEP 之外

這是一個靜定（statically determinate）問題：有三個未知量（T、R、F），而平面上的剛體有三條平衡方程。第 (iii) 部分展示了這類結構典型的失效方式：比較每個約束分別在多大負載下失效。工程師也會問同樣的問題：結構中哪一個構件會最先失效？Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）仔細講解剛體靜力學和扭矩（torque），並進而討論轉動動力學（rotational dynamics）。

詳細解答

STEP II 2019，第 11 題

概率與統計 • 三角形的計數

STEP II 2019，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

三條長度能構成面積非零的三角形（triangle），當且僅當較短的兩條長度之和大於最長的一條。因此，整個問題歸結為在最大值固定的情況下數算數對的個數；最簡潔的數法，是固定中間的數 n_2，再問 n_1 可以取多少個值。第 (i) 部分負責計數；第 (ii) 和第 (iii) 部分只需除以相應的等可能（equally likely）選擇總數。

解答

第 (i) 部分

記 $m = n_3$。固定 $n_2 = k$，其中 $k \leq m-1$。那麼 n_1 必須滿足

$$m - k < n_1 < k,$$

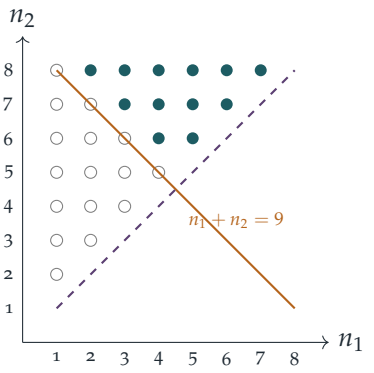
所以 n_1 取遍 $m-k+1, \ldots, k-1$，當 $2k-m-1$ 為正數時，共有 $2k-m-1$ 個選擇。（由於 $m-k \geq 1$，條件 $n_1 > 0$ 自動成立。）

當 $m = 9$ 時，個數為 $2k-10$，在 $k = 6,7,8$ 時為正數：

$$2+4+6 = 12.$$

當 $m = 10$ 時，個數為 $2k-11$，在 $k = 6,7,8,9$ 時為正數：

$$1+3+5+7 = 16.$$



上圖顯示 $n_3 = 9$ 的情況：實心點位於直線 $n_1 + n_2 = 9$ 上方，同時位於對角線 $n_1 = n_2$ 上方，共有 $2 + 4 + 6 = 12$ 個，每個 n_2 對應三角形區域中的一列。

奇數情況，$n_3 = 2n + 1$。當 $n_2 = k$ 時，個數為 $2k - 2n - 2 = 2(k - n - 1)$，在 $k = n + 2, \ldots, 2n$ 時為正數。設 $j = k - n - 1$，它由 1 取到 $n - 1$，

$$\sum_{j=1}^{n-1} 2j = (n-1)n = n(n-1).$$

偶數情況，$n_3 = 2n$。當 $n_2 = k$ 時，個數為 $2k - 2n - 1$，在 $k = n + 1, \ldots, 2n - 1$ 時為正數。設 $j = k - n$，它由 1 取到 $n - 1$，

$$\sum_{j=1}^{n-1} (2j-1) = (n-1)^2,$$

即首 $n - 1$ 個奇數之和。兩條公式都與 $12 = 4 \cdot 3$ 及 $16 = 4^2$ 吻合。

第 (ii) 部分

長度為 N 的棒是三條中最長的，所以這三條棒構成面積非零的三角形，當且僅當所選的兩條長度 $a < b$ 滿足 $a + b > N$。（其餘兩條三角不等式（triangle inequality），例如 $a + N > b$，由於 $N > b$ 而自動成立。）因此，有利的選擇正是第 (i) 部分中 $n_3 = N$ 時所數算的數對。

兩條棒是從餘下的 $N - 1$ 條中選出的，所以共有 $\binom{N-1}{2}$ 個等可能的選擇。

當 $N = 2n + 1$ 時：共有 $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$ 個選擇，所以

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{n(n-1)}{n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1},$$

此即所求。

當 $N = 2n$ 時：共有 $\binom{2n-1}{2} = (2n-1)(n-1)$ 個選擇。要使它非零，我們需要 $n \geq 2$（當 $N = 2$ 時只剩一條棒，無法選出兩條）。於是

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}.$$

頗出人意料的是，儘管 N 小了一，答案卻與奇數情況的公式完全相同。

第 (iii) 部分

任意三條不同的棒都有一條最長的，設其長度為 m，其中 $3 \leq m \leq 2M+1$。這個選擇能構成三角形，當且僅當另外兩條長度構成第 (i) 部分中 $n_3 = m$ 時所數算的其中一個數對。每個有利選擇都只在其最長的棒之下被數算一次，所以有利選擇的個數為

$$T = \sum_{m=2}^{2M+1} c(m),$$

其中 $c(m)$ 是第 (i) 部分得出的個數。（由於 $c(2) = 0$，把 $m = 2$ 包括在內並無影響。）

想一想 $c(m)$ 對奇數和偶數 m 有不同的公式，那該怎樣把它們加起來呢？

把它們配對。對每個 $n = 1, \ldots, M$，把偶數值 $m = 2n$ 和奇數值 $m = 2n+1$ 放在一起；這樣恰好把 $m = 2, 3, \ldots, 2M+1$ 各涵蓋一次。每對的總貢獻為

$$(n-1)^2 + n(n-1) = (n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1.$$

利用題目給出的 $\sum k^2$ 公式及 $\sum k = \frac{1}{2}M(M+1)$，

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{M} \left(2n^2 - 3n + 1\right) \\ &= \tfrac{1}{3}M(M+1)(2M+1) - \tfrac{3}{2}M(M+1) + M \\ &= \tfrac{1}{6}M\left[2(2M^2+3M+1) - 9(M+1) + 6\right] \\ &= \tfrac{1}{6}M\left(4M^2 - 3M - 1\right) \\ &= \tfrac{1}{6}M(4M+1)(M-1). \end{aligned}$$

選出三條棒的等可能選擇總數為

$$\binom{2M+1}{3} = \frac{(2M+1)(2M)(2M-1)}{6}.$$

相除，並約去 $M/6$，

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{M(4M+1)(M-1)}{2M(2M+1)(2M-1)} = \frac{(4M+1)(M-1)}{2(2M+1)(2M-1)},$$

此即所求。

驗算

- $M = 1$：棒的長度為 $1, 2, 3$，而 $1 + 2 = 3$ 只得出退化三角形（degenerate triangle），所以概率應為 0，公式亦給出 0。
- $M = 2$：棒的長度為 1 至 5。能構成的三角形有 $\{2, 3, 4\}$、$\{2, 4, 5\}$ 和 $\{3, 4, 5\}$，所以概率為 $3/10$；公式給出 $\frac{9 \cdot 1}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{3}{10}$。
- 當 $M \to \infty$ 時，概率趨向 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$。這與連續版本吻合：若三條長度獨立地在 $[0, 1]$ 上均勻分佈，較短兩條之和大於最長一條的概率為 $\frac{1}{2}$。
- 第 (i) 部分的所有個數，以及第 (ii) 和第 (iii) 部分的所有概率，都已用電腦直接列舉每個數對或三元組加以核實，範圍為 n 至 39、M 至 19（例如 $M = 3$ 時得 $13/35$）。

常見錯誤

- 容許 $n_1 + n_2 = n_3$：長度為 $2, 3, 5$ 的三條棒只會平躺成一直線，面積為零，所以不等式必須是嚴格的。
- 在第 (ii) 部分用了 $\binom{N}{2}$ 而非 $\binom{N-1}{2}$：長度為 N 的棒已經被選走了。
- 在第 (iii) 部分只對 m 的奇數值（或只對偶數值）求和：最長的棒可以是由 3 至 $2M + 1$ 的任何長度。

STEP 之外

按最大元素把計數分拆，然後求和，是組合數學（combinatorics）中的標準技巧；同一思路對最大值的取值積分，便得出連續情況的答案 $\frac{1}{2}$。像上圖那樣數算某區域內的格點（lattice points），再與該區域的面積比較，正是連接離散概率與連續概率的橋樑。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）收錄了許多這類問題，包括經典的「斷棍」三角形問題。

詳細解答

STEP II 2019，第 12 題

概率與統計 • 連續分佈與分位數

STEP II 2019，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

這裏的累積分佈函數（cumulative distribution function）在 $[0,1]$ 上就是 x^n，所以每個分位數（quantile）都可以準確寫出：分佈中有比例 p 落在其下方的值是 $p^{1/n}$。於是，比較平均值與某個分位數就變成比較冪，而把兩邊同時取 n 次方後，問題便化為關於 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的命題，這正是二項式展開（binomial expansion）最擅長估計的量。

解答

第 (i) 部分

對概率密度函數（probability density function）積分，

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \cdot nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 nx^n\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1},$$
$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 nx^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+2}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 &= \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n\left[(n+1)^2 - n(n+2)\right]}{(n+1)^2(n+2)} \\ &= \frac{n\left[n^2+2n+1-n^2-2n\right]}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)},\end{aligned}$$

得證。

第 (ii) 部分

當 $0 \le x \le 1$ 時，分佈函數為

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \int_0^x nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = x^n.$$

取 $n = 2$，則 $\mathrm{F}(x) = x^2$。下四分位數（lower quartile）q_1 滿足 $q_1^2 = \frac{1}{4}$，上四分位數（upper quartile）q_3 滿足 $q_3^2 = \frac{3}{4}$；兩者都在 $[0,1]$ 內，所以取正根：

$$q_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad q_3 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad q_3 - q_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

由第 (i) 部分，$\sigma^2 = \dfrac{2}{9\cdot 4} = \dfrac{1}{18}$，所以 $\sigma = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$，而 $2\sigma = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$。

我們要證明 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} < \dfrac{\sqrt{2}}{3}$。兩邊乘以 6，這等價於

$$3\sqrt{3} - 3 < 2\sqrt{2} \iff 3\sqrt{3} < 3 + 2\sqrt{2}.$$

最後這個不等式兩邊都是正數，所以它等價於兩邊平方後的不等式：

$$27 < 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2} \iff 10 < 12\sqrt{2},$$

這是成立的，因為 $\sqrt{2} > 1$ 給出 $12\sqrt{2} > 12 > 10$。每一步都是等價的，所以沿着這條推理鏈倒推回去，可知四分位數間距（interquartile range）小於 2σ。

> **想一想** 為甚麼在這裏兩邊平方是安全的，但一般情況下卻不是？

只有當 a 和 b 都非負時，平方才能保持不等式 $a < b$（例如 $-3 < 2$，但 $9 > 4$）。正因如此，我們先把不等式整理成 $3\sqrt{3} < 3 + 2\sqrt{2}$，使兩邊明顯都是正數，而不是直接把仍含有減法的 $3\sqrt{3} - 3 < 2\sqrt{2}$ 平方。

第 (iii) 部分

由二項式定理，

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}\,x^2 + \cdots,$$

而第 $(k+1)$ 項是

$$\binom{n}{k} x^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,x^k.$$

中位數與下四分位數。 由於 $\mathrm{F}(x) = x^n$，中位數（median）m 滿足 $m^n = \frac{1}{2}$，下四分位數 q 滿足 $q^n = \frac{1}{4}$，所以

$$m = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/n}, \qquad q = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{1/n}.$$

μ、m、q 全都是正數，而 $t \mapsto t^n$ 在 $t > 0$ 上嚴格遞增（strictly increasing），所以我們可以透過比較它們的 n 次方來比較它們。另外

$$\mu^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

記 $A = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。那麼

$$\mu < m \iff \mu^n < \tfrac{1}{2} \iff A > 2, \qquad \mu > q \iff \mu^n > \tfrac{1}{4} \iff A < 4.$$

μ 小於中位數。 在展開式中代入 $x = \frac{1}{n}$。每一項都非負，所以 A 至少等於首三項之和：

$$A \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = 2 + \frac{n-1}{2n} > 2,$$

其中最後一個不等式是嚴格的，因為 $n > 1$。（當 $n \geq 2$ 時，展開式中確實有第三項。）因此 $\mu < m$。

μ 大於下四分位數。 取 $x = \frac{1}{n}$，第 $(k+1)$ 項是

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!},$$

因為那 k 個分數 $\frac{n-j}{n}$（$0 \leq j \leq k-1$）每個都在 0 與 1 之間。（當 $k = 0$ 時，該項是 $1 = \frac{1}{0!}$。）對 $k = 0, 1, \ldots, n$ 求和，

$$A \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots < 4,$$

中間的不等式成立，是因為無窮級數（infinite series）還包含更多正項；最後一個不等式則是題目容許我們假設的結果。因此 $A < 4$，所以 $\mu > q$。

綜合兩者，對每個整數 $n > 1$，下四分位數都小於 μ，而 μ 又小於中位數。

> **想一想** 為甚麼比較 n 次方就能確定 μ 與 m 的大小關係？

對正數 a 和 b，$a < b$ 若且唯若 $a^n < b^n$，因為 t^n 在 $t > 0$ 上嚴格遞增。我們的三個數全是正數，所以取 n 次方不會損失任何資訊，而且這樣做能消去 m 和 q 中麻煩的 n 次方根。

驗算

► 當 $n = 2$：$\mu = \frac{2}{3}$，而 $\sigma^2 = \frac{2}{9 \cdot 4} = \frac{1}{18}$，與 $\mathrm{E}(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9}$ 吻合。

- 數值上，當 $n = 2$ 時，四分位數間距是 0.366，而 $2\sigma = 0.471$。
- 當 $n = 2$ 時，三個值分別是 $q = 0.5$、$\mu \approx 0.667$、$m \approx 0.707$；當 $n = 10$ 時，它們是 $q \approx 0.871$、$\mu \approx 0.909$、$m \approx 0.933$。對 2 至 2000 的每個 n，順序 $q < \mu < m$ 都已用電腦驗證。
- 當 $n \to \infty$ 時，$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e} \approx 2.718$，穩穩地落在 2 與 4 之間。

常見錯誤

- 沒有先確認兩邊都是正數，就直接把 $3\sqrt{3} - 3 < 2\sqrt{2}$ 平方。
- 取倒數時弄錯不等號方向：$\mu^n < \frac{1}{2}$ 對應的是 $A > 2$，而不是 $A < 2$。
- 聲稱第 $(k+1)$ 項等於 $\frac{1}{k!}$，而不是至多為 $\frac{1}{k!}$。

STEP 之外

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 隨 n 遞增並趨向極限 e；而你逐項與 $\sum 1/k!$ 比較所證出的界，正是證明 $\mathrm{e} = \sum_{k \geq 0} 1/k!$ 的第一步，這是大學第一門數學分析（analysis）課程中的標準結果。這個分佈本身是 Beta$(n, 1)$ 分佈（Beta distribution）；它也是 n 個在 $[0, 1]$ 上獨立均勻分佈的隨機變量之最大值的分佈，因為 $\mathrm{P}(\max \leq x) = x^n$。想深入了解這兩條線索，可參閱 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》），以及 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2019，第 1 題

純數學 • 耦合微分方程

STEP III 2019，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

當 $k = 1$ 時，方程組的右方正好是把 $x + \mathrm{i}y$ 乘以一個複數常數所得的結果，因此這對方程可以合併為關於 $z = x + \mathrm{i}y$ 的單一方程 $\dot{z} = cz$。這樣一來，運動就變成旋轉配合指數衰減（exponential decay）：一條螺線（spiral）。當 $k = 0$ 時，耦合只朝一個方向：x 不依賴 y，所以我們先解出 x，再把它代入 y 的方程。

解答

第 (i) 部分

當 $k = 1$ 時，我們有 $\dot{x} = -x - y$ 及 $\dot{y} = x - y$。設 $z = x + \mathrm{i}y$，則

$$\begin{aligned}\dot{z} = \dot{x} + \mathrm{i}\dot{y} &= (-x - y) + \mathrm{i}(x - y) \\ &= (-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = (-1 + \mathrm{i})z,\end{aligned}$$

這可以透過展開 $(-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = -x - \mathrm{i}y + \mathrm{i}x - y$ 來確認。由 $z(0) = 1$，解為

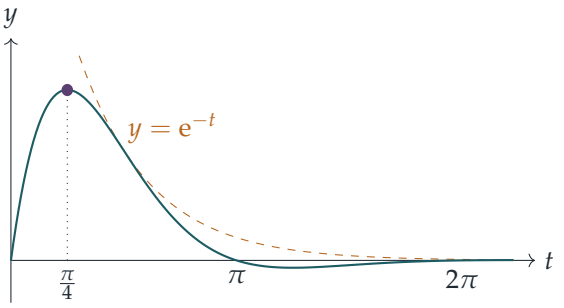
$$z = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \mathrm{i}\sin t),$$

因此

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t, \qquad y = \mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

（如果你想避免使用複數（complex numbers）：把第一條方程微分，再消去 y，得到 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$，其輔助方程（auxiliary equation）的根為 $-1 \pm \mathrm{i}$，然後利用 $x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = -1$。）

y 對 t 的圖像。這是一條位於包絡線（envelope）$\pm e^{-t}$ 之內的正弦波，所以是一個阻尼振盪（damped oscillation）。它在 $t = n\pi$ 處為零，而其轉向點（turning point）位於 $\dot{y} = x - y = e^{-t}(\cos t - \sin t) = 0$ 之處，即 $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$。每個相繼的峯值都縮小 $e^{-\pi} \approx 0.04$ 倍，因此在第一個隆起之後，若按真實比例繪畫，振盪幾乎看不見。



路徑。以極式表示，$z = e^{-t}e^{it}$ 的模（modulus）為 $r = e^{-t}$，輻角（argument）為 $\theta = t$。因此路徑是螺線

$$r = e^{-\theta}, \qquad \theta \geq 0,$$

從 $(1,0)$ 出發，以逆時針方向捲向原點，只有在 $t \to \infty$ 時才到達原點。起始時 $\dot{x} = -1$ 及 $\dot{y} = 1$，所以它離開 $(1,0)$ 時向左上方移動。每轉一圈，與原點的距離便縮小 $e^{-2\pi} \approx 0.002$ 倍，因此按真實比例繪畫時只看得見第一圈。

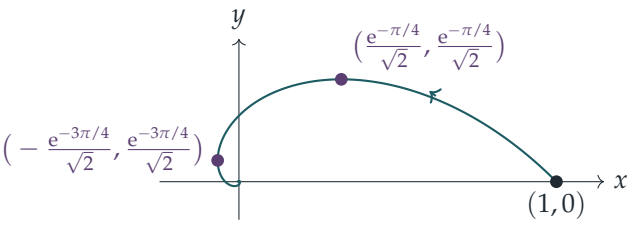
y 的最大值。y 的轉向點位於 $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$。在 $t = \frac{\pi}{4}$ 時，$y = e^{-\pi/4}/\sqrt{2} > 0$。對所有 $t \geq \frac{\pi}{2}$，我們有 $y \leq e^{-t} \leq e^{-\pi/2}$，而 $e^{-\pi/2} < e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$，因為這等價於 $\sqrt{2} < e^{\pi/4} \approx 2.19$。在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上唯一的轉向點是 $t = \frac{\pi}{4}$。所以 y 的最大值出現在

$$\left(\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}\right) \approx (0.322,\ 0.322).$$

x 的最小值。現在 $\dot{x} = -x - y = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$，它在 $\tan t = -1$ 時為零，即 $t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$。要使 $x < 0$，需要 $\cos t < 0$，這就選出 $t = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$，得 $x = -e^{-t}/\sqrt{2}$；由於 e^{-t} 是遞減的，所以在這些 t 中取最小者時 x 最負，即 $t = \frac{3\pi}{4}$。（最小值必定出現在其中一個轉向點，因為 $x(0) = 1 > 0$，而且當 $t \to \infty$ 時 $x \to 0$。）所以 x 的最小值出現在

$$\left(-\frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}\right) \approx (-0.067,\ 0.067).$$

兩點都位於直線 $y = \pm x$ 上，這正如預期：在螺線上，y 在路徑朝 x 方向前進之處取最大值，而 x 在路徑朝 y 方向前進之處取最小值。



第 (ii) 部分

當 $k = 0$ 時，第一條方程單獨就是 $\dot{x} = -x$，所以由 $x(0) = 1$，

$$x = e^{-t}.$$

於是 $\dot{y} + y = e^{-t}$。乘以積分因子（integrating factor）e^t，得 $\frac{d}{dt}(ye^t) = 1$，所以 $ye^t = t + c$，再由 $y(0) = 0$ 得 $c = 0$：

$$y = te^{-t}.$$

想一想 怎樣把它化為路徑的方程？

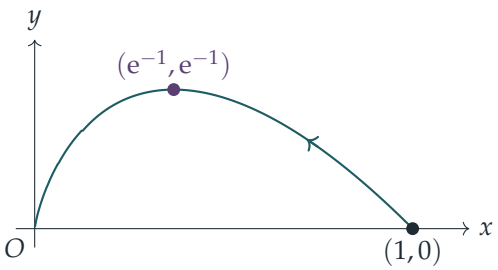
消去 t：由於 $x = e^{-t}$，我們有 $t = -\ln x$，因此

$$y = -x \ln x, \qquad 0 < x \leq 1.$$

當 t 由 0 增至 ∞ 時，x 由 1 遞減趨向 0，所以質點從 $(1,0)$ 出發，沿這條曲線向左移動，當 $t \to \infty$ 時趨近原點。

繪圖要點：

- $\frac{dy}{dx} = -\ln x - 1$，在 $x = e^{-1}$ 時為零。所以最高點是 (e^{-1}, e^{-1})，在 $t = 1$ 時到達。
- 在 $(1,0)$ 處斜率為 -1，與 $t = 0$ 時的 $\dot{x} = -1$、$\dot{y} = 1$ 吻合。
- 當 $x \to 0^+$ 時，$x \ln x \to 0$，所以 $y \to 0$；但斜率 $-\ln x - 1 \to +\infty$，所以曲線進入原點時與 y 軸相切。
- 對 $0 < x < 1$ 有 $y > 0$，所以整條路徑都在 x 軸之上。



留意與第 (i) 部分的對比：當 $k = 0$ 時不再有任何旋轉，所以質點從不穿越坐標軸，只是沿曲線彎入原點。

驗算

- 代回原方程：對於 $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$，$\dot{x} = -\mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t = -x - y$，符合要求；$\dot{y}$ 的驗算方法相同。兩組解亦都滿足 $x(0) = 1$、$y(0) = 0$。
- 以細小時間步長對方程作數值推進，可重現兩組解，並確認在第 (i) 部分中 y 的最大值約為 0.3224，出現在 $t \approx 0.785$；x 的最小值約為 -0.0670，出現在 $t \approx 2.356$；而在第 (ii) 部分中 y 在 $t = 1$ 時達到峯值 $1/\mathrm{e} \approx 0.3679$。
- 對 (ii) 的合理性檢查：$y = t\mathrm{e}^{-t}$ 是熟悉的「重根」形式，這是合理的，因為該方程組的矩陣有重特徵值（repeated eigenvalue）-1。

常見錯誤

- 把 x 的最小值取在 $t = -\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$：那裏同樣有 $\dot{x} = 0$，但那裏 $x > 0$（是局部極大值）。要檢查 $\cos t$ 的正負號。
- 忘記螺線只有在 $t \to \infty$ 時才到達原點，或把它畫成順時針捲入：$\theta = t$ 遞增，所以它是逆時針捲入的。
- 在 (ii) 中漏掉原點處的鉛垂切線：$y \to 0$ 但 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to \infty$。

STEP 之外

任何線性方程組（linear system）$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ 的行為都由 A 的特徵值決定。這裏 $A = \begin{pmatrix} -1 & -k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特徵值是 $-1 \pm \sqrt{-k}$：當 $k = 1$ 時它們是一對複數 $-1 \pm \mathrm{i}$，給出穩定螺旋點（stable spiral）；當 $k = 0$ 時有重特徵值 -1，給出退化結點（degenerate node）；而當 $k < 0$ 時則會得到兩個實特徵值。以這種方法對不動點（fixed point）分類（即相平面分析（phase-plane analysis））是大學一年級的核心課題。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）對此有詳細講解，並附有大量圖像。

詳細解答

STEP III 2019，第 2 題

純數學 • 函數方程

STEP III 2019，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 3.8 節由加法公式決定的函數中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/addition-laws.html

關鍵思路

函數方程（functional equation）有一個特點：只要知道函數在某一點附近的表現，就能確定整個函數。代入 $x = y = 0$ 可以確定函數在 0 的值；然後在一般的 x 處寫出差商（difference quotient），再利用函數方程把它化成在 0 處的差商，而我們知道這個差商的極限（limit）是 k。這樣便得到一條微分方程（differential equation），再配合先前求得的初始值（initial value）把它解出來。

解答

第 (i) 部分

在 0 的值。在函數方程中代入 $x = y = 0$：$f(0) = f(0)^2$，所以 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$。

假設 $f(0) = 0$。代入 $y = 0$，對每個 x 都有 $f(x) = f(x)f(0) = 0$，所以 f 是零函數，而 $f'(0) = 0$。這與 $f'(0) = k \neq 0$ 矛盾。因此 $f(0) = 1$。

導數（derivative）。由 $(*)$ 及取 $y = h$ 的函數方程，

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h}.$$

由於 $f(0) = 1$，最後的極限就是 $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$，根據 $(*)$ 在 $x = 0$ 的情況，它等於

$\mathrm{f}'(0) = k$。所以

$$\mathrm{f}'(x) = k\,\mathrm{f}(x),$$

即為所求。（我們可以把 $\mathrm{f}(x)$ 提到極限之外，因為它與 h 無關。）

求解。與其除以 f（這需要 $\mathrm{f} \neq 0$），不如考慮 $u(x) = \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{f}(x)$。於是

$$u'(x) = \mathrm{e}^{-kx}\big(\mathrm{f}'(x) - k\,\mathrm{f}(x)\big) = 0,$$

所以 u 是常數，等於 $u(0) = \mathrm{f}(0) = 1$。因此

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{kx}.$$

這確實滿足所有條件：$\mathrm{e}^{k(x+y)} = \mathrm{e}^{kx}\mathrm{e}^{ky}$，而且它在 0 的導數是 k。

第 (ii) 部分

在 0 的值。代入 $x = y = 0$：

$$\mathrm{g}(0) = \frac{2\mathrm{g}(0)}{1+\mathrm{g}(0)^2} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{g}(0)\big(\mathrm{g}(0)^2 - 1\big) = 0,$$

所以 $\mathrm{g}(0) \in \{0, 1, -1\}$。由於對所有 x 都有 $|\mathrm{g}(x)| < 1$，必然有 $\mathrm{g}(0) = 0$。另外留意，$|\mathrm{g}| < 1$ 保證了 $1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(y) > 0$，所以函數方程永遠不會出現除以零的情況。

差商。利用取 $y = h$ 的函數方程，並把各項通分，

$$\mathrm{g}(x+h) - \mathrm{g}(x) = \frac{\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(h) - \mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(x)^2\mathrm{g}(h)}{1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)} = \frac{\mathrm{g}(h)\big(1 - \mathrm{g}(x)^2\big)}{1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

除以 h，

$$\frac{\mathrm{g}(x+h) - \mathrm{g}(x)}{h} = \big(1 - \mathrm{g}(x)^2\big) \cdot \frac{\mathrm{g}(h)}{h} \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

? **想一想** 當 $h \to 0$ 時，右邊每個因子會怎樣變化？

第一個因子不涉及 h。由於 $\mathrm{g}(0) = 0$，中間的因子就是 $\dfrac{\mathrm{g}(0+h) - \mathrm{g}(0)}{h}$，它趨向 $\mathrm{g}'(0) = k$。至於最後的因子，我們需要 $\mathrm{g}(h) \to \mathrm{g}(0) = 0$：這是成立的，因為 g 在 0 可微（differentiable），因此在 0 連續（continuous）。所以最後的因子趨向 1，而

$$\mathrm{g}'(x) = k\big(1 - \mathrm{g}(x)^2\big).$$

求解。因為 $|\mathrm{g}(x)| < 1$，因子 $1 - \mathrm{g}(x)^2$ 永不為零，所以我們可以分離變量（separation of variables）：

$$\int \frac{\mathrm{d}g}{1 - g^2} = \int k\,\mathrm{d}x.$$

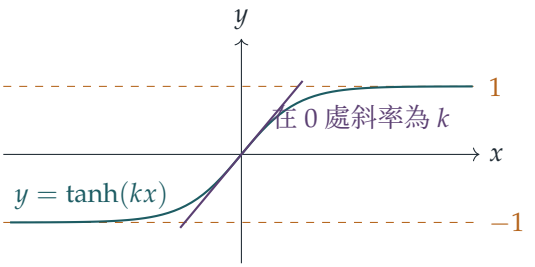
利用部分分式（partial fractions），$\dfrac{1}{1-\mathrm{g}^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{g}} + \dfrac{1}{1-\mathrm{g}}\right)$，而 $1 \pm \mathrm{g}$ 兩者皆為正數，所以

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mathrm{g}(x)}{1-\mathrm{g}(x)} = kx + c.$$

在 $x = 0$ 時左邊等於 $\frac{1}{2}\ln 1 = 0$，所以 $c = 0$。因此 $\dfrac{1+\mathrm{g}}{1-\mathrm{g}} = \mathrm{e}^{2kx}$，解出 g，

$$\mathrm{g}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1} = \tanh(kx).$$

這確實可行：$|\tanh(kx)| < 1$；加法公式(addition formula)$\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$ 正正就是這條函數方程；而 $\tanh(kx)$ 在 0 的導數是 k。



驗算

- 在 (i) 中，取 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{kx}$，$k = 1$，$x = 0.3$，$y = 0.5$：$\mathrm{e}^{0.3}\mathrm{e}^{0.5} = 1.3499 \times 1.6487 = 2.2255 = \mathrm{e}^{0.8}$。
- 在 (ii) 中，取 $k = 1$，$x = 0.3$，$y = 0.5$：$\tanh 0.3 = 0.29131$，$\tanh 0.5 = 0.46212$，而 $(0.29131 + 0.46212)/(1 + 0.29131 \times 0.46212) = 0.66404 = \tanh 0.8$。
- 兩個答案亦已用電腦對大量隨機的 k、x、y 作出驗證，包括導數關係 $\mathrm{f}' = k\mathrm{f}$ 及 $\mathrm{g}' = k(1-\mathrm{g}^2)$。
- 兩部分是互相關連的：$\tanh(kx) = \dfrac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1}$ 是由第 (i) 部分的指數函數構成，只是以 $2k$ 代替 k。

常見錯誤

- 沒有給出理由便捨棄 $\mathrm{f}(0) = 0$ 或 $\mathrm{g}(0) = \pm 1$。條件 $k \neq 0$ 及 $|\mathrm{g}| < 1$ 正是為了排除這些情況而設的。
- 在分母中令 $\mathrm{g}(h) \to 0$ 卻沒有說明原因：這需要 g 在 0 連續，而連續性來自可微性。

► 除以 f 或 $1 - g^2$ 之前沒有檢查它是否非零。

STEP 之外

這些都是柯西型函數方程（*Cauchy-type functional equations*）的例子。大學第一個分析（analysis）課程會證明：在遠比可微性弱的假設下，例如只在某一點連續，指數方程 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 便迫使 $f(x) = e^{kx}$（或 $f \equiv 0$）；而如果沒有任何正則性（regularity）條件，則會出現極其怪異的解。tanh 方程正是狹義相對論（special relativity）中的速度相加定律，在那裏速度的 $\tanh^{-1}$（稱為快度（rapidity））只需直接相加。想了解背後的分析，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2019，第 3 題

純數學 • 矩陣的不變直線

STEP III 2019，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

點 (x, y) 是不變點（invariant point），當且僅當 $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ 把它映到零，由此得到兩條線性方程（linear equations）。第 (i) 和第 (ii) 部分的所有內容，都源於追問：這兩條方程何時描述同一條直線？其條件是 $(a-1)(d-1) = bc$，亦即 $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$。在第 (iii) 部分，我們把直線上的一般點代入變換，然後比較係數。

解答

第 (i) 部分

點 (x, y) 是不變點，當 $ax + by = x$ 且 $cx + dy = y$，即

$$(a-1)x = -by, \tag{1}$$

$$(d-1)y = -cx. \tag{2}$$

把 (1) 和 (2) 相乘，得 $(a-1)(d-1)xy = bc\,xy$，所以對 L_1 上每一點 (x, y) 都有

$$\big((a-1)(d-1) - bc\big)xy = 0$$

，此即所求。

至於第二個結果，我們需要 L_1 上一個滿足 $xy \neq 0$ 的點，這樣才可以除以 xy。

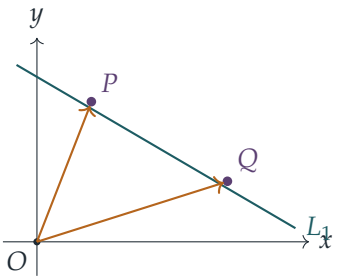
? **想一想** 如果 L_1 上每一點都有 $x = 0$ 或 $y = 0$，那又如何？

集合 $xy = 0$ 正是兩條坐標軸。一條位於兩軸之併集內的直線必定是其中一條坐標軸，所以除非 L_1 是坐標軸，否則它必含一個 $xy \neq 0$ 的點。於是除以 xy，便得 $(a-1)(d-1) =$

bc。

剩下的是坐標軸的情況。若 L_1 是 y 軸，則每個 $(0, y)$ 都是不變點，而 (1) 和 (2) 給出對所有 y 皆有 $by = 0$ 及 $(d-1)y = 0$。所以 $b = 0$ 且 $d = 1$，而 $(a-1)(d-1) = bc$ 兩邊都是 0。若 L_1 是 x 軸，同理得 $c = 0$ 且 $a = 1$，兩邊同樣是 0。因此在所有情況下都有 $(a-1)(d-1) = bc$。

現在假設 L_1 不經過原點。在 L_1 上取兩個不同的點 P 和 Q，其位置向量（position vectors）分別為 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$。



由於 O、P、Q 不共線，$\mathbf{p}$ 與 $\mathbf{q}$ 不平行，所以每個向量都可寫成 $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}$。由線性性（linearity），

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{Ap} + \mu\mathbf{Aq} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q} = \mathbf{v},$$

所以平面上每一點都是不變點，且 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$。（此時 $a = d = 1$ 及 $b = c = 0$，與 $(a-1)(d-1) = bc$ 吻合。）

第 (ii) 部分

假設 $(a-1)(d-1) = bc$。我們需要找一條直線，使 (1) 和 (2) 在其上都成立。

情況 $b \neq 0$。取直線 $(a-1)x + by = 0$；由於 $b \neq 0$，這確實是一條通過原點的直線。直線上每一點都滿足 (1)。在這條直線上 $y = -\frac{(a-1)x}{b}$，所以

$$cx + (d-1)y = cx - \frac{(a-1)(d-1)}{b}\,x = cx - \frac{bc}{b}\,x = 0,$$

因此 (2) 亦成立。所以 $(a-1)x + by = 0$ 是一條不變點直線（line of invariant points）。

情況 $b = 0$。此時條件變為 $(a-1)(d-1) = 0$，所以 $a = 1$ 或 $d = 1$。

- 若 $a \neq 1$，則 $d = 1$。方程 (1) 變成 $(a-1)x = 0$，所以 $x = 0$；而 (2) 變成 $cx = 0$，在 $x = 0$ 時成立。不變點直線就是 y 軸 $x = 0$。
- 若 $a = 1$，則 (1) 對每一點都成立，我們只需 (2)：$cx + (d-1)y = 0$。
  - 若 c 與 $d - 1$ 不同時為零，這是一條通過原點的直線，而且是一條不變點直線。

▶ 若 $c = 0$ 且 $d = 1$，則 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$，每一點都是不變點，每一條直線都是不變點直線。

所以只要 $(a-1)(d-1) = bc$，就存在一條不變點直線。

第 (iii) 部分

由於 L_2 不經過原點，可把 L_2 寫成 $y = mx + k$，其中 $k \neq 0$。L_2 上的一般點是 $(x, mx + k)$，其像為

$$(X, Y) = \big((a + bm)x + bk,\ (c + dm)x + dk\big).$$

這條直線是不變直線（invariant line），當且僅當對每個實數 x 都有 $Y = mX + k$：

$$(c + dm)x + dk = m(a + bm)x + mbk + k.$$

兩邊都是 x 的一次式，且對所有 x 都相等，所以係數必須相同：

$$\text{常數項：}\quad dk = mbk + k, \tag{3}$$

$$\text{一次項係數，關於}x\text{：}\quad c + dm = am + bm^2. \tag{4}$$

? **想一想** 我們在哪裏用到 L_2 不經過原點這個事實？

我們在 (3) 中用到它：因為 $k \neq 0$，可以除以 k，得 $d - 1 = mb$。把 $d = 1 + mb$ 代入 (4)，

$$c = am + bm^2 - dm = am + bm^2 - m - bm^2 = m(a - 1).$$

因此

$$bc = bm(a - 1) = (d - 1)(a - 1),$$

此即所求結果。（若 $k = 0$，方程 (3) 不提供任何資訊，這正是通過原點的直線可以在不滿足該條件下仍是不變直線的原因。旋轉 π 就是一例：它把每條通過 O 的直線映到自身，但 $(a-1)(d-1) = 4 \neq 0 = bc$。）

驗算

▶ 試取 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$：此時 $(a-1)(d-1) = -2 = bc$。第 (ii) 部分預測不變直線為 $2x + 2y = 0$，即 $y = -x$，而確實有 $\mathbf{A}(1, -1)^{\mathrm{T}} = (1, -1)^{\mathrm{T}}$。

▶ 對於第 (iii) 部分，取 $m = 2$、$k = 1$、$a = 3$、$b = 1$。則 $d = 1 + mb = 3$ 及 $c = m(a-1) = 4$。$y = 2x + 1$ 上的點 $(1, 3)$ 映到 $(6, 13)$，而 $13 = 2 \times 6 + 1$。此外 $(a-1)(d-1) = 4 = bc$。

- 我們用電腦驗證了數以千計的隨機矩陣：所找到的每條滿足 $k \neq 0$ 的不變直線 $y = mx + k$ 都有 $d - 1 = mb$、$c = m(a-1)$ 及 $(a-1)(d-1) = bc$；而每條不經過原點的不動點直線都來自 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分除以 xy，卻沒有處理 L_1 是坐標軸的情況。
- 在第 (ii) 部分 $b = 0$ 時漏掉某個子情況，特別是 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$，此時每條直線都符合。
- 在第 (iii) 部分混淆了*不變直線*（點仍留在直線上）與*不變點直線*（點本身不動），因而錯誤地設 $X = x$。

STEP 之外

條件 $(a-1)(d-1) = bc$ 就是 $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$，表示 1 是 $\mathbf{A}$ 的特徵值（eigenvalue）。通過原點的不變點直線，就是該特徵值的特徵空間（eigenspace）。第 (iii) 部分說明，一條不經過原點的不變直線同樣迫使 1 成為特徵值。關係式 $c = m(a-1)$ 和 $d - 1 = mb$ 表示 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 的第二行是第一行的 m 倍，所以 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 的秩（rank）最多是 1，並把每一點沿平行於 L_2 的方向移動。關於特徵值、特徵向量（eigenvectors）及線性映射的幾何，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

詳細解答

STEP III 2019，第 4 題

純數學 • 根與係數

STEP III 2019，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

交替出現的正負號正是韋達定理（Vieta's formulas）中的符號：以 $r_1, \ldots, r_n$ 為根的首一多項式（monic polynomial）是 $x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n e_n$，其中 e_k 是從各根中任取 k 個相乘所得的所有乘積之和。因此，「自反」（reflexive）其實只是說對每個 k 都有 $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$。這樣，較小的情況就只是幾條聯立方程，而各根的平方和 $e_1^2 - 2e_2$ 則給出 (ii) 中的恆等式。一旦證得 $a_n = 0$，就可以抽出因式 x，把多項式逐層剝減。

解答

以下一律以 e_k 表示 $a_1, \ldots, a_n$ 的第 k 個初等對稱函數（elementary symmetric function）。根據韋達定理，P 的根是 $a_1, \ldots, a_n$ 若且唯若

$$e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k \qquad \text{對} k = 1, 2, \ldots, n.$$

第 (i) 部分

一次。$\mathrm{P}(x) = x - a_1$ 的根是 a_1，所以所有這類多項式都是自反的：對任意實數 a，$\mathrm{P}(x) = x - a$。

二次。我們需要 $a_1 + a_2 = a_1$ 及 $a_1 a_2 = a_2$。由第一條得 $a_2 = 0$，此時第二條自動成立。所以對任意實數 a，$\mathrm{P}(x) = x^2 - ax = x(x - a)$；它的根 a 和 0 確實分別是 a_1 和 a_2。

三次。我們需要

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1,$$
$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = a_2,$$
$$a_1a_2a_3 = a_3.$$

由第一條得 $a_3 = -a_2$。於是第二條變成 $a_1(a_2 + a_3) + a_2a_3 = a_2$，即 $-a_2^2 = a_2$，所以 $a_2 = 0$ 或 $a_2 = -1$。

- 若 $a_2 = 0$，則 $a_3 = 0$，而第三條方程變成 $0 = 0$。所以 a_1 可以任意取值：$\mathrm{P}(x) = x^3 - ax^2 = x^2(x - a)$。
- 若 $a_2 = -1$，則 $a_3 = 1$，而第三條方程給出 $-a_1 = 1$，所以 $a_1 = -1$。由此得

  $$\mathrm{P}(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)^2(x - 1),$$

  它的根 $-1, -1, 1$ 確實是 a_1, a_2, a_3。

所以次數不超過 3 的自反多項式是

$$x - a, \qquad x^2 - ax, \qquad x^3 - ax^2 \quad (a \in \mathbb{R}), \qquad \text{以及} \qquad x^3 + x^2 - x - 1.$$

第 (ii) 部分

各根的平方和是

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = e_1^2 - 2e_2,$$

因為把 e_1 平方後，每個 a_i^2 出現一次，而每個乘積 a_ia_j（$i < j$）出現兩次。對自反多項式而言，$e_1 = a_1$ 且 $e_2 = a_2$，所以

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_1^2 - 2a_2, \qquad \text{即} \qquad 2a_2 = -a_2^2 - a_3^2 - \cdots - a_n^2,$$

這就是所求的結果。（這對每個 $n \geq 2$ 都成立。）

現在假設各 a_k 都是整數，$a_n \neq 0$，並用反證法（proof by contradiction）假設 $n > 3$。把 a_2^2 移到另一邊並配方（completing the square），得

$$(a_2 + 1)^2 = 1 - \left(a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_n^2\right).$$

想一想 整數條件如何把這條方程「夾緊」？

左邊至少是 0，所以 $a_3^2 + \cdots + a_n^2 \leq 1$。但 a_n 是非零整數，所以 $a_n^2 \geq 1$。因此這個和恰好等於 1：$a_n^2 = 1$，而其餘各項都是零，所以 $a_3 = a_4 = \cdots = a_{n-1} = 0$，同時 $a_2 = -1$。由於 $n \geq 4$，數列 $a_3, \ldots, a_{n-1}$ 並非空的，特別地 $a_3 = 0$。現在，最後一條韋達方程說各根之積等於 a_n：

$$a_n = e_n = a_1a_2a_3 \cdots a_n = 0,$$

因為 $a_3 = 0$。這與 $a_n \neq 0$ 矛盾。所以 $n \leq 3$。

第 (iii) 部分

抽出因式 x。假設 P 是次數 $n \geq 2$ 的自反多項式，且 $a_n = 0$。那麼 $\mathrm{P}(x) = x\mathrm{Q}(x)$，其中

$$\mathrm{Q}(x) = x^{n-1} - a_1 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}.$$

P 的根是 $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$，其中 $a_n = 0$，而因式 x 對應其中一個根 0。所以 Q 的根就是餘下的 $a_1, \ldots, a_{n-1}$：Q 是自反的，而且係數相同(同樣是整數)。反過來，若 Q 是次數 m 的自反多項式，係數為 $a_1, \ldots, a_m$，那麼 $x\mathrm{Q}(x)$ 的係數是 $a_1, \ldots, a_m, 0$，根是 $a_1, \ldots, a_m, 0$，所以它也是自反的。

逐層剝減。從任何整係數自反多項式 P 出發。只要它的次數至少是 2 而最後一個係數是 0，就抽出一個因式 x。這個過程最終停在 $\mathrm{P}(x) = x^m \mathrm{R}(x)$，其中 $m \geq 0$，而 R 是次數為 k 的整係數自反多項式，且要麼 $k = 1$，要麼最後一個係數 a_k 非零。

- 若 $a_k \neq 0$，則由第 (ii) 部分得 $k \leq 3$（若 $k \leq 3$ 則無需證明）。根據第 (i) 部分的列表：$k = 1$ 時得 $x - a$，其中 $a \neq 0$；$k = 2$ 時最後一個係數必定是 0，所以沒有；$k = 3$ 時唯一滿足 $a_3 \neq 0$ 的是 $x^3 + x^2 - x - 1$。
- 若 $k = 1$ 且 $a_1 = 0$，則 $\mathrm{R}(x) = x$。

把 $\mathrm{R}(x) = x$ 併入 $x - a$ 中 $a = 0$ 的情況，再利用上述的逆命題得知每個乘以 x^m 的倍式都是自反的，便知整係數自反多項式恰好是

$$x^m(x - a) \quad (m \geq 0,\ a \in \mathbb{Z}),$$
$$x^m(x^3 + x^2 - x - 1) = x^m(x+1)^2(x-1) \quad (m \geq 0).$$

驗算

- $x^2(x+1)^2(x-1) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$ 的 $a_1, \ldots, a_5 = -1, -1, 1, 0, 0$，根是 $-1, -1, 1, 0, 0$：它是自反的。(ii) 中的恆等式變成 $2(-1) = -(1 + 1 + 0 + 0)$，成立。
- 用電腦搜尋所有 $n \leq 7$、$a_1, \ldots, a_n$ 取 $\{-3, \ldots, 3\}$ 中整數的情況，除上列者外沒有找到其他自反多項式；對 $n = 2, 3$ 在較小的有理數中搜尋，亦印證了第 (i) 部分的列表。

常見錯誤

- 遺漏含自由參數的多項式族：$x^2 - ax$ 和 $x^3 - ax^2$ 對每個實數 a 都是自反的，而不只是對某些特殊值。

- 在 (ii) 中，求得 $a_n = \pm 1$、$a_2 = -1$ 便停下來。矛盾其實來自各根之積：當 $n \geq 4$ 時，$a_3, \ldots, a_{n-1}$ 中有零，所以積為零。
- 在 (iii) 中，只說「$a_n = 0$，所以除以 x」，卻沒有驗證商式仍然是自反的：一個零根對應因式 x，而餘下的根要與餘下的係數吻合。

STEP 之外

方程組 $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$ 是多項式方程組的一個小例子，其解構成一個代數簇（algebraic variety），在這裏是若干直線與孤立點的並集。「平方和 $= e_1^2 - 2e_2$」這個事實是牛頓（Newton）恆等式（Newton's identities）中的第一條；這些恆等式把各根的冪和與係數聯繫起來，是對稱函數理論的基礎。「若干整數的平方之和不超過 1」這一步，是丟番圖（Diophantine）論證中的典型手法。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）和 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）都是進一步探索這些概念的好起點。

詳細解答

STEP III 2019，第 5 題

純數學 • 代換積分法

STEP III 2019，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分中的函數把 $[0,\infty)$ 光滑且遞增地映射到 $[0,1)$ 上。因此只要把它乘以一個常數，就能把一個 y 積分（積分區間是 $[0,c)$ 的一部分）轉化為一個 x 積分（積分區間是 $[0,\infty)$ 的一部分）。這樣做亦會令 c^2-y^2 變成一個經過偽裝的完全平方，從而消去那個麻煩的平方根。根號消失後，剩下的是一個有理 (rational) 被積函數 (integrand)，可以用題目註釋中給出的反正切(arctangent)積分來處理。倒數代換(reciprocal substitution) $y=1/u$ 則把後面的積分聯繫回第一個積分。

解答

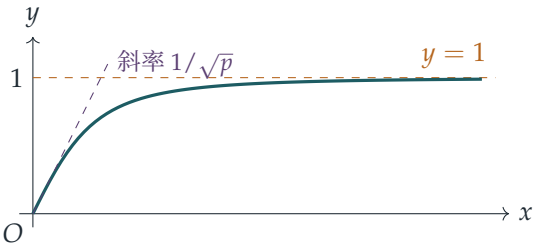
第 (i) 部分

設 $f(x)=x(x^2+p)^{-1/2}$ 且 $p>0$，則 $f(0)=0$，且

$$f'(x)=(x^2+p)^{-1/2}-x^2(x^2+p)^{-3/2}=\frac{p}{(x^2+p)^{3/2}}>0,$$

$$f''(x)=-\frac{3px}{(x^2+p)^{5/2}}<0 \quad \text{對於} x>0.$$

因此曲線以斜率（gradient）$1/\sqrt{p}$ 離開原點，並穩定上升，同時向下彎曲（即曲線是凹 (concave) 的）。由於當 $x>0$ 時 $f(x)=1/\sqrt{1+p/x^2}$，故當 $x\to\infty$ 時 $f(x)\to 1$，且由下方趨近，所以 $y=1$ 是曲線永遠達不到的漸近線（asymptote）。



第 (ii) 部分

按試卷印刷的版本，代換式的分子是 b。這樣行不通：它雖然令 b^2-y^2 變得整齊，卻留下 $c^2(x^2+p)-b^2x^2$ 的平方根，而這並不是完全平方。真正可行的代換（亦即出題者的原意）分子是 c：

$$y=\frac{cx}{\sqrt{x^2+p}},\qquad p>0.$$

由第 (i) 部分，這是由 $x\in[0,\infty)$ 映射到 $y\in[0,c)$ 上的遞增映射，而這正是 $\sqrt{c^2-y^2}$ 有定義的範圍。於是

$$c^2-y^2=\frac{c^2(x^2+p)-c^2x^2}{x^2+p}=\frac{c^2p}{x^2+p},$$

$$b^2-y^2=\frac{b^2p+(b^2-c^2)x^2}{x^2+p},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\quad\text{（由第 (i) 部分）.}$$

由於 $c>0$ 及 $p>0$，有 $\sqrt{c^2-y^2}=c\sqrt{p}/\sqrt{x^2+p}$。代入得

$$I=\int\frac{x^2+p}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+p}}{c\sqrt{p}}\cdot\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{p}}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x.$$

取 $p=1$，得

$$I=\int\frac{1}{b^2+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x,$$

這正是所求的結果。所用的代換是 $y=cx/\sqrt{x^2+1}$，其反函數是 $x=y/\sqrt{c^2-y^2}$。

第一個積分。 取 $b=\sqrt{3}$ 及 $c=\sqrt{2}$。於是 $x=y/\sqrt{2-y^2}$，因此 $y=1$ 對應 $x=1$，而當 $y\to\sqrt{2}$ 時 $x\to\infty$。原被積函數在 $y=\sqrt{2}$ 處趨於無窮，其增長方式如 $(2-y^2)^{-1/2}$，屬於可積（integrable）的類型。代換後，積分變成 $[1,\infty)$ 上一個收斂（convergent）的反常積分（improper integral）：

$$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}y}{(3-y^2)\sqrt{2-y^2}}=\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{3+x^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\Big]_1^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\Big)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

想一想 新的積分中出現的是 $3y^2-1$ 和 $2y^2-1$，而舊的積分中則是 $3-y^2$ 和 $2-y^2$。哪一種代換能把 y^2 與常數的角色互換？

第二個積分。 設 $y=1/u$，其中 $u>0$，於是 $\mathrm{d}y=-\mathrm{d}u/u^2$。那麼

$$3y^2-1=\frac{3-u^2}{u^2},\qquad \sqrt{2y^2-1}=\frac{\sqrt{2-u^2}}{u},$$

而積分上下限 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $y=1$ 分別變成 $u=\sqrt{2}$ 和 $u=1$。所以

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\frac{y\,\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}}=\int_{\sqrt{2}}^{1}\frac{1}{u}\cdot\frac{u^2}{3-u^2}\cdot\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\cdot\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)=\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}u}{(3-u^2)\sqrt{2-u^2}}.$$

這正好就是第一個積分，因此其值同樣是 $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$。

第 (iii) 部分

同樣的倒數代換 $y=1/u$ 會把被積函數變成 $u/\big((3-u^2)\sqrt{2-u^2}\big)$。多出來的因子 u 提示我們設 $w=\sqrt{2-u^2}$，因為這樣便有 $3-u^2=1+w^2$。把兩步合併，就得到單一個代換：

$$w=\frac{\sqrt{2y^2-1}}{y}=\sqrt{2-\frac{1}{y^2}},\qquad \text{故}\qquad w^2=2-\frac{1}{y^2},\quad 2w\,\mathrm{d}w=\frac{2}{y^3}\,\mathrm{d}y.$$

當 $y\in[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$ 時，w 由 0 遞增至 1。此外，$\mathrm{d}y=wy^3\,\mathrm{d}w$、$\sqrt{2y^2-1}=wy$，以及 $3y^2-1=y^2\big(3-\frac{1}{y^2}\big)=y^2(1+w^2)$。因此

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}}=\int_{0}^{1}\frac{wy^3\,\mathrm{d}w}{y^2(1+w^2)\cdot wy}=\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}w}{1+w^2}=\frac{\pi}{4}.$$

（$y=1/\sqrt{2}$ 處的奇點（singularity）同樣只屬於 $(2y^2-1)^{-1/2}$ 這種可積的類型，而代換把它消除了。）

這其實是經過偽裝的第 (ii) 部分方法。設 $x=1/w$，便得 $y=x/\sqrt{2(x^2-1)}$，這正是取 $c^2=\frac{1}{2}$ 及 $p=-1$ 時的一般代換。這就是第 (i) 部分容許 p 為負數的原因。

驗算

- $\pi/(3\sqrt{3})\approx 0.6046$，而 $\pi/4\approx 0.7854$。先用三角代換消除端點的奇點，再對原積分進行數值積分（numerical integration），兩個數值均得到證實。
- 第一個積分的粗略大小檢查：在 $[1,\sqrt{2}]$ 上有 $1\le 3-y^2\le 2$，所以積分值介乎 $\frac{1}{2}$ 倍與 1 倍的 $\int_1^{\sqrt{2}}(2-y^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}$ 之間。由此得出的範圍是 0.39 至 0.79，而 0.6046 穩穩落在其中。

- 在某一點檢驗第 (ii) 部分的恆等式：取 $b=\sqrt{3}$、$c=\sqrt{2}$ 及 $x=1$，得 $y=1$。此時被積函數的值是 $\frac{1}{2}$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=\sqrt{2}/2^{3/2}=\frac{1}{2}$，兩者之積是 $\frac{1}{4}=1/(3+1)$，與預期相符。

常見錯誤

- 堅持使用代換式中印出來的 b，結果卡住：需要消去的平方根是 $\sqrt{c^2-y^2}$，所以縮放因子必須是 c。
- 轉換積分上下限時出錯。這裏 $y=\sqrt{2}=c$ 對應的是 $x=\infty$，而不是某個有限的 x 值。
- 漏掉 $\mathrm{d}y=-\mathrm{d}u/u^2$ 中的負號，或忘記把上下限調換回來，以致一個正的被積函數得出負的答案。

STEP 之外

這裏用到的代換屬於有理化代換（rationalising substitution）。它們把含有二次式平方根的被積函數變成有理函數，之後再用部分分式（partial fractions）或 $\tan^{-1}$ 便可完成。在大學一年級的分析（analysis）課程中，你會學到這裏所用反常積分背後的理論：含無窮上下限或無界被積函數的積分何時收斂，以及為何代換法對這類積分仍然成立。Bartle 與 Sherbert 合著的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）對這兩方面都有仔細的論述。

詳細解答

STEP III 2019，第 6 題

純數學 • 阿根圖上的圓

STEP III 2019，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

開首那條式子其實就是喬裝了的 $|z-a|^2-r^2$，所以軌跡（locus）是與 a 距離為 r 的點的集合。至於在 $\omega=1/z$ 之下的像，先代入 $z=1/\omega$，消去分母，再把結果整理回與原方程相同的形式。一旦化成這個形式，便可以比較係數（matching coefficients），直接讀出圓心和半徑。最後比較圓心和半徑，就能判斷 C' 與 C 何時是同一個圓。

解答

由於 $(z-a)^*=z^*-a^*$，

$$|z-a|^2=(z-a)(z^*-a^*)=zz^*-a^*z-az^*+aa^*,$$

所以題目給出的方程正好說 $|z-a|^2=r^2$，即 $|z-a|=r$（因為 $r>0$）。因此 C 是**圓心為 a、半徑為 r 的圓**。

更一般地，若 $s>0$，方程 $ww^*-bw^*-b^*w+bb^*-s^2=0$ 表示圓心為 b、半徑為 s 的圓。我們會把這個當作模板使用。

第 (i) 部分

首先，$z=0$ 不在 C 上：否則需要 $|a|=r$，即 $a^*a=r^2$，而這已被排除。所以對 C 上每一點，$\omega=1/z$ 都有定義，而且 $\omega\neq 0$。另外 $z=1/\omega$，所以 Q 在 C' 上當且僅當 $\omega\neq 0$ 且

$$\left|\frac{1}{\omega}-a\right|=r \iff |1-a\omega|=r|\omega| \iff (1-a\omega)(1-a^*\omega^*)=r^2\omega\omega^*.$$

展開並合併同類項，

$$(a^*a - r^2)\,\omega\omega^* - a\omega - a^*\omega^* + 1 = 0.$$

設 $k = a^*a - r^2 = |a|^2 - r^2$，由題設它是一個非零實數。兩邊除以 k，

$$\omega\omega^* - \frac{a^*}{k}\,\omega^* - \frac{a}{k}\,\omega + \frac{1}{k} = 0.$$

這與模板吻合，其中 $b = a^*/k$（由於 k 是實數，所以 $b^* = a/k$），前提是 $bb^* - s^2 = 1/k$，即

$$s^2 = \frac{|a|^2}{k^2} - \frac{1}{k} = \frac{|a|^2 - k}{k^2} = \frac{r^2}{k^2}.$$

這是正數，所以 C' 確實是一個圓，其

$$\text{圓心為}\frac{a^*}{|a|^2 - r^2}, \qquad \text{半徑為}\frac{r}{\big||a|^2 - r^2\big|}.$$

（注意 $\omega = 0$ 不滿足這方程，因為它會給出 $1 = 0$。所以這個圓上每一點確實都是某個在 C 上的 z 的 $1/z$。）

? 想一想 兩個圓何時相同？

兩個圓相同，當且僅當它們有相同的圓心和相同的半徑。所以 $C' = C$ 要求

$$\frac{r}{|k|} = r \qquad \text{及} \qquad \frac{a^*}{k} = a.$$

第一個條件給出 $|k| = 1$，即 $k^2 = 1$：

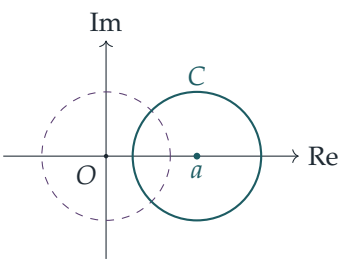
$$\big(|a|^2 - r^2\big)^2 = 1.$$

所以 $k = 1$ 或 $k = -1$，再由第二個條件得：

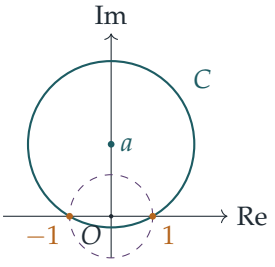
- 若 $k = 1$：$a^* = a$，所以 a 是**實數**；
- 若 $k = -1$：$a^* = -a$，所以 a 是**虛數**（純虛數（purely imaginary））。

（若 $a = 0$，則兩者皆是，此時 $r = 1$。）反過來，上述任一情況，加上半徑條件，的確會令圓心和半徑一致。

草圖。若 a 是實數，則 $|a|^2 = r^2 + 1 > r^2$，所以圓心在實軸上，與 O 的距離為 $\sqrt{r^2+1}$，而原點位於 C 的外面。這個圓與實軸相交於 $a - r$ 和 $a + r$，兩者之積為 $a^2 - r^2 = 1$，這是必然的，因為 $1/z$ 會把它們互換。若 a 是虛數，則 $|a|^2 = r^2 - 1$，所以這情況需要 $r \geq 1$。圓心在虛軸上，而原點位於 C 的裏面。設 $a = \mathrm{i}c$，與實軸的交點滿足 $x^2 + c^2 = r^2$，所以 $x = \pm 1$。在兩種情況下，C 都與單位圓（虛線）成直角相交（正交（orthogonal））因為 $|a|^2 = r^2 \pm 1$（左圖中 $a = \sqrt{2}$，$r = 1$；右圖中 $a = \mathrm{i}\sqrt{3}$，$r = 2$）。



a 為實數



a 為虛數

若 a 是實數，它當然也可以是負數，得出的是左圖關於虛軸的鏡像；同樣，虛數 a 也可以位於實軸下方。

第 (ii) 部分

現在 $z = 1/\omega^*$，所以 Q 在軌跡上當且僅當

$$\left|\frac{1}{\omega^*} - a\right| = r \iff |1 - a\omega^*| = r|\omega^*| \iff |1 - a^*\omega| = r|\omega|,$$

這裏是在第一個模（modulus）裏面取共軛（conjugate）（一個數與它的共軛有相同的模）。這正是第 (i) 部分的方程，只是把 a 換成 a^*。所以由第 (i) 部分，軌跡是一個圓，其

$$\text{圓心為}\frac{a}{k}, \qquad \text{半徑為}\frac{r}{|k|}, \qquad k = |a|^2 - r^2.$$

要這個圓就是 C，需要 $|k| = 1$ 及 $a/k = a$。若 $a \neq 0$，第二個條件迫使 $k = 1$，而條件就只有這些：條件正好是

$$|a|^2 = r^2 + 1,$$

它對 a 的輻角（argument）沒有任何限制。（若 $a = 0$，則與之前一樣需要 $r = 1$。）

想一想 你能找出一個既非實數、亦非虛數的具體 a 嗎？

取 $a = 1 + \mathrm{i}$ 及 $r = 1$。那麼 $|a|^2 = 2 = r^2 + 1$，所以 Q 的軌跡就是 C，但 a 既不是實數，也不是純虛數。所以答案是**否**：a 並不一定是實數或虛數。

驗算

- 取 $a = \sqrt{5}$，$r = 2$（於是 $|a|^2 - r^2 = 1$），C 上的點 $z = \sqrt{5} \pm 2$ 映到 $1/(\sqrt{5} \pm 2) = \sqrt{5} \mp 2$，它們仍然在 C 上。
- 在第 (ii) 部分取 $a = 1 + \mathrm{i}$，$r = 1$：點 $z = 1$ 在 C 上，而 $1/z^* = 1$ 也在。點 $z = 2 + \mathrm{i}$ 給出 $1/z^* = (2 + \mathrm{i})/5 = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$，而 $|(0.4 + 0.2\mathrm{i}) - (1 + \mathrm{i})|^2 = 0.36 + 0.64 = 1$。但 $1/z = 0.4 - 0.2\mathrm{i}$ 不在 C 上，所以這個圓在第 (i) 部分的映射下並不固定。

- 兩部分中的像圓亦已用電腦驗證：把隨機圓上的大量點映射過去，再量度它們與預測圓心的距離。

常見錯誤

- 把 C' 的圓心寫成 $a/(|a|^2 - r^2)$，而不是 $a^*/(|a|^2 - r^2)$。讀出圓心需要看 ω^* 的係數，而不是 ω 的係數。
- 忘記半徑 $r/\left||a|^2 - r^2\right|$ 中的絕對值。沒有它的話，$|a| < r$ 的情況會得出負的半徑。
- 在第 (ii) 部分照搬第 (i) 部分而答「是」，沒有留意到共軛把條件 $a^* = \pm a$ 消除了。

STEP 之外

映射 $z \mapsto 1/z^*$ 是關於單位圓的反演（*inversion in the unit circle*），而 $z \mapsto 1/z$ 則是先作這個反演，再關於實軸作反射。兩者都屬於莫比烏斯變換（Möbius transformations）這個家族，這類變換總是把圓和直線映到圓和直線。第 (ii) 部分就是一個經典事實：一個圓在反演下固定，當且僅當它與反演圓成直角相交，即 $|a|^2 = r^2 + 1$（或者它就是單位圓本身）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）以大量圖像，優美地發展了這些概念。

詳細解答

STEP III 2019，第 7 題

純數學 • 曲線描繪

STEP III 2019，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

方程只含 x^2 和 y^2，所以它是 x^2（或 y^2）的二次方程（quadratic）。這一下子給了我們兩件工具：一是判別式（discriminant），它告訴我們曲線能取到哪些 y 值；二是以 y 表示 x^2 的明確公式。要看曲線在原點附近的形狀，只保留最低次的項；要看遠處的形狀，則只保留最高次的項。在 $a = b$ 這個特殊情況下，方程可以完全因式分解（factorise）。

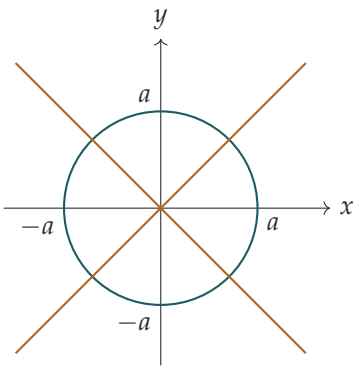
解答

第 (i) 部分

設 $a = b$，把所有項移到同一邊，並把四次（quartic）項和二次項分組：

$$\begin{aligned} 0 &= (y^4 - x^4) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(y^2 + x^2) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - a^2). \end{aligned}$$

因此一點在曲線上，當且僅當 $y = \pm x$ 或 $x^2 + y^2 = a^2$：魔鬼曲線（Devil's Curve）就是兩條直線 $y = x$ 和 $y = -x$，加上以原點為圓心、半徑為 a 的圓。



第 (ii)(a) 部分

現在 $a = 2$、$b = \sqrt{5}$，曲線為 $y^4 - 5y^2 = x^4 - 4x^2$。固定 $y \geq 0$，並記 $X = x^2$。一點 (x, y)（其中 $x \geq 0$）在曲線上，當且僅當 $X \geq 0$ 滿足

$$X^2 - 4X - (y^4 - 5y^2) = 0.$$

要有實根，判別式必須非負：

$$\begin{aligned} 16 + 4(y^4 - 5y^2) &= 4(y^4 - 5y^2 + 4) = 4(y^2 - 1)(y^2 - 4) \\ &= 4(y+1)(y+2)(y-1)(y-2) \geq 0. \end{aligned}$$

由於 $y \geq 0$，因子 $y+1$ 和 $y+2$ 都是正數，所以需要 $(y-1)(y-2) \geq 0$，即

$$0 \leq y \leq 1 \quad \text{或} \quad y \geq 2.$$

反過來，每個這樣的 y 都確實會出現。兩個根是

$$X = 2 \pm \sqrt{D}, \qquad D = (y^2 - 1)(y^2 - 4),$$

其中較大的根至少是 2，所以它是合法的 x^2。下面會用到這條 x^2 的公式。

第 (ii)(b) 部分

在原點附近，四次項 y^4 和 x^4 與 y^2 和 x^2 相比微不足道。所以曲線近似於

$$-5y^2 \approx -4x^2, \qquad \text{即} \qquad y \approx \tfrac{2}{\sqrt{5}}\, x \quad (x, y \geq 0).$$

曲線沿着斜率（gradient）為 $2/\sqrt{5} \approx 0.89$ 的直線離開原點，略低於直線 $y = x$。（(a) 的公式也吻合：對於根 $X = 2 - \sqrt{D}$，用二項展開（binomial expansion）可得 $x^2 = \frac{5}{4}y^2 + O(y^4)$。）

在離原點很遠處，最高次的項佔主導：$y^4 \approx x^4$，所以 $y \approx x$。我們還可以做得更好。把方程寫成

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) = 5y^2 - 4x^2 \quad \Longrightarrow \quad y^2 - x^2 = \frac{5y^2 - 4x^2}{y^2 + x^2}.$$

由於 $y/x \to 1$，右邊趨向 $\frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$。所以 $y^2 \approx x^2 + \frac{1}{2}$，從而

$$y \approx x + \frac{1}{4x}.$$

曲線以直線 $y = x$ 為漸近線（asymptote），並從上方趨近它。事實上，除原點外曲線從不與這條直線相交：把 $y = x$ 代入方程，得 $x^2 = 0$。

第 (ii)(c) 部分

對 $y^4 - 5y^2 = x^4 - 4x^2$ 關於 x 進行隱函數微分（implicit differentiation），

$$(4y^3 - 10y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 8x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x^2 - 2)}{y(2y^2 - 5)}.$$

切線（tangent）平行於 x 軸：需要分子為零而分母不為零。所以 $x = 0$ 或 $x = \sqrt{2}$。

- $x = 0$：此時 $y^4 = 5y^2$，所以 $y = 0$ 或 $y = \sqrt{5}$。在 $(0, \sqrt{5})$，分母為 $\sqrt{5}(10 - 5) \neq 0$，所以這一點符合。
- $x = \sqrt{2}$：此時 $y^4 - 5y^2 = 4 - 8$，所以 $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$，得 $y = 1$ 或 $y = 2$。這兩處的分母分別是 -3 和 6，都不為零。

> **想一想** 原點處分子也是零，為甚麼我們不把它算進去？

在 $(0,0)$，分母也是零，所以公式給出 $0/0$，甚麼也說明不了。(b) 部分已經解決了這個問題：曲線以斜率 $2/\sqrt{5}$（而不是 0）穿過原點。

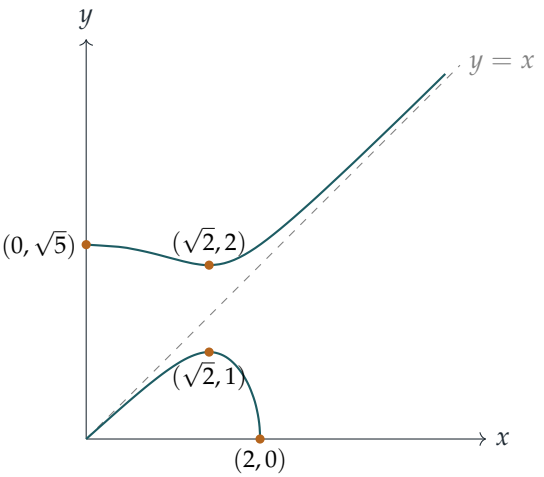
所以切線在 $(0, \sqrt{5})$、$(\sqrt{2}, 1)$ 和 $(\sqrt{2}, 2)$ 處是水平的。

切線平行於 y 軸：需要分母為零而分子不為零，所以 $y = 0$ 或 $y^2 = \frac{5}{2}$。但 $\sqrt{5/2} \approx 1.58$ 嚴格介乎 1 與 2 之間，已被 (a) 部分排除。當 $y = 0$ 時得 $x^4 = 4x^2$，所以 $x = 0$（又是原點，如上所述須排除）或 $x = 2$。在 $(2,0)$，分子為 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 0$。所以唯一這樣的點是 $(2,0)$。

$x \geq 0$、$y \geq 0$ 部分的草圖 利用 $x^2 = 2 \pm \sqrt{D}$，曲線分為兩段。

- $0 \leq y \leq 1$ **的一個環**。根 $2 - \sqrt{D}$ 由 0（在 $y = 0$）增至 2（在 $y = 1$），而 $2 + \sqrt{D}$ 則由 4 減至 2。所以曲線以斜率 $2/\sqrt{5}$ 離開原點，升至 $(\sqrt{2}, 1)$ 處的極大值，再下降，在 $(2,0)$ 處垂直地與 x 軸相交。

- $y \geq 2$ **的一翼**。當 $2 \leq y \leq \sqrt{5}$ 時，根 $2 - \sqrt{D}$ 由 2 減至 0；超過 $y = \sqrt{5}$ 後它變成負數，不再是合法的 x^2。根 $2 + \sqrt{D}$ 則由 2 開始無界地增大。所以這一支由 $(0, \sqrt{5})$ 開始，切線水平，下降至 $(\sqrt{2}, 2)$ 處的極小值，然後上升，從上方趨近 $y = x$。

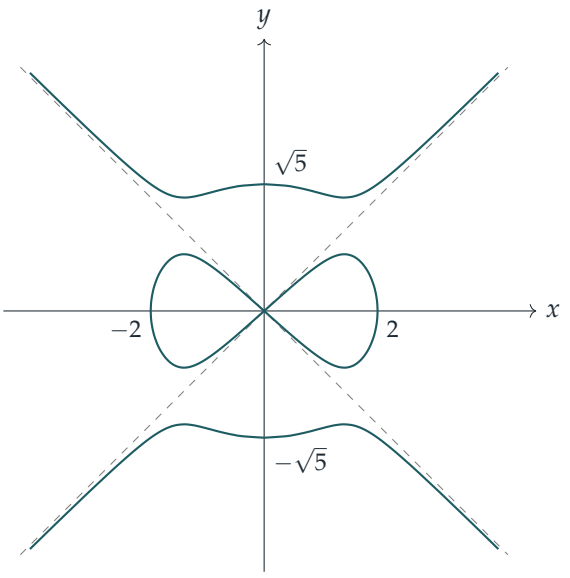


第 (iii) 部分

方程只涉及 x^2 和 y^2，所以曲線關於 y 軸對稱（symmetric）（把 x 換成 $-x$），也關於 x 軸對稱（把 y 換成 $-y$）。把四分之一的曲線分別對兩條軸作反射：

- 環變成介乎 $x = -2$ 與 $x = 2$ 之間的「8」字形（figure-of-eight），且 $|y| \leq 1$。兩瓣沿直線 $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$ 在原點相交，轉向點（turning point）位於 $(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$。
- 翼變成兩支，一支在 $y \geq 2$，另一支在 $y \leq -2$。每支在 $(0, \pm\sqrt{5})$ 處有局部極大值（local maximum）或局部極小值，轉向點位於 $(\pm\sqrt{2}, \pm 2)$，兩支都從外側趨近漸近線 $y = \pm x$。

曲線沒有任何部分位於帶狀區域 $1 < |y| < 2$ 內。



驗算

- 每個標示的點都滿足方程。例如在 $(\sqrt{2}, 2)$，兩邊都等於 -4；在 $(0, \sqrt{5})$，兩邊都等於 0。
- 點 $(1, 1.5)$ 位於禁區帶內。在該處左邊為 $2.25 \times (-2.75) \approx -6.19$，而右邊 $x^2(x^2-4)$ 永遠不會小於 -4（這是它在 $x^2 = 2$ 處的最小值）。這正是判別式論證的縮影。
- 在翼上取 $y = 100$，公式給出 $x^2 = 2 + \sqrt{(10^4-1)(10^4-4)}$。於是 $4x(y-x) \approx 1.0002$，與 $y - x \approx \frac{1}{4x}$ 吻合。在原點附近，環上的比值 y/x 趨向 $0.8944 \approx 2/\sqrt{5}$。

常見錯誤

- 把 $(0,0)$ 列為切線水平（或垂直）的點。在該處 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是 $0/0$，真正的斜率要由 (b) 得出。
- 把環畫成沿 $y = x$ 離開原點，或把翼畫成與 $y = x$ 相交。環的起始斜率是 $2/\sqrt{5} < 1$，而翼嚴格保持在 $y = x$ 上方。
- 忘記條件 $x^2 \geq 0$——正是這個條件令內側的根在 $y = \sqrt{5}$ 處終止。

STEP 之外

魔鬼曲線是一條代數曲線（algebraic curve）：即多項式 $F(x,y)$ 的零點集。原點是一個奇點（singular point），在該處兩個偏導數（partial derivative）F_x 和 F_y 都等於零。F 的最低次項給出該處的切線，這正是我們在 (b) 所做的；而最高次項則給出漸近線的方向。到了大學，這些概念會在隱函數定理（implicit function theorem）和代數幾何（algebraic geometry）中再次出現。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多 STEP 風格的曲線描繪題，並附有詳盡評註。

詳細解答

STEP III 2019，第 8 題

純數學 • 向量與三維幾何

STEP III 2019，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

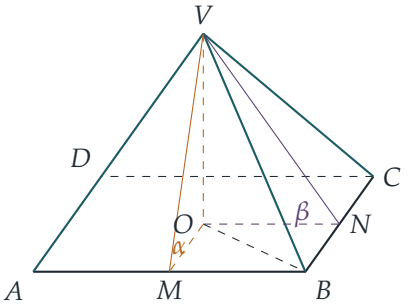
先為棱錐（pyramid）建立坐標。每個斜面都包含一條底邊，而底邊是水平的，因此該斜面的法向量（normal）必與這條底邊垂直。這就迫使法向量落在一個鉛垂平面內，而在這個平面上，斜面與底面之間的夾角可以直接讀出。之後，兩個斜面之間的夾角可由兩條法向量的點積（dot product）求得，其餘部分就只是細心的三角代數運算，再加上一次算術－幾何平均不等式（AM–GM）。

解答

設底面的中心為原點 O，$\mathbf{i}$ 沿 AB 方向，$\mathbf{j}$ 沿 BC 方向，$\mathbf{k}$ 向上。取

$$A=(-a,-b,0),\quad B=(a,-b,0),\quad C=(a,b,0),\quad D=(-a,b,0),\quad V=(0,0,h),$$

其中 $a,b,h>0$。



設 $M=(0,-b,0)$ 為 AB 的中點，$N=(a,0,0)$ 為 BC 的中點。由於 $VA=VB$，直線 VM 位於面 AVB 內並與 AB 垂直；底面上的 OM 亦與 AB 垂直。因此該斜面與底面之

間的夾角就是角 VMO，並且

$$\tan\alpha = \frac{h}{b}, \qquad \text{同樣地} \qquad \tan\beta = \frac{h}{a}.$$

第 (i) 部分

面 AVB 包含方向 $\overrightarrow{AB} \parallel \mathbf{i}$ 及 $\overrightarrow{MV} = b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}$。其一條法向量為

$$\mathbf{i} \times (b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}) = -h\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}.$$

除以其長度 $\sqrt{h^2 + b^2}$，並利用 $\tan\alpha = h/b$，便得單位法向量（unit normal）

$$\mathbf{n}_1 = -\sin\alpha\,\mathbf{j} + \cos\alpha\,\mathbf{k}.$$

它的 $\mathbf{j}$ 分量為負，所以它指向棱錐外面（面 AVB 位於 $y < 0$ 的一側）。

用完全相同的方法，面 BVC 包含 $\mathbf{j}$ 及 $\overrightarrow{NV} = -a\,\mathbf{i} + h\,\mathbf{k}$，其向外的單位法向量為

$$\mathbf{n}_2 = \sin\beta\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{k}.$$

因此

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta.$$

> ? **想一想** 兩條法向量之間的夾角，究竟是兩個面之間的夾角，還是它的補角（supplement）？

考慮一個與公共棱 VB 垂直的截面。在截面上，兩個面顯示為兩條直線，相交成內角 $\pi - \theta$，而每條向外法向量都與所屬直線垂直，並指離立體。把其中一個面經內角轉到另一個面上，向外法向量亦會轉過同樣的角度；但在截面上，兩條法向量都指向外面，所以它們之間的夾角是 $\pi - (\pi - \theta) = \theta$。（想像一個立方體：兩面成 $\frac{\pi}{2}$，法向量亦成 $\frac{\pi}{2}$；把棱錐壓扁，兩面的夾角趨向 π，而法向量的夾角則趨向 0。）因此

$$\cos\theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta,$$

此即所求。由於 $0 < \cos\alpha\cos\beta < 1$，$\theta$ 是銳角，這與兩個面相交成鈍角的情況一致。

第 (ii) 部分

從 V 所作垂線的垂足是 O，所以 BV 與底面之間的夾角是角 VBO，且

$$\cot\phi = \frac{OB}{h} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{h}.$$

因此

$$\cot^2\phi = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \cot^2\beta + \cot^2\alpha,$$

這裏用了 $\cot\beta = a/h$ 及 $\cot\alpha = b/h$。這就是第一個結果。

至於第二個結果，記 $p = \cos^2\alpha$，$q = \cos^2\beta$，則由第 (i) 部分得 $\cos^2\theta = pq$。於是

$$\cot^2\phi = \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} = \frac{p+q-2pq}{(1-p)(1-q)}.$$

由於 $\cos^2\phi = \dfrac{\cot^2\phi}{1+\cot^2\phi}$，我們需要

$$1+\cot^2\phi = \frac{(1-p)(1-q)+p+q-2pq}{(1-p)(1-q)} = \frac{1-pq}{(1-p)(1-q)},$$

兩者相除，得

$$\cos^2\phi = \frac{p+q-2pq}{1-pq} = \frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

（由於 $\cos\theta < 1$，分母為正。）

由於 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 均為正，根據算術—幾何平均不等式，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta \;\geq\; 2\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\theta,$$

又因 $1-\cos^2\theta > 0$，

$$\cos^2\phi \;\geq\; \frac{2\cos\theta-2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

想一想 這個下界怎樣告訴我們有關 ϕ 和 θ 的資訊？

把它化簡，再與 $\cos^2\theta$ 比較。約去正因子 $1-\cos\theta$，

$$\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

記 $c = \cos\theta \in (0,1)$，

$$\frac{2c}{1+c} - c^2 = \frac{c\,(2-c-c^2)}{1+c} = \frac{c\,(1-c)(2+c)}{1+c} > 0.$$

所以 $\cos^2\phi \geq \dfrac{2c}{1+c} > \cos^2\theta$。$\phi$ 和 θ 均位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內，而餘弦在此區間內為正且遞減，所以由 $\cos\phi > \cos\theta$ 得 $\phi < \theta$。

驗算

- 正方形底面，且 h 等於邊長的一半（$a = b = h$）：$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$，所以 $\cos\theta = \frac{1}{2}$，$\theta = 60°$。直接計算，$\cot\phi = \sqrt{2}$，所以 $\cot^2\phi = 2 = 1+1$，且 $\phi \approx 35.26° < 60°$。此外 $\cos^2\phi = \frac{2}{3}$，與 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2})/(1-\frac{1}{4}) = \frac{2}{3}$ 相符。
- 以電腦對 10^5 個隨機棱錐進行驗算，透過經 VB 的截面直接量度兩面之間的夾角，結果與 $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ 及 ϕ 的兩條公式均吻合，而且每次都得到 $\phi < \theta$。

常見錯誤

- 一個面取向內法向量，另一個面卻取向外法向量：這樣點積的正負號便會出錯，得出的是 $\cos(\pi - \theta)$。
- 沿棱 VA 而非沿斜高（slant height）VM 量度 α；兩個平面之間的夾角必須在與其交線垂直的方向上量度。
- 只推到 $\cos^2\phi \geq \dfrac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}$ 便停下，而沒有證明這個值大於 $\cos^2\theta$。

STEP 之外

兩個平面之間的夾角等於它們法向量之間的夾角（至多相差一個補角），這正是多變量微積分（multivariable calculus）和微分幾何（differential geometry）中用法向量描述曲面的起點。恆等式 $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ 其實亦是球面畢氏定理（spherical Pythagoras theorem）的變相形式：三條法向量 $\mathbf{k}$、$\mathbf{n}_1$、$\mathbf{n}_2$ 構成一個球面直角三角形。若想加深對點積和叉積（cross product）的體會，Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是個不錯的起點。

詳細解答

STEP III 2019，第 9 題

力學 • 移動半球上的質點

STEP III 2019，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

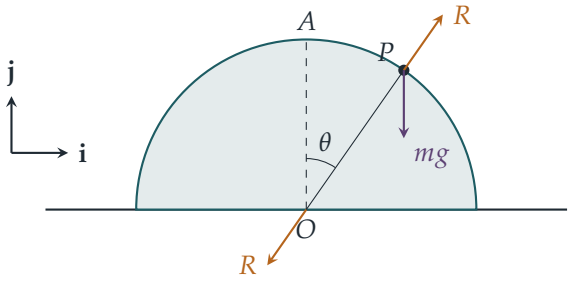
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

兩個接觸面都是光滑（smooth）的，所以作用於整個系統（質點加半球）的外力都沒有水平分量：水平動量守恆（conservation of horizontal momentum），這把半球的速率與質點的角速率聯繫起來。由於除重力外沒有其他力做功，能量亦守恆（conservation of energy），這兩條定律合起來便得出第 (ii) 部分。至於質點何時離開表面，最乾淨的判斷準則是法向反作用力（normal reaction）變為零；題目建議的向量經過特意挑選，使我們取分量時，未知的 $\ddot{\theta}$ 會消失。

解答

模型：P 是一個質點，半球是剛體（rigid body），所有接觸面都光滑。兩者接觸期間，P 與半球之間唯一的力是沿 OP 方向的法向反作用力 R，而桌面則對半球施加鉛垂方向的推力。



作用於半球的反作用力（為清晰起見畫在 O 處）與作用於 P 的反作用力大小相等、方向相反。

第 (i) 部分

在時間 t，球心 O 已移至 $-s\,\mathbf{i}$，而 P 與它的距離為 a，方向為 $\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}$。因此

$$\mathbf{r}=(a\sin\theta-s)\,\mathbf{i}+a\cos\theta\,\mathbf{j},$$

對 t 求導（對 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 使用連鎖法則（chain rule）），得

$$\dot{\mathbf{r}}=(a\dot\theta\cos\theta-\dot s)\,\mathbf{i}-a\dot\theta\sin\theta\,\mathbf{j},$$

得證。

作用於系統的外力是兩個重量和桌面的反作用力，全部都是鉛垂方向的，所以總水平動量一直保持其初始值，即零（我們假設微小的初始位移所帶來的速率可以忽略）。半球的速度是 $-\dot s\,\mathbf{i}$，所以

$$m(a\dot\theta\cos\theta-\dot s)-M\dot s=0\quad\Longrightarrow\quad \dot s=\frac{m}{m+M}\,a\dot\theta\cos\theta=(1-k)\,a\dot\theta\cos\theta,$$

因為 $1-k=\dfrac{m}{m+M}$。代入 $\dot{\mathbf{r}}$ 的 $\mathbf{i}$ 分量，

$$a\dot\theta\cos\theta-(1-k)a\dot\theta\cos\theta=k\,a\dot\theta\cos\theta,\qquad\text{所以}\qquad \dot{\mathbf{r}}=a\dot\theta\,(k\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j}).$$

第 (ii) 部分

各反作用力所做的淨功為零：桌面的反作用力與半球的運動方向垂直；而 P 與半球之間的一對力 $\pm R$ 所做的總功為零，因為 P 一直留在表面上（兩者的相對速度沿着表面，與 R 垂直）。所以動能加勢能守恆。P 已下降了 $a(1-\cos\theta)$，而起初所有物體（實際上）都是靜止的，所以

$$\tfrac12 ma^2\dot\theta^2\left(k^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\tfrac12 M\dot s^2=mga(1-\cos\theta).$$

利用第 (i) 部分，$M\dot s^2=M(1-k)^2a^2\dot\theta^2\cos^2\theta$。於是 $a^2\dot\theta^2\cos^2\theta$ 的總係數為

$$mk^2+M(1-k)^2=\frac{mM^2+Mm^2}{(m+M)^2}=\frac{mM}{m+M}=mk.$$

因此 $\tfrac12 ma^2\dot\theta^2\left(k\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=mga(1-\cos\theta)$，兩邊除以 $\tfrac12 ma$，

$$a\dot\theta^2\left(k\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=2g(1-\cos\theta).$$

第 (iii) 部分

設 $\mathbf{u}=\sin\theta\,\mathbf{i}+k\cos\theta\,\mathbf{j}$。對第 (i) 部分的最後結果求導，

$$\ddot{\mathbf{r}}=a\ddot\theta\,(k\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j})-a\dot\theta^2\,(k\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}).$$

第一個括號與 $\mathbf{u}$ 垂直，因為 $k\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\,k\cos\theta=0$。所以

$$\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{u}=-a\dot\theta^2\left(k\sin^2\theta+k\cos^2\theta\right)=-k\,a\dot\theta^2.$$

想一想 為甚麼這個向量特別有用？

它消去了我們一無所知的 $\ddot{\theta}$ 項，只剩下第 (ii) 部分已給出的 $\dot{\theta}^2$。現在與 P 的牛頓第二定律（Newton's second law）作比較：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\,\mathbf{j} + R(\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

取沿 $\mathbf{u}$ 的分量，並與上面的結果比較，

$$-mk\,a\dot{\theta}^2 = -mgk\cos\theta + R\left(\sin^2\theta + k\cos^2\theta\right),$$

所以

$$R\left(\sin^2\theta + k\cos^2\theta\right) = mk\left(g\cos\theta - a\dot{\theta}^2\right).$$

當 R 降至零時，質點便離開半球。由於 $k > 0$，在 $\theta = \alpha$ 時得

$$a\dot{\theta}^2 = g\cos\alpha.$$

三次方程。 設 $c = \cos\alpha$，並在 $\theta = \alpha$ 時使用第 (ii) 部分，配合 $\sin^2\alpha = 1 - c^2$：

$$gc\left(kc^2 + 1 - c^2\right) = 2g(1 - c) \quad\Longrightarrow\quad (1-k)\,c^3 - 3c + 2 = 0.$$

設 $f(x) = (1-k)x^3 - 3x + 2$，其中 $0 < 1 - k < 1$，因為 m 和 M 都是正數。

- 對於 $-1 \le x \le 1$，$f'(x) = 3\left((1-k)x^2 - 1\right) < 0$，所以 f 在該區間嚴格遞減（strictly decreasing），在 $[-1, 1]$ 內最多只有一個根。
- $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}(1-k) - 2 + 2 = \frac{8}{27}(1-k) > 0$，而 $f(1) = -k < 0$。

所以 $[-1, 1]$ 內唯一的根嚴格位於 $\frac{2}{3}$ 與 1 之間。由於 $\cos\alpha$ 必須位於 $[-1, 1]$ 內，它就是這個根，因此

$$\cos\alpha > \tfrac{2}{3}.$$

（這與 R 的公式一致：代入第 (ii) 部分可見 $g\cos\theta - a\dot{\theta}^2$ 與 $-f(\cos\theta)$ 同號，它在 $\theta = 0$ 時為正，並在這個根處首次變為零，所以 P 確實一直保持接觸，直至那一刻。）

驗算

- 若 $M \to \infty$，則 $k \to 1$，半球保持不動，三次方程變為 $-3c + 2 = 0$：即質點從固定球面滑落時大家熟悉的 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$。半球會移動，令質點較早離開，即在較大的 $\cos\alpha$ 處離開。
- 當兩者質量相等時，$1 - k = \frac{1}{2}$，三次方程 $c^3 - 6c + 4 = 0$ 可因式分解為 $(c-2)(c^2 + 2c - 2) = 0$，得 $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$，大於 $\frac{2}{3}$。

- 用電腦對完整運動作逐步數值模擬（numerical simulation），測試了多個質量比，過程中證實了第 (i) 和第 (ii) 部分的關係式，並發現當 $m = M$ 時反作用力在 $\cos\theta \approx 0.732$ 處變為零，與三次方程吻合。

常見錯誤

- 未經論證便使用固定球面的條件 $a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$：這裏半球有加速度，所以質點的加速度並不只是繞固定點的圓周運動。這條件在離開的一刻恰好成立，只是因為 $R = 0$ 意味着半球在那一刻沒有水平加速度。
- 在能量方程中漏掉半球的動能 $\frac{1}{2}M\dot{s}^2$。
- 只證明了有一個根位於 $\frac{2}{3}$ 與 1 之間，卻沒有排除 $[-1, 1]$ 內存在另一個根。

STEP 之外

這是一個具兩個自由度（degrees of freedom）的系統，拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）可以有系統地處理它：用 θ 和 s 寫出動能和勢能，由於 s 不出現在拉格朗日量（Lagrangian）中，水平動量守恆便自動出現（這是一個「可忽略」坐標（ignorable coordinate），由諾特（Noether）定理與一種對稱性聯繫起來）。像 R 這樣的約束力（constraint forces）則在之後才求出，正如我們在這裏所做的一樣。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是先建立牛頓力學直覺的好起點。

詳細解答

STEP III 2019，第 10 題

力學 • 斜碰撞

STEP III 2019，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

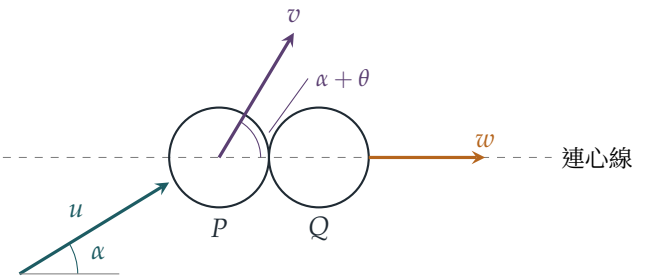
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

把每個速度分解為沿連心線（line of centres）的分量和垂直於連心線的分量。由於兩球都是光滑的，衝量（impulse）只沿連心線作用，所以 P 的垂直分量保持不變，而 Q 則沿該直線運動。動量守恆（conservation of momentum）和牛頓實驗定律（Newton's experimental law）在連心線方向上的應用，就跟一維碰撞完全一樣。餘下的只是三角學。

解答

把 P 和 Q 視為放在光滑水平桌面上、質量同為 m 的光滑球體。取碰撞瞬間的連心線為 x 方向，由 P 指向 Q；並設 y 方向在運動平面內與之垂直，指向 P 初速度所在的一側。



第 (i) 部分

碰撞前，P 沿連心線的分量為 $u\cos\alpha$，垂直於連心線的分量為 $u\sin\alpha$。

光滑球體之間的接觸力沿連心線作用。因此 P 在垂直於該直線的方向上不受衝量，P 的

垂直分量保持不變。此外，Q 起初靜止，而且只受沿連心線的衝量，所以它以速率 w 沿該直線運動。

想一想 為甚麼 P 的新方向與連心線所成的角是 $\alpha+\theta$，而不是 $\alpha-\theta$？

P 所受的衝量沿連心線指向後方。它把 P 的 x 分量由 $u\cos\alpha$ 減小至下面求得的 v_x，而不影響 y 分量。因此速度方向偏離連心線，與該直線所成的角由 α 增大至 $\alpha+\theta$。下面我們會證實當 $e<1$ 時 $v_x>0$，所以 $0<\alpha+\theta<\frac{\pi}{2}$。

碰撞後，P 沿連心線的分量為 $v\cos(\alpha+\theta)$，垂直於連心線的分量為 $v\sin(\alpha+\theta)$。令垂直分量相等，得

$$u\sin\alpha = v\sin(\alpha+\theta),$$

正如所求。

沿連心線方向，由動量守恆（兩者質量相等，所以可約去 m）得

$$u\cos\alpha = v\cos(\alpha+\theta)+w. \tag{1}$$

代入第一個結果中的 $u=v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$，

$$\begin{aligned} w &= \frac{v\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha} - v\cos(\alpha+\theta) \\ &= \frac{v\big[\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\theta)\sin\alpha\big]}{\sin\alpha} = \frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

這裏用了 $\sin\big((\alpha+\theta)-\alpha\big)$ 的展開式。所以

$$w=\frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}.$$

這個結果有一個漂亮的詮釋。向量形式的動量守恆給出 $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$，沿垂直於 $\mathbf{u}$ 的方向分解，便得 $0=v\sin\theta-w\sin\alpha$。

第 (ii) 部分

沿連心線應用牛頓實驗定律：分離速率等於接近速率的 e 倍：

$$w-v\cos(\alpha+\theta)=e\,u\cos\alpha. \tag{2}$$

代入第 (i) 部分的 $w=v\sin\theta/\sin\alpha$ 和 $u=v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$：

$$\frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}-v\cos(\alpha+\theta)=\frac{e\,v\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

兩邊乘以 $\sin\alpha/v$（因為 $v>0$ 且 $\sin\alpha\neq0$，所以可以這樣做），整理後得

$$\sin\theta=\cos(\theta+\alpha)\sin\alpha+e\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha,$$

正如所求。

要求 $\tan\theta$，先把兩個複角展開：

$$\sin\theta = (\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)\sin\alpha + e(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)\cos\alpha.$$

把含 $\sin\theta$ 的項移到左邊：

$$\sin\theta\left(1 + \sin^2\alpha - e\cos^2\alpha\right) = (1+e)\cos\theta\sin\alpha\cos\alpha.$$

兩邊除以 $\cos\theta\cos^2\alpha$，並記 $t = \tan\alpha$，利用 $1/\cos^2\alpha = 1 + t^2$：

$$\tan\theta\left(1 + t^2 + t^2 - e\right) = (1+e)\,t, \qquad \text{所以} \qquad \tan\theta = \frac{(1+e)\tan\alpha}{1 - e + 2\tan^2\alpha}.$$

由於 $e < 1$，分母為正，所以 $\tan\theta > 0$，而 θ 的確是一個銳角偏轉。

$\tan\theta$ 的最大值

當 α 取遍所有銳角時，$t = \tan\alpha$ 取遍 $(0, \infty)$ 中的每一個值。對於 $t > 0$，可以把分子和分母同除以 t：

$$\tan\theta = \frac{1+e}{\dfrac{1-e}{t} + 2t}.$$

? **想一想** 不用微積分，怎樣求這個式子的最大值？

盡量令分母最小。$(1-e)/t$ 和 $2t$ 都是正數，所以由算術－幾何平均不等式（AM–GM inequality），

$$\frac{1-e}{t} + 2t \geq 2\sqrt{\frac{1-e}{t}\cdot 2t} = 2\sqrt{2(1-e)},$$

等號成立當且僅當 $(1-e)/t = 2t$，即 $\tan\alpha = \sqrt{(1-e)/2}$。這是一個真正的銳角，所以最小值確實能夠達到。因此 $\tan\theta$ 的最大值為

$$\tan\theta_{\max} = \frac{1+e}{2\sqrt{2(1-e)}}.$$

（對 t 求導，會得到相同的駐點 $2t^2 = 1 - e$。）

驗算

- 接近彈性的極限 $e \to 1$：兩球交換沿連心線的分量，所以 P 只剩下 $u\sin\alpha$，並沿垂直於連心線的方向運動。於是 $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$，而 $\tan\theta = \cot\alpha$。公式給出 $\tan\theta = 2t/(2t^2) = 1/t$，兩者一致。最大值趨於無窮大，這是應有的結果，因為當 $\alpha \to 0$ 時 $\theta \to \frac{\pi}{2}$。

- 當 $e = \frac{1}{2}$ 時，最大值為 $\frac{3/2}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{4}$，在 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$（約 26.6°）時達到。以細小步長掃描 α，證實最大值為 0.75。用電腦模擬大量隨機碰撞，亦重現了題目中全部四個結果。
- α 很小（近乎正面碰撞）：$\tan\theta \approx \frac{1+e}{1-e}\alpha \to 0$，所以正面碰撞不會造成偏轉，與預期相符。

常見錯誤

- 把牛頓實驗定律應用於整個速率，而不是沿連心線的分量。恢復（restitution）只作用於衝量的方向。
- 把 P 的新角度寫成 $\alpha - \theta$。衝量減去了部分沿連心線的分量，所以 P 是轉離該直線的。
- 忘記正是 $e < 1$ 令 $1 - e + 2\tan^2\alpha$ 為正，也忘記 $\tan\alpha$ 取遍整個 $(0, \infty)$，因此算術－幾何平均不等式的等號情況確實能夠達到。

STEP 之外

光滑球體的斜碰（oblique collision）是散射（scattering）最簡單的例子。在這道題中，同樣兩條守恆定律分別沿一條直線及垂直於該直線應用，而這個想法可以推廣到粒子物理和氣體分子運動論（kinetic theory of gases）。對於等質量的彈性碰撞，結果就是著名的「碰撞後兩速度互相垂直」。在質心參考系（centre-of-mass frame）中，每次碰撞都只是把相對速度旋轉（在本題中還會把它縮短），這是理解上述所有結果的一個更簡潔的方法。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）正是從這個觀點討論碰撞的。

詳細解答

STEP III 2019，第 11 題

概率與統計 • 泊松稀疏化

> **STEP III 2019，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

關鍵思路

一切都建基於以到店顧客人數或取沙人數作條件（conditioning），然後對一個泊松（Poisson）級數求和。第 (i) 部分是經典的泊松分佈「稀疏化」（thinning）：把二項概率與泊松概率相乘之後，對那個看不見的總數求和，結果會收縮成一個指數函數。一旦知道取沙人數服從泊松分佈，第 (ii) 及 (iii) 部分便只需要求 $(1-k)^Y$ 的期望值（expectation），而那又是另一個指數級數。

解答

設 N 為一天內的顧客人數，故 $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$；設 Y 為取沙的人數。我們假設顧客之間的決定互相獨立（independent），並且與 N 獨立，因此在 $N = n$ 的條件下，有 $Y \sim \mathrm{B}(n, p)$。

第 (i) 部分

對 $y = 0, 1, 2, \ldots$，以 N 作條件（只有 $n \geq y$ 的項有貢獻）：

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y = y) &= \sum_{n=y}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^y}{y!} \sum_{n=y}^{\infty} \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{n-y}}{(n-y)!} \qquad \text{由於} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{n!}{y!\,(n-y)!} = \frac{\lambda^y \lambda^{n-y}}{y!\,(n-y)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^y}{y!} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \mathrm{e}^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^y}{y!},
\end{aligned}$$

其中我們令 $m = n - y$，並用了 $\sum_{m \geq 0} x^m / m! = \mathrm{e}^x$。這正是 $\mathrm{Po}(p\lambda)$ 的概率，所以 $Y \sim \mathrm{Po}(p\lambda)$，得證。

第 (ii) 部分

每位取沙的顧客都會留下原有沙量的 $1-k$ 比例。所以經過 Y 位取沙顧客後，剩下的質量是 $S(1-k)^Y$，而被取走的質量是

$$T = S\big(1-(1-k)^Y\big).$$

由第 (i) 部分，

$$\mathrm{E}\big[(1-k)^Y\big] = \sum_{y=0}^{\infty}(1-k)^y\,\mathrm{e}^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^y}{y!} = \mathrm{e}^{-p\lambda}\,\mathrm{e}^{p\lambda(1-k)} = \mathrm{e}^{-kp\lambda}.$$

因此，由期望值的線性性質（linearity of expectation），

$$\mathrm{E}(T) = S\big(1-\mathrm{E}[(1-k)^Y]\big) = \big(1-\mathrm{e}^{-kp\lambda}\big)S,$$

這正是所求的結果。

第 (iii) 部分

想一想 怎樣把「取走沙的 k 比例」轉化為關於某一粒特定沙粒的概率？

由於沙粒極多，而且沒有任何一粒被特別挑出，所以每當有人取走剩餘沙的 k 比例時，一粒仍在袋中的沙粒被取走的概率是 k，並且與之前發生的事獨立。（等價地說，金沙粒落在某一份沙中的機會，等於該份沙佔總質量的比例。）

設 G 為店員取得金沙粒這一事件。在 $Y=y$ 的條件下，金沙粒在全部 y 位顧客手下倖存的概率是 $(1-k)^y$，之後店員取得它的概率是 k。所以

$$\mathrm{P}(G \mid Y=y) = k(1-k)^y,$$

再利用第 (ii) 部分求得的期望值，

$$\mathrm{P}(G) = k\,\mathrm{E}\big[(1-k)^Y\big] = k\,\mathrm{e}^{-kp\lambda}.$$

這與第 (ii) 部分吻合：金沙粒在當天倖存的概率是 $\mathrm{e}^{-kp\lambda}$，恰好就是剩餘沙量的期望比例。

$k=0$ 的情況。此時 $\mathrm{P}(G)=0$。這是合理的：當 $k=0$ 時，沒有人（包括店員）會取走任何沙，所以金沙粒一直留在袋中。

$k\to 1$ 的極限。此時 $\mathrm{P}(G)\to \mathrm{e}^{-p\lambda}$，即 $\mathrm{P}(Y=0)$。當 k 接近 1 時，第一位取沙的顧客幾乎會把沙全部取走，金沙粒幾乎必然也在其中。店員基本上只有在沒有任何顧客取沙時才能得到金沙粒，而那時店員會取走（幾乎）整袋沙。

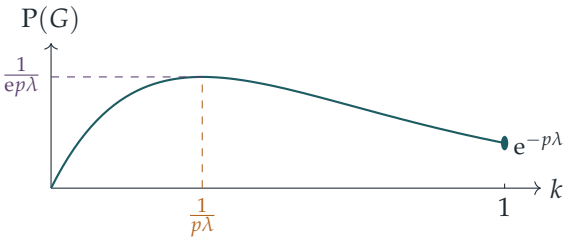
求最大值。記 $\mu = p\lambda$，並對 $0 \le k < 1$ 設 $f(k) = k\,\mathrm{e}^{-\mu k}$。則

$$f'(k) = \mathrm{e}^{-\mu k}(1 - \mu k),$$

它在 $k < 1/\mu$ 時為正，在 $k > 1/\mu$ 時為負。由於 $\mu > 1$，點 $k = 1/\mu$ 位於 $(0,1)$ 內，所以 f 在該點之前遞增、之後遞減，該點給出 $[0,1)$ 上的最大值。因此概率在

$$k = \frac{1}{p\lambda},$$

時取得最大值，而最大概率是 $\dfrac{1}{\mathrm{e}\,p\lambda}$。（若 $p\lambda \le 1$，則 f 在整個 $[0,1)$ 上遞增，沒有最大值，只有當 $k \to 1$ 時的上確界（supremum）$\mathrm{e}^{-p\lambda}$。這就是題目限定 $p\lambda > 1$ 的原因。）



上圖顯示 $p\lambda = 3$ 時的 $\mathrm{P}(G) = k\,\mathrm{e}^{-kp\lambda}$。

驗算

- 第 (i) 部分通過明顯的檢驗：$p = 1$ 時還原為 $\mathrm{Po}(\lambda)$，而 $p = 0$ 時必然有 $Y = 0$。
- 在第 (ii) 部分中，$k = 0$ 給出取走的沙量為零；而當 $\lambda \to \infty$ 時，取走質量的期望值趨向 S，理應如此。
- 取 $\lambda = 3$、$p = 0.6$、$k = 0.4$，公式給出 $\mathrm{P}(G) = 0.4\,\mathrm{e}^{-0.72} \approx 0.1947$。以電腦模擬 200 000 天，得到 0.1953。
- 取 $p\lambda = 3$，在細密網格上 $k\,\mathrm{e}^{-3k}$ 的最大值出現在 $k \approx 0.3333$，其值為 $0.1226 \approx 1/(3\mathrm{e})$。

常見錯誤

- 把取走的沙量寫成 kSY，彷彿每位顧客都取走原來沙量的 k 比例。其實每位顧客取走的是剩下沙量的一部分，所以各次取走的量構成一個等比數列（geometric sequence）。

- 把 $\mathrm{E}[(1-k)^Y]$ 算成 $(1-k)^{\mathrm{E}(Y)} = (1-k)^{p\lambda}$。非線性函數的期望值並不等於期望值的函數。
- 忘記檢查 $1/(p\lambda)$ 是否真的落在容許範圍 $0 \leq k < 1$ 內。條件 $p\lambda > 1$ 正是用在這裏。

STEP 之外

第 (i) 部分就是泊松分佈的稀疏化性質。第 (ii) 及 (iii) 部分中出現的期望值 $\mathrm{E}[s^Y] = \mathrm{e}^{\mu(s-1)}$，是 $\mathrm{Po}(\mu)$ 的概率母函數（probability generating function）在 $s = 1-k$ 處的值。利用母函數，稀疏化幾乎一行就能證明：若 $\mathrm{E}[s^N] = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}$，則 $\mathrm{E}[s^Y] = \mathrm{E}[(1-p+ps)^N] = \mathrm{e}^{\lambda p(s-1)}$。在泊松過程（Poisson process）的理論中，這就成為以下命題：對泊松過程的點作獨立標記，所得的仍然是泊松過程。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對母函數及這些概念有清晰的論述。

詳細解答

STEP III 2019，第 12 題

概率與統計 • 隨機子集

STEP III 2019，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 9.12 節隨機子集中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/random-subsets.html

關鍵思路

從 S 中均勻隨機（uniformly at random）地選取一個子集（subset），等同於逐一考慮整數 $1, 2, \ldots, n$，並為每個整數擲一枚公平硬幣，以決定它是否放入子集。一旦看清這一點，題中每個事件（event）都變成關於每個整數各自的陳述，各整數之間互相獨立（independent），而答案就是某個小概率的 n 次方。

解答

數算子集

對 n 個整數中的每一個決定它「在內」或「在外」，便完全確定了 S 的一個子集。每個整數有 2 種選擇，各自獨立地作出，而不同的選擇模式給出不同的子集。因此，連同 $\varnothing$（全部在外）和 S（全部在內）計算在內，子集的數目為

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n.$$

想一想 為甚麼可以把各整數視為獨立的擲硬幣？

設 A 在 T 上均勻分佈。2^n 種在內／在外模式各對應一個子集，所以每種模式的概率都是 $2^{-n} = (\frac{1}{2})^n$。這正是擲 n 枚獨立公平硬幣時得到某一特定模式的概率。因此事件「$1 \in A$」、「$2 \in A$」、…、「$n \in A$」互相獨立，各自的概率為 $\frac{1}{2}$。由於 $A_1, \ldots, A_m$ 彼此之

間亦是獨立選取的，所以全部 mn 個事件「$i \in A_k$」都互相獨立，各自的概率為 $\frac{1}{2}$。

第 (i) 部分

2^n 個子集中恰好有一半包含 1（把每個包含 1 的子集與移走 1 後的同一子集配對）。所以

$$\mathrm{P}(1 \in A_1) = \tfrac{1}{2}.$$

第 (ii) 部分

對整數 i，設 E_i 為「i 並非同時屬於 A_1 和 A_2」這一事件。那麼 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ 當且僅當每個 E_i 都發生。由獨立性，

$$\mathrm{P}(i \in A_1 \text{ 且} i \in A_2) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{P}(E_i) = \tfrac{3}{4}.$$

事件 E_i 只取決於整數 i 的硬幣，所以 $E_1, \ldots, E_n$ 互相獨立，並且

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 = \varnothing) = \mathrm{P}(E_1) \cdots \mathrm{P}(E_n) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^n,$$

此即所求。

同一論證適用於任意數目的集合。整數 i 屬於 $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ 的概率為 $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$，所以它不在該交集（intersection）中的概率為 $\frac{7}{8}$，從而

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing) = \left(\tfrac{7}{8}\right)^n.$$

一般而言，i 同時屬於全部 m 個集合的概率為 2^{-m}，所以

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m = \varnothing) = \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)^n.$$

第 (iii) 部分

現在 $A_1 \subseteq A_2$ 的意思是沒有任何整數屬於 A_1 而不屬於 A_2。對每個整數 i，(是否在 A_1？是否在 A_2？) 共有四種等可能的情況，其中只有「在 A_1、不在 A_2」一種是不容許的。所以每個整數以概率 $\frac{3}{4}$ 符合要求，且互相獨立，因此

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^n.$$

(這與第 (ii) 部分吻合：$A_1 \subseteq A_2$ 當且僅當 A_1 與 A_2 的補集（complement）不相交（disjoint），而均勻隨機子集的補集仍然是均勻隨機的。)

至於 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$，考慮某一整數 i 在 (A_1, A_2, A_3) 中的歸屬模式，以 1 表示「在內」，0 表示「在外」。鏈（chain）條件表示一旦 i 屬於某個 A_k，它就屬於其後所有集合，所以模式必須是以下其中之一：

$$000, \quad 001, \quad 011, \quad 111.$$

這是 8 種等可能模式中的 4 種，所以每個整數符合要求的概率為 $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，從而

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

對於由 m 個集合組成的鏈，容許的模式是一段 0 之後接一段 1：它由 1 開始出現的位置決定，這位置是 $1, 2, \ldots, m$ 之一，或者「從不出現」。這樣在 2^m 種模式中共有 $m+1$ 種容許模式，所以

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_m) = \left(\frac{m+1}{2^m}\right)^n.$$

驗算

- 當 $m=2$ 時，一般公式給出 $(1-\frac{1}{4})^n$ 和 $(\frac{3}{4})^n$；當 $m=3$ 時，給出 $(\frac{7}{8})^n$ 和 $(\frac{4}{8})^n$，與特殊情況吻合。當 $m=1$ 時，給出 $(\frac{1}{2})^n$（只有 $A_1=\varnothing$ 符合）和 1（單一集合必然是一條鏈），正如所料。
- 當 $n=1$ 時，所有情況都可以用手列出。例如在四種選擇中，只有 $A_1=A_2=\{1\}$ 的交集非空，得出 $\frac{3}{4}$。
- 用電腦列出所有集合選擇的驗算，確認了各公式在 n 和 m 較小時均成立。例如當 $n=3$ 時，$\mathrm{P}(A_1\cap A_2=\varnothing)=\frac{27}{64}$，而 $\mathrm{P}(A_1\subseteq A_2\subseteq A_3)=\frac{1}{8}$。

常見錯誤

- 以「A_1 的每個元素都必須在 A_2 中」為理由，答 $\mathrm{P}(A_1\subseteq A_2)$ 為 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$，卻沒有考慮到 A_1 本身的大小也是隨機的。
- 把鏈的模式數目算成 m 而非 $m+1$，漏掉了整數不屬於任何集合的那種模式。

STEP 之外

把隨機子集表示為一串獨立的擲硬幣結果（即它的*指示向量*（indicator vector））是組合學（combinatorics）中的標準工具，而這裏對鏈的計數正是*偏序集*（posets）及布爾格（Boolean lattice）理論的起點。同樣的想法只需很少額外功夫，便可得出鏈的期望（expected）數目，或隨機集合覆蓋 S 的概率。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）正是以這種精神發展獨立性及指示變量（indicator variables）的理論。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2019 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。