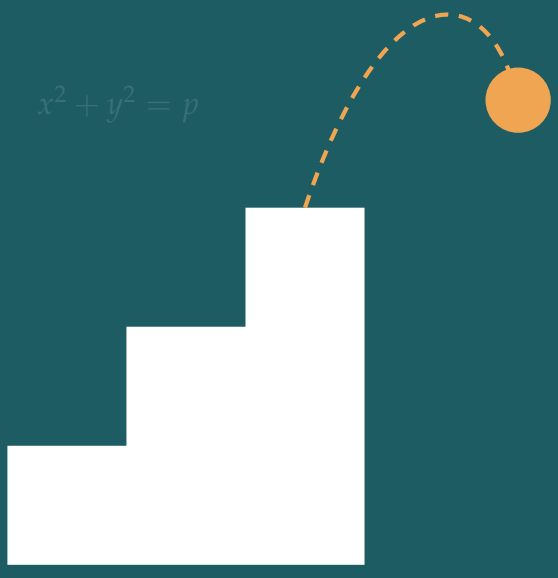
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

2018 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP I, II 及 III

2018 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2018 年詳細解答

2018 年 STEP 試卷（STEP I, II 及 III）全部 39 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP I

第 1 題 曲線之間的面積 純數學 . . . 3

第 2 題 對數不等式 純數學 . . . 7

第 3 題 角與雙曲線 純數學 . . . 10

第 4 題 曲線描繪與積分 純數學 . . . 14

第 5 題 多項式與因式定理 純數學 . . . 18

第 6 題 中點法則與梯形法則 純數學 . . . 22

第 7 題 解三次方程 純數學 . . . 26

第 8 題 耦合微分方程 純數學 . . . 30

第 9 題 斜面上的運動 力學 . . . 34

第 10 題 連接質點 力學 . . . 38

第 11 題 斜面上的摩擦力 力學 . . . 42

第 12 題 放回抽樣 概率與統計 . . . 46

第 13 題 項分佈與貝葉斯定理 概率與統計 . . . 50

STEP II

第 1 題 多項式的根 純數學 . . . 54

第 2 題 凹函數 純數學 . . . 59

第 3 題 旋轉對稱與積分 純數學 . . . 63

第 4 題 三角方程 純數學 . . . 67

第 5 題 級數的積分 純數學 . . . 71

第 6 題 階乘與質數 純數學 . . . 74

第 7 題 幾何中的向量 純數學 . . . 77

第 8 題 伯努利微分方程 純數學 . . . 80

第 9 題 重力作用下的碰撞 力學 . . . 84

第 10 題 懸掛長繩上的運動學 力學 88
第 11 題 摩擦力與力矩 力學 92
第 12 題 最優停止的期望值 概率與統計 96
第 13 題 遞推關係 概率與統計 100

STEP III

第 1 題 二次方程的根與不等式 純數學 103
第 2 題 埃爾米特多項式 純數學 107
第 3 題 歐拉微分方程 純數學 111
第 4 題 雙曲線的切線 純數學 115
第 5 題 算術幾何平均不等式 純數學 119
第 6 題 複數與幾何 純數學 122
第 7 題 棣美弗定理與級數 純數學 126
第 8 題 小數部分的積分 純數學 130
第 9 題 碰撞與遞推關係 力學 134
第 10 題 複擺 力學 138
第 11 題 懸弛繩與拋體 力學 142
第 12 題 順序統計量 概率與統計 146
第 13 題 泊松分佈 概率與統計 150

詳細解答

STEP I 2018，第 1 題

純數學 • 曲線之間的面積

> **STEP I 2018，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q1

關鍵思路

令三次曲線（cubic）與直線相等，會先得到因式 x，餘下的是一個平方差（difference of two squares），因此三個交點都能乾淨利落地求出。之後的一切都是常規的微積分運算，而代換（substitution）$c = b - a$（即 P 的 x 坐標）能令代數運算保持整潔。最後的不等式乍看令人生畏，但只要把兩個面積都以 c 表示，它便簡化為 $b > a$。

解答

交點與草圖

在交點處，$x(b-x)^2 = a^2x$，所以 $x = 0$（即原點），或

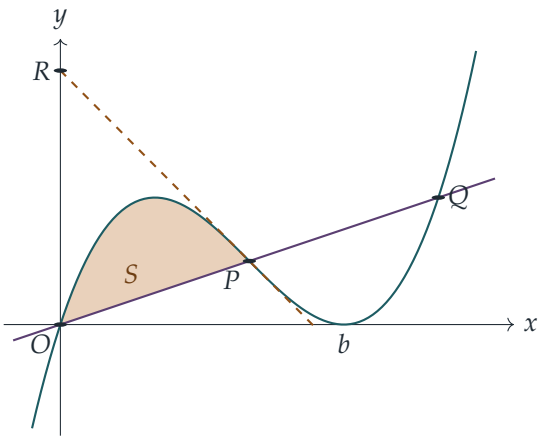
$$(b-x)^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad b - x = \pm a \quad \Longrightarrow \quad x = b - a \text{ 或 } x = b + a.$$

由於 $a > 0$，$b - a < b + a$，所以

$$P = (b-a,\ a^2(b-a)), \qquad Q = (b+a,\ a^2(b+a)).$$

因為 $0 < a < b$，兩點都位於第一象限（first quadrant）。

至於草圖：三次曲線 $y = x(b-x)^2$ 在 O 有一個單根，在 $x = b$ 有一個重根（repeated root），曲線在該處與 x 軸相切。當 $x < 0$ 時曲線為負，當 $x > 0$ 時曲線為正（$x = b$ 除外），而當 $x \to \infty$ 時曲線趨向 $+\infty$。其導數（見下文）為 $(b-x)(b-3x)$，所以曲線在 $x = b/3$ 有局部極大值（local maximum），在 $(b, 0)$ 有局部極小值（local minimum）。經過 O 的直線在 O 附近切過上升的一段，再在 P 相交（當 $a < \frac{2}{3}b$ 時 P 位於 $b/3$ 與 b 之間，否則位於 $b/3$ 之前），然後在切點 $x = b$ 之後的 Q 第三次與曲線相交。圖中取 $a = 1$、$b = 3$；圖中亦顯示了 P 處的切線、點 R 以及面積為 S 的區域。



P 處的切線

以乘積法則（product rule）求導，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (b-x)^2 - 2x(b-x) = (b-x)(b-3x).$$

在 P，$x = b-a$，所以 $b-x = a$，$b-3x = 3a-2b$。該處的斜率（gradient）為 $m = a(3a-2b)$。

切線（tangent）為 $y = mx+k$，其中 k 的取值須令直線經過 P：

$$\begin{aligned} k &= a^2(b-a) - a(3a-2b)(b-a) \\ &= a(b-a)(a-3a+2b) \\ &= 2a(b-a)^2. \end{aligned}$$

因此 P 處的切線為 $y = a(3a-2b)x + 2a(b-a)^2$，與所求相符。特別地，$R = (0,\, 2a(b-a)^2)$，位於 y 軸的正半軸上。

面積 S

記 $c = b-a > 0$ 為 P 的 x 坐標。在 $0 < x < c$ 上，

$$x(b-x)^2 - a^2x = x\,(b-x-a)(b-x+a) > 0,$$

因為三個因式在該區間上都是正數。所以在 O 與 P 之間曲線位於直線之上，而

$$S = \int_0^c (x(b-x)^2 - a^2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^c ((b^2-a^2)x - 2bx^2 + x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{(b^2-a^2)c^2}{2} - \frac{2bc^3}{3} + \frac{c^4}{4}.$$

現代入 $b^2-a^2=c(b+a)=c(c+2a)$ 及 $b=c+a$：

$$\begin{aligned}S&=\frac{c^3(c+2a)}{2}-\frac{2c^3(c+a)}{3}+\frac{c^4}{4}\\&=c^3\Big[c(\tfrac12-\tfrac23+\tfrac14)+a(1-\tfrac23)\Big]\\&=c^3\Big(\frac{c}{12}+\frac{a}{3}\Big)=\frac{c^3(c+4a)}{12}.\end{aligned}$$

由於 $c+4a=b+3a$，上式即為

$$S=\frac{1}{12}(b-a)^3(3a+b),$$

與所求相符。

> **想一想** 為何不直接把所有東西以 a 和 b 展開？

當然可以，但目標式含有因式 $(b-a)^3$，要從一條關於 a 和 b 的四次式中把它抽出來十分費勁。改寫為 $c=b-a$ 後，這個因式會自動出現，因為積分中的每一項本身已帶有 c^2 或更高次。

三角形 T 與不等式

以 OR 作為三角形 OPR 的底：它位於 y 軸上，長度為 $2ac^2$。垂直高度是 P 到 y 軸的距離，即 c。所以

$$T=\tfrac12\cdot 2ac^2\cdot c=ac^3=a(b-a)^3.$$

因此，由於 $(b-a)^3>0$，

$$S-\tfrac13 T=\frac{(b-a)^3}{12}(3a+b-4a)=\frac{(b-a)^4}{12}>0,$$

因為 $b\neq a$。故 $S>\frac13 T$，與所求相符。

驗算

- 取 $a=1$、$b=3$（即圖中情況）：$P=(2,2)$，$Q=(4,4)$，而曲線在 $x=2$ 時給出 $y=2$，在 $x=4$ 時給出 $y=4$。切線公式給出 $y=-3x+8$；斜率公式 $(3-x)(3-3x)$ 在 $x=2$ 時等於 -3。直接積分，$S=\int_0^2(x^3-6x^2+8x)\,\mathrm{d}x=4-16+16=4$，與 $\frac{1}{12}\cdot 8\cdot 6=4$ 吻合。此外 $T=8$，而 $4>\frac83$。
- 比值 $S/(\frac13 T)=(3a+b)/(4a)$ 在 $b\to a$ 時趨向 1，所以常數 $\frac13$ 已是最佳可能的。這是合理的：對於拋物線 $y=px-qx^2$，同樣的構造給出 $S=qc^3/6$ 及 $T=qc^3/2$，所以 $S=\frac13 T$ 恰好成立；而當 P 非常接近 O 時，兩者之間的三次曲線幾乎就是一條拋物線。

- 對數以千計隨機取得的 $0 < a < b$，以電腦檢驗交點、切線、面積（以數值積分計算）及不等式，結果均與公式一致。

常見錯誤

- 把 $x(b-x)^2 = a^2x$ 除以 x 而沒有記下根 $x = 0$，或只取 $b - x = a$ 而遺漏了 Q。
- 以直線減曲線來積分，得出負的「面積」：積分前先確認哪個圖像在上方。
- 畫草圖時把三次曲線畫成在 $x = b$ 穿過 x 軸，而不是在該處與 x 軸相切。

STEP 之外

最後一部分中比值的極限為 1，這與阿基米德（Archimedes）的拋物線求積（quadrature of the parabola）一脈相承：對於拋物線，弓形的面積恰好是三角形 OPR 面積的三分之一；而在 O 附近，三次曲線局部上就是一條拋物線，所以不等式在極限下收緊為等式。理解局部行為爲何由泰勒（Taylor）展開的頭幾項決定，並把「幾乎是一條拋物線」說得嚴謹，正是大學一年級分析學（analysis）的課題。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析學》）是一本親切易讀的書，可以看到泰勒定理（Taylor's theorem）的嚴謹處理。

詳細解答

STEP I 2018，第 2 題

純數學 • 對數不等式

> **STEP I 2018，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q2

關鍵思路

一切都建基於換底公式（change-of-base rule）：任何底數的對數（logarithm）都可以寫成同一底數下兩個對數之比，而且 $\frac{1}{\log_b c} = \log_c b$。只要把每個對數都改寫成以 ln 表示，每一部分就變成一小段涉及不等式（inequality）的代數運算。題目給出的事實，例如 $e^2 < 8$，其實只是 $\ln 2$ 和 $\ln 10$ 的界的另一種寫法。整個過程中，我們都會用到 ln 是遞增（increasing）函數這一事實，因此對兩個正數之間的不等式取對數，不等號的方向保持不變。

解答

開首的結果

根據對數的定義，$x = \log_b c$ 的意思是

$$c = b^x.$$

兩邊取以 a 為底的對數，並利用 $\log_a(b^x) = x \log_a b$，得

$$\log_a c = x \log_a b.$$

由於 $b \neq 1$（否則 $\log_b$ 沒有意義），所以 $\log_a b \neq 0$，可以相除：

$$\frac{\log_a c}{\log_a b} = x = \log_b c,$$

得證。下文會用到兩個推論。取 $a = c$ 得 $\log_b c = \dfrac{1}{\log_c b}$；取 $a = e$ 得 $\log_b c = \dfrac{\ln c}{\ln b}$。

第 (i) 部分

根據倒數（reciprocal）法則，$\dfrac{1}{\log_2 \pi} = \log_\pi 2$ 及 $\dfrac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 5$。所以

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10.$$

由於 $\pi > 1$，函數 $\log_\pi$ 是遞增的，而 $10 > \pi^2$，因此

$$\log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2,$$

這正是所求的不等式。

第 (ii) 部分

把第一個已知事實改寫成自然對數（natural logarithm）：

$$\log_2 \frac{\pi}{\mathrm{e}} = \frac{\ln \pi - 1}{\ln 2} > \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad \ln \pi > 1 + \frac{\ln 2}{5},$$

這裏我們乘以 $\ln 2 > 0$，所以不等號方向不變。

> **想一想** $\mathrm{e}^2 < 8$ 告訴我們甚麼？

它是 $\ln 2$ 的一個下界（lower bound）。兩邊取 ln（由於 ln 是遞增的，這樣做是容許的），得 $2 < \ln 8 = 3 \ln 2$，所以 $\ln 2 > \frac{2}{3}$。代入，得

$$\ln \pi > 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{15} = \frac{17}{15},$$

得證。

第 (iii) 部分

由 $\pi^2 < 10$，取對數得 $2 \ln \pi < \ln 10$。所以只需證明 $\ln 10 < \frac{30}{13}$。

把另外兩個事實改寫。由於 $\mathrm{e}^3 > 20$，我們有 $3 > \ln 20 = \ln 2 + \ln 10$，即

$$\ln 2 < 3 - \ln 10.$$

此外，$\log_{10} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 10} > \dfrac{3}{10}$，而由於 $\ln 10 > 0$，

$$\ln 10 < \frac{10}{3} \ln 2.$$

第一式是 $\ln 2$ 的一個上界（upper bound），而 $\ln 2$ 在第二式中的係數（coefficient）是正數，所以可以把它代入：

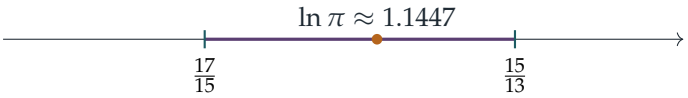
$$\ln 10 < \frac{10}{3} (3 - \ln 10) = 10 - \frac{10}{3} \ln 10.$$

合併 $\ln 10$ 的項，得 $\frac{13}{3}\ln 10 < 10$，所以 $\ln 10 < \frac{30}{13}$。因此

$$\ln \pi < \tfrac{1}{2}\ln 10 < \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{30}{13} = \frac{15}{13},$$

得證。

第 (ii) 和第 (iii) 部分合起來，把 $\ln \pi$ 困在一個狹窄的區間（interval）之內：



驗算

以數值計算，$\ln \pi \approx 1.1447$，確實介乎 $\frac{17}{15} \approx 1.1333$ 與 $\frac{15}{13} \approx 1.1538$ 之間。在第 (i) 部分，$\log_\pi 10 \approx 2.0115$，只是稍稍大於 2，這與 $\pi^2 \approx 9.87$ 非常接近 10 的情況吻合。與 $\ln 10 \approx 2.3026$ 比較，界 $\ln 10 < \frac{30}{13} \approx 2.3077$ 也是成立的。題目給出的事實也值得核實一下：$\log_2(\pi/\mathrm{e}) \approx 0.209$、$\mathrm{e}^2 \approx 7.39$、$\mathrm{e}^3 \approx 20.09$ 及 $\log_{10} 2 \approx 0.3010$。

常見錯誤

- 把 $\dfrac{1}{\log_2 \pi}$ 寫成 $\log_2 \frac{1}{\pi}$。取倒數是把底數和真數互換，而不是把真數取倒數。
- 在第 (iii) 部分，在需要 $\ln 2$ 的上界時錯用了下界。只有當每個界都指向同一方向時，才可以把不等式串連起來。
- 在不等式兩邊相乘或取對數之前，忘記說明 $\ln 2$、$\ln 10$ 和 $\log_\pi$ 的性質良好（為正數，或是遞增的）。

STEP 之外

從寥寥幾個粗略的事實推導出數值上的界，讓我們稍稍體會到分析學家如何估計常數：分析（analysis）的很大一部分，就是把一個未知的量困在兩個你能掌握的估計之間。$\ln 2$ 或 π 更精確的界來自級數（series）和積分不等式，例如用矩形來估計 $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是引導讀者進入這種思考方式的一本親切入門書。

詳細解答

STEP I 2018，第 3 題

純數學 • 角與雙曲線

> **STEP I 2018，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q3

關鍵思路

兩個角都可以透過正切（tangent）與 P 的坐標聯繫起來：RP 的斜率給出 $\tan\alpha$，SP 的斜率給出 $\tan\beta$。於是條件 $\beta = 2\alpha$ 就變成 tan 的二倍角恆等式（double-angle identity），消去分母後便得到該曲線。第 (ii) 部分則把同樣的代數步驟倒過來進行。難點在於：知道 $\tan\beta = \tan 2\alpha$ 只能確定 β 至相差 π 的整數倍，因此我們必須留意 2α 位於哪一個象限（quadrant）。

解答

設定兩個角

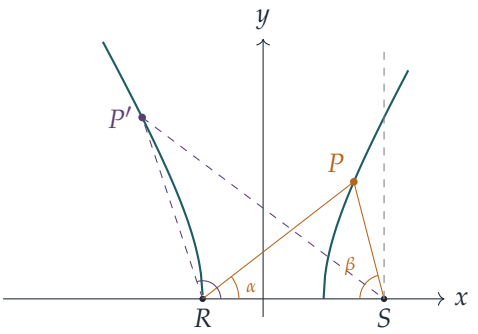
由於 $y > 0$，在 R 處的角 α 是由正 x 方向（沿 RS）轉到 RP 量度的，所以 $0 < \alpha < \pi$，而且

$$\tan\alpha = \frac{y}{x+a} \qquad (x \neq -a).$$

無論 P 在 R 的右方（α 為銳角，正切為正）還是左方（α 為鈍角，正切為負），此式都成立。在 S 處，角 β 是由負 x 方向（沿 SR）量度到 SP 的。因為 $x < 2a$，點 P 在 S 的左方，所以 β 為銳角，而且

$$\tan\beta = \frac{y}{2a-x} > 0, \qquad 0 < \beta < \tfrac{\pi}{2}.$$

當 $x \neq -a$ 時，記 $t = \tan\alpha$。



曲線 $y^2 = 3(x^2 - a^2)$ 在 $y > 0$、$x < 2a$ 的部分（圖中取 $a = 1$）由兩段組成：右支上 $a < x < 2a$ 的一段弧，以及整條左支的上半部分 $x < -a$。左支上的點 P' 會令 α 成為鈍角。

第 (i) 部分

設 $\beta = 2\alpha$。由於 $\beta < \frac{\pi}{2}$，我們有 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$，故 $x > -a$、$0 < t < 1$，而且在 $1 - t^2 \neq 0$ 的情況下可以使用二倍角公式：

$$\frac{y}{2a - x} = \tan 2\alpha = \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2y/(x + a)}{1 - y^2/(x + a)^2} = \frac{2y(x + a)}{(x + a)^2 - y^2}.$$

消去 y（因 $y > 0$，這是容許的），再交叉相乘：

$$\begin{aligned}(x + a)^2 - y^2 &= 2(x + a)(2a - x)\\ \iff \quad y^2 &= (x + a)\big[(x + a) - 2(2a - x)\big] = (x + a)(3x - 3a) = 3(x^2 - a^2).\end{aligned}$$

所以 P 位於 $y^2 = 3(x^2 - a^2)$ 上，得證。

第 (ii) 部分

現在設 P 位於該曲線上，且 $y > 0$、$x < 2a$。於是 $x^2 - a^2 = \frac{1}{3}y^2 > 0$，故 $|x| > a$：即 $a < x < 2a$ 或 $x < -a$。特別地，$x \neq -a$，所以 $t = \tan\alpha$ 有定義，而且 $t \neq 0$。

第 (i) 部分的步驟可以倒推。曲線方程等價於 $(x + a)^2 - y^2 = 2(x + a)(2a - x)$。兩邊除以 $(x + a)^2$，並利用 $2a - x = y/\tan\beta$，得

$$1 - t^2 = \frac{2(2a - x)}{x + a} = \frac{2y}{(x + a)\tan\beta} = \frac{2t}{\tan\beta}, \qquad \text{故} \qquad (1 - t^2)\tan\beta = 2t.$$

若 $t^2 = 1$，此式會給出 $t = 0$，這是不可能的；所以 $t^2 \neq 1$，而且

$$\tan\beta = \frac{2t}{1 - t^2} = \tan 2\alpha.$$

想一想 $\tan\beta = \tan 2\alpha$ 是否意味着 $\beta = 2\alpha$？

不一定：它只表示 β 與 2α 相差 π 的整數倍。我們利用已知的角的大小範圍，按曲線的兩段分情況討論。

情況 $a < x < 2a$。此時 $x + a > 0$，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，且 $0 < 2\alpha < \pi$。由於 $\tan 2\alpha = \tan\beta > 0$，$2\alpha$ 位於 $(0, \frac{\pi}{2})$，與 β 在同一區間。由於 tan 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是一一對應（one-to-one）的，

$$\beta = 2\alpha.$$

情況 $x < -a$。此時 $x + a < 0$，所以 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，且 $\pi < 2\alpha < 2\pi$。由於 $\tan 2\alpha > 0$，$2\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$，故 $2\alpha - \pi \in (0, \frac{\pi}{2})$，且 $\tan(2\alpha - \pi) = \tan 2\alpha = \tan\beta$。同前，tan 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是一一對應的，所以

$$\beta = 2\alpha - \pi.$$

因此可能的關係是 $\beta = 2\alpha$（當 P 在右支上）和 $\beta = 2\alpha - \pi$（當 P 在左支上）。兩者都會出現，因為每一段上的每一點都滿足所給條件。

驗算

- 取 $a = 1$ 及 $P = (-2, 3)$，由於 $3(4-1) = 9$，此點在曲線上。於是 $\tan\alpha = 3/(-1) = -3$，故 $\alpha \approx 108.43°$；又 $\tan\beta = \frac{3}{4}$，故 $\beta \approx 36.87°$。確實 $2\alpha - 180° \approx 36.87°$。
- 在右支上當 $x \to 2a$ 時，$y \to 3a$，所以 $\tan\alpha \to 1$ 而 $\tan\beta \to \infty$：$\alpha \to \frac{\pi}{4}$，$\beta \to \frac{\pi}{2} = 2\alpha$。
- 在左支上遠離原點時，P 趨近漸近線（asymptote）$y = -\sqrt{3}\,x$，所以 $\alpha \to \frac{2\pi}{3}$，$\beta \to \frac{\pi}{3} = 2\alpha - \pi$。

我們亦以電腦在每一支上的大量隨機點、並取隨機的 a，驗證了這兩個關係，結果一致。

常見錯誤

- 寫成 $\tan\alpha = y/|x + a|$，或假設 α 為銳角。在左支上 α 是鈍角，且 $\tan\alpha < 0$。
- 未檢查角的範圍，便由 $\tan\beta = \tan 2\alpha$ 斷定 $\beta = 2\alpha$。這樣會漏掉第二個關係。
- 忘記 $x < 2a$ 和 $y > 0$ 把曲線限制為兩段，以及需要 $|x| > a$ 來排除 $x = -a$。

STEP 之外

這條曲線是一條離心率（eccentricity）為 2、焦點（focus）為 S、準線（directrix）為 $x = \frac{a}{2}$ 的雙曲線（hyperbola）。第 (i) 部分的性質給出了利用雙曲線三等分角（trisect an angle）的經典方法（帕普斯（Pappus）已知曉），從而繞過了僅用尺規不能三等分角這一不可能性。這個不可能性的證明本身，是域論（field theory）入門課程的亮點之一。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）涵蓋了這部分內容，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）則是探討角與圓錐曲線幾何的絕佳讀物。

詳細解答

STEP I 2018，第 4 題

純數學 • 曲線描繪與積分

STEP I 2018，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s1-q4

關鍵思路

f 的每一部分都由 $\ln x$ 構成，而那個麻煩的因子 $\frac{1}{x}$ 正好是 $\ln x$ 的導數（derivative）。因此代換（substitution）$u = \ln x$ 可把積分變成一個關於 u 的簡單有理函數（rational function）的積分。以 u 表示時，把 x 換成 x^{-1} 只是改變 u 的正負號，所以對稱性（symmetry）歸結為答案是 u 的偶函數（even function）。

解答

全文設 $u = \ln x$。由於 $x \neq 1$，所以 $u \neq 0$；而且 $u > 0$ 當且僅當 $x > 1$。

f 與 f′ 的零點

設

$$g(u) = \frac{(1-u^2)^2}{u} = \frac{1}{u} - 2u + u^3, \qquad \text{從而} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{g(\ln x)}{x}.$$

當 $(\ln x)^2 = 1$ 時，因子 $(1-u^2)^2$ 為零，所以 $\mathrm{f}(x) = 0$。由商法則（quotient rule）及鏈式法則（chain rule），

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{g'(u)\cdot\frac{1}{x}\cdot x - g(u)}{x^2} = \frac{g'(u) - g(u)}{x^2}.$$

我們已知 $g(\pm 1) = 0$。此外，由於 $(1-u^2)^2 = (1-u)^2(1+u)^2$ 在 $u = \pm 1$ 處有重因子（repeated factor），它的導數 $-4u(1-u^2)$ 在該處亦為零，因此

$$g'(u) = \frac{-4u(1-u^2)\cdot u - (1-u^2)^2}{u^2} = 0 \quad \text{當} u = \pm 1.$$

所以每當 $(\ln x)^2 = 1$，即在 $x = e$ 及 $x = e^{-1}$ 處，亦有 $\mathrm{f}'(x) = 0$。

第 (i) 部分

代入 $u = \ln t$，則 $\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$。於是

$$\int \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1-u^2)^2}{u}\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right)\mathrm{d}u = \ln|u| - u^2 + \tfrac{1}{4}u^4 + C.$$

定義 $G(u) = \ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4$。F 的兩段定義都不會讓積分範圍跨過 $t = 1$，所以在每一段上 u 的正負號不變，這個原函數（antiderivative）在該處成立。

當 $x > 1$ 時，下限 $t = e$ 給出 $u = 1$，而 $G(1) = 0 - 1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$。當 $0 < x < 1$ 時，下限 $t = e^{-1}$ 給出 $u = -1$，同樣有 $G(-1) = -\frac{3}{4}$。因此兩種情況得出同一條公式：

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \ln|\ln x| - (\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} \qquad (x > 0,\ x \neq 1).}$$

現在 $\ln(x^{-1}) = -\ln x$。上式中每一處 $\ln x$ 都位於 $|\cdot|$ 之內或被提升至偶數次冪，所以

$$\mathrm{F}(x^{-1}) = \ln|-\ln x| - (-\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(-\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} = \mathrm{F}(x),$$

得證。（兩邊的常數 $\frac{3}{4}$ 之所以相同，只因為兩個下限 e 和 e^{-1} 本身就是一對倒數。）

第 (ii) 部分

> **想一想** F 在哪裏遞增？在 $x = 1$ 附近會發生甚麼事？

斜率（gradient）。$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$。因子 $(1-u^2)^2$ 永不為負，且 $x > 0$，所以 $\mathrm{f}(x)$ 與 $u = \ln x$ 同號。因此 F 在 $(0,1)$ 上遞減，在 $(1,\infty)$ 上遞增。它僅有的駐點（stationary point）位於 $x = e^{-1}$ 及 $x = e$，而按定義在這兩點 $\mathrm{F} = 0$。

這兩點並非轉向點（turning point）。在 $x = e$ 附近，兩側的斜率都是正的；在 $x = e^{-1}$ 附近，兩側的斜率都是負的。由於 $\mathrm{f}' = \mathrm{F}''$ 在該處亦為零，它們是駐定拐點（stationary point of inflection）。由此可知

$$\mathrm{F}(x) > 0 \text{ 當 } 0 < x < e^{-1} \text{ 及 } x > e, \qquad \mathrm{F}(x) < 0 \text{ 當 } e^{-1} < x < 1 \text{ 及 } 1 < x < e.$$

兩端的行為。

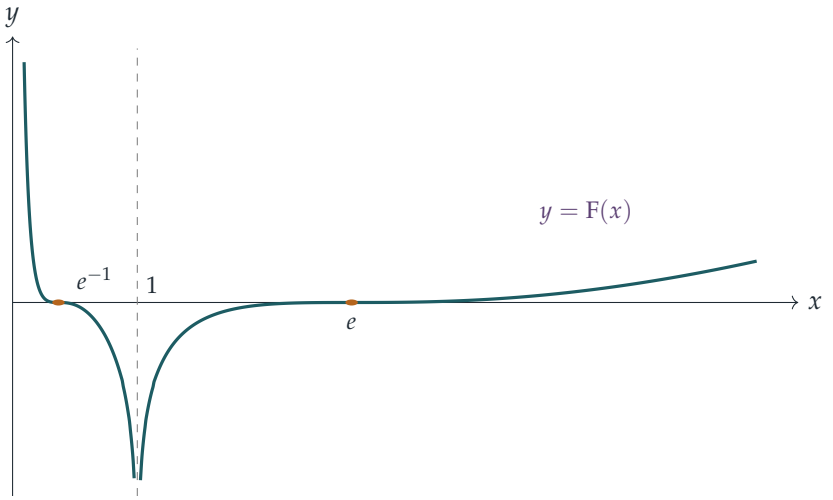
- 當 $x \to 1$ 時，$u \to 0$ 而 $\ln|u| \to -\infty$，其餘各項則趨向 $\frac{3}{4}$。所以從兩側都有 $\mathrm{F}(x) \to -\infty$，而 $x = 1$ 是一條垂直漸近線（vertical asymptote）。
- 當 $x \to \infty$ 時，$u \to \infty$，而 $\frac{1}{4}u^4$ 一項佔主導，所以 $\mathrm{F}(x) \to \infty$。不過增長非常緩慢：斜率 $\mathrm{f}(x) \approx u^3/x \to 0$。
- 當 $x \to 0^+$ 時，$u \to -\infty$，所以由對稱性，同樣有 $\mathrm{F}(x) \to \infty$。這裏的變化十分陡峭：斜率 $\mathrm{f}(x) \approx u^3/x \to -\infty$。曲線不與 y 軸相交。

凹性（concavity）（用於更仔細的草圖）。利用 $\mathrm{F}'' = \mathrm{f}' = (g' - g)/x^2$ 並化簡，

$$\mathrm{F}''(x) = -\frac{(u^2-1)(u^3-3u^2-u-1)}{u^2x^2}.$$

三次式 $u^3 - 3u^2 - u - 1$ 只有一個實根，位於 $u \approx 3.38$（它在 $u = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ 處的局部極大值為負）。對於所有較小的 u，它都是負的。所以曲線在 $(0, e^{-1})$ 上向上凹，在 $(e^{-1}, 1)$ 及 $(1, e)$ 上向下凹。從 e 開始曲線向上凹，直至在 $x \approx 29.5$ 處出現另一個拐點，之後向下凹。最後這個拐點遠在右方，草圖上不必畫出。

對稱性 $\mathrm{F}(x^{-1}) = \mathrm{F}(x)$ 表示在 x 處的高度與在 $1/x$ 處的高度相同。例如 $\mathrm{F}(2) = \mathrm{F}(\frac{1}{2}) \approx -0.04$ 及 $\mathrm{F}(5) = \mathrm{F}(\frac{1}{5}) \approx 0.31$。因此曲線在 $(1, \infty)$ 上的部分，就是 $(0, 1)$ 上的部分沿水平方向朝漸近線壓縮而成。



曲線在 y 軸附近從 $+\infty$ 陡峭地下降，然後逐漸平緩，在 $(e^{-1}, 0)$ 處的駐定拐點觸及 x 軸，接着急跌至漸近線 $x = 1$ 處的 $-\infty$。在右邊，曲線從 $-\infty$ 回升，在 $(e, 0)$ 處的第二個駐定拐點變得平坦，然後緩慢上升至 $+\infty$。

驗算

- 對方框內的公式求導：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right) = \mathrm{f}(x)$，而且公式在 $x = e$ 及 $x = e^{-1}$ 處的值都是 0。
- 數值上，$\int_e^5 \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$ 及 $\int_{1/e}^{1/5} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$，與公式及對稱性吻合。
- 正負號亦吻合：在 $(1, e)$ 上函數遞增至 0，所以在該處必為負，而事實上 $\mathrm{F}(2) \approx -0.039$。

常見錯誤

- 在 $0 < x < 1$ 時寫成 $\ln(\ln x)$，但此時 $\ln x < 0$。$\frac{1}{u}$ 的原函數是 $\ln|u|$，而正是這個絕對值令對稱性成立。
- 在 $x = e^{\pm 1}$ 處畫成轉向點。由於 f 含有平方因子，它在該處不變號，所以這些是駐定拐點。
- 遺漏 $x = 1$ 處的垂直漸近線，或把兩支曲線跨過漸近線連接起來。

STEP 之外

F 由積分定義，而微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）指出，在 f 連續的每個區間上都有 $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$。這正是兩段定義需要各自的基點的原因：f 在 $x = 1$ 處趨向無窮，所以無法用單一個積分跨越該點。對稱變換 $x \mapsto x^{-1}$ 在 $u = \ln x$ 之下變成 $u \mapsto -u$，這是把乘法對稱轉化為加法對稱的一個小例子，而這個想法貫穿整個分析學。如欲仔細了解微積分基本定理及瑕積分（improper integral），可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP I 2018，第 5 題

純數學 • 多項式與因式定理

> **STEP I 2018，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q5

關鍵思路

「在這些點取值 1」其實是一個關於根（root）的陳述：若 $P(k)=1$，則 k 是 $P(x)-1$ 的根，所以 $x-k$ 是它的因式（factor）。只要減去那個共同的值再因式分解（factorise），題目每一部分都會變得容易。在第 (iii) 部分，因式分解把關於 S 的問題，轉化為「把一個小數寫成四個相異整數之積」的問題，而真正起決定作用的正是「相異」這個條件。

解答

第 (i) 部分

根據餘式定理（remainder theorem），$P(x)$ 除以 $x-k$ 的餘數是 $P(k)$。所以我們需要 $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=1$，即 $1,2,3,4$ 是 $P(x)-1$ 的根。由於 $P(x)-1$ 的次數（degree）最多為 4，而且有這四個相異的根，它必定是 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的常數倍。因此最一般的這類多項式是

$$P(x)=1+k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4), \qquad k\neq 0,$$

其中需要 $k\neq 0$，次數才會恰好是 4。

第 (ii) 部分

與第 (i) 部分完全一樣，$1,2,\ldots,N$ 是 $P(x)-1$ 的 N 個相異根，而它的次數為 N（因為 $N\geq 1$，減去 1 不會改變次數）。所以

$$P(x)-1=k(x-1)(x-2)\cdots(x-N)$$

其中 k 為某常數；又因為 P 的次數為 $N \geq 1$，所以 $k \neq 0$。於是

$$P(N+1) - 1 = k \cdot N(N-1) \cdots 1 = k\,N! \neq 0,$$

因為 k 和 $N!$ 都不為零。所以 $P(N+1) \neq 1$。

若 $P(N+1) = 2$，則 $k\,N! = 1$，所以 $k = \frac{1}{N!}$。對正整數 r，

$$\begin{aligned} P(N+r) &= 1 + \frac{(N+r-1)(N+r-2)\cdots r}{N!} \\ &= 1 + \frac{(N+r-1)!}{(r-1)!\,N!} = 1 + \binom{N+r-1}{N}. \end{aligned}$$

（這個乘積共有 N 個因子，由 $N+r-1$ 遞減至 r。）

現在我們希望對每個 N 都有 $1 + \binom{N+r-1}{N} = N + r$。試試較小的 r。取 $r = 1$，得 $P(N+1) = 2$，它只在 $N = 1$ 時才等於 $N + 1$。取 $r = 2$，

$$P(N+2) = 1 + \binom{N+1}{N} = 1 + (N+1) = N + 2,$$

所以無論 N 是多少，$r = 2$ 都成立。

第 (iii) 部分

四個相異整數 a, b, c, d 是 $S(x) - 2001$ 的根，而它的次數為 4，首項係數（leading coefficient）為 1。所以

$$S(x) = 2001 + (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

(a) 假設對某整數 e 有 $S(e) = 2018$。那麼

$$(e-a)(e-b)(e-c)(e-d) = 17.$$

這四個因子都是整數，而且由於 a, b, c, d 互不相同，它們也互不相同。它們都不是 0，因為乘積不為零。

想一想 四個相異整數為甚麼乘不出一個質數？

在相異的非零整數之中，絕對值為 1 的最多只有兩個（即 1 和 -1）。所以四個因子中至少有兩個的絕對值不少於 2，而這兩個因子之積的絕對值不少於 4。但這個積整除（divides）17，所以它必須是 ± 17；由於 17 是質數（prime），它不能寫成兩個絕對值都不少於 2 的整數之積。這個矛盾說明不存在整數 e 使 $S(e) = 2018$。

(b) 現在 $S(0) = 2001 + (-a)(-b)(-c)(-d) = 2001 + abcd$，所以 $S(0) = 2017$ 當且僅當

$$abcd = 16.$$

反過來，任何四個乘積為 $abcd = 16$ 的相異整數都給出一個合乎要求的 S（上面的式子是首一（monic）且係數為整數），所以我們要數的是由四個相異整數組成、乘積為 16 的集合 $\{a, b, c, d\}$ 有多少個；每個集合都恰好只有一種方式按遞增次序排列。

a, b, c, d 每一個都整除 16，所以其絕對值是 $1, 2, 4, 8, 16$ 之一，而四個絕對值之積為 16。由於這些整數互不相同，每個絕對值最多出現兩次（作為 $\pm m$）。把絕對值寫成冪 2^p，四個指數之和為 4，且每個指數最多用兩次，可能的情況是

$$\{1, 1, 2, 8\}, \qquad \{1, 1, 4, 4\}, \qquad \{1, 2, 2, 4\}.$$

（若用上 16，其餘三個便必須是 1、1、1，這是不容許的；而 $\{2, 2, 2, 2\}$ 把 2 用了四次。）現在選取正負號，使乘積為 $+16$：

- $\{1, 1, 2, 8\}$：那一對是 $1, -1$，貢獻 -1，所以 2、8 之中恰好有一個是負數。這給出 $\{-2, -1, 1, 8\}$ 和 $\{-8, -1, 1, 2\}$。
- $\{1, 1, 4, 4\}$：兩對都是 $\pm$，而 $(1)(-1)(4)(-4) = 16$。這給出 $\{-4, -1, 1, 4\}$。
- $\{1, 2, 2, 4\}$：那一對 $2, -2$ 貢獻 -4，所以 1、4 之中恰好有一個是負數。這給出 $\{-4, -2, 1, 2\}$ 和 $\{-2, -1, 2, 4\}$。

所以選取 $a < b < c < d$ 共有 **5** 種方法。

驗算

- 在第 (ii) 部分取 $N = 1$，則 $P(x) = x$，所以 $P(N + r) = 1 + r$ 與 $1 + \binom{r}{1}$ 相符，而且 $P(3) = 3$。取 $N = 2$，則 $P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$ 給出 $P(4) = 4$，與 $r = 2$ 的結論一致。
- 對於 (iii)(b)，把五個集合逐一乘出來：例如 $(-2)(-1)(2)(4) = 16$。用電腦搜尋 $[-16, 16]$ 內所有由相異整數組成的四元組，找到的正是這五個。
- 對於 (iii)(a)，留意 $2018 - 2001 = 17$ 是質數；若把 2001 換成另一個值，使差變成像 $4 = (-2)(-1)(1)(2)$ 這樣的數，這樣的 e 便可能存在，所以質數性確實是關鍵。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分忘記 $k \neq 0$，或只寫 $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 1$，而這並不是最一般的多項式。

- 在第 (iii)(b) 部分只數正因數，或忘記 1 和 -1 可以同時使用。
- 寫成 $S(0) = 2001 - abcd$：其實共有四個負號，所以乘積是 $+abcd$。

STEP 之外

「一個 N 次多項式由它在 $N+1$ 個點上的值所決定」這個想法，是拉格朗日（Lagrange）插值（Lagrange interpolation）和有限差分（finite differences）的基礎；第 (ii) 部分其實就是換了個樣子的多項式 $1 + \binom{x-1}{N}$。第 (iii) 部分是數論（number theory）中一個標準工具的小例子：若 P 的係數都是整數，則 $m - n$ 整除 $P(m) - P(n)$，這大大限制了多項式在整數上能取的值。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是進一步閱讀這類整除論證的好起點。

詳細解答

STEP I 2018，第 6 題

純數學 • 中點法則與梯形法則

STEP I 2018，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s1-q6

關鍵思路

兩個近似值都是等距角的正弦之和，而題目給出的積化和差恆等式（product-to-sum identity）只要乘上一個選得恰當的 $2\sin\theta$，就能令這類和式裂項相消（telescope）。中點法則（midpoint rule）在 $\frac{\pi}{2n}$ 的奇數倍處取樣，梯形法則（trapezium rule）則在偶數倍處取樣，所以取 $\theta = \frac{\pi}{2n}$ 後，每一部分都變成裂項相消的和式。一旦求得 A_n 和 B_n 的閉式（closed form），第 (iii) 部分就只是半角公式（half-angle formulae）的運用。

解答

預備恆等式

在恆等式中取 $P = \theta$ 及 $Q = (2k-1)\theta$：

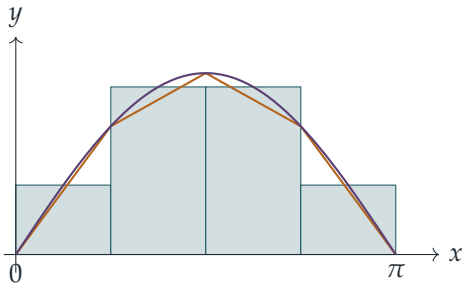
$$2\sin\theta\,\sin(2k-1)\theta = \cos(2k-2)\theta - \cos 2k\theta.$$

由 $k = 1$ 加到 $k = n$，每一項中減去的 $\cos 2k\theta$ 都在下一項中加回，因此和式裂項相消：

$$\begin{aligned} 2\sin\theta\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\theta &= (\cos 0 - \cos 2\theta) + (\cos 2\theta - \cos 4\theta) + \cdots \\ &\quad + \big(\cos(2n-2)\theta - \cos 2n\theta\big) \\ &= 1 - \cos 2n\theta, \end{aligned}$$

得證。

以下各部分中，記條寬為 $h = \frac{\pi}{n}$，並記 $\theta = \frac{\pi}{2n} = \frac{h}{2}$。



當 $n = 4$ 時：由於 $\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上是凹函數（concave），中點矩形（陰影部分）高估了面積，而梯形的弦（粗線）則低估了面積。

第 (i) 部分

第 k 條由 $(k-1)h$ 延伸至 kh，所以其中點位於 $x = (k - \frac{1}{2})h = (2k-1)\theta$，高度為 $\sin(2k-1)\theta$。因此

$$A_n = h \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\theta.$$

乘以 $2\sin\theta$ 並利用恆等式，再加上 $2n\theta = \pi$，得

$$2\sin\theta\, A_n = h\,(1 - \cos\pi) = 2h.$$

兩邊除以 2，得 $A_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}$，得證。

第 (ii) 部分

縱坐標（ordinates）位於 $x = kh = 2k\theta$，其中 $k = 0, 1, \ldots, n$，而兩端的縱坐標為 $\sin 0 = \sin\pi = 0$。所以梯形法則給出

$$B_n = \frac{h}{2}\left(\sin 0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta + \sin\pi\right) = h\sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta.$$

現在這些是 θ 的偶數倍，所以我們再用一次恆等式，這次取 $P = \theta$、$Q = 2k\theta$：

$$2\sin\theta\, \sin 2k\theta = \cos(2k-1)\theta - \cos(2k+1)\theta.$$

由 $k = 1$ 加到 $n-1$，同樣裂項相消：

$$2\sin\theta \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta = \cos\theta - \cos(2n-1)\theta.$$

? **想一想** 怎樣化簡 $\cos(2n-1)\theta$？

由於 $2n\theta = \pi$，我們有 $(2n-1)\theta = \pi - \theta$，而 $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$。所以右方等於 $2\cos\theta$，從而

$$2\sin\theta\, B_n = 2h\cos\theta, \qquad \text{即} \qquad B_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

（當 $n=1$ 時和式為空，$B_1 = 0$；由於 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$，公式依然成立。）

第 (iii) 部分

由於 $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$，$\sin\theta \neq 0$，所以由第 (i) 及 (ii) 部分得

$$A_n = \frac{h}{\sin\theta}, \qquad B_n = \frac{h\cos\theta}{\sin\theta}.$$

把 n 換成 $2n$，h 和 θ 都減半：

$$A_{2n} = \frac{h/2}{\sin(\theta/2)}, \qquad B_{2n} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

第一個結果利用 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ 及 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$：

$$\tfrac{1}{2}(A_n + B_n) = \frac{h}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{h}{2}\cdot\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = B_{2n}.$$

第二個結果利用同一條 $\sin\theta$ 的二倍角公式（double-angle formula）（以及 $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$）：

$$A_n B_{2n} = \frac{h}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\cdot\frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{h^2}{4\sin^2(\theta/2)} = \left(\frac{h/2}{\sin(\theta/2)}\right)^2 = A_{2n}^2.$$

兩個結果均已證明。

驗算

- $n=1$：一個寬 π、高 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ 的中點矩形給出 $A_1 = \pi$，與 $\pi/\sin\frac{\pi}{2}$ 相符；而如前所述 $B_1 = 0$。
- $n=2$：$A_2 = \frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.2214$，$B_2 = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$；於是 $\frac{1}{2}(A_1 + B_1) = \frac{\pi}{2} = B_2$，且 $A_1 B_2 = \frac{\pi^2}{2} = A_2^2$。
- $n=10$：直接求和得 $A_{10} \approx 2.00825$ 及 $B_{10} \approx 1.98352$，分別位於真實面積 2 的兩側。當 $n\to\infty$ 時，$\frac{\pi}{n}\big/\sin\frac{\pi}{2n} \to 2$ 且 $\cos\frac{\pi}{2n} \to 1$，所以兩者都趨向 2，正合預期。四個結果亦已用電腦就 200 以內的每個 n 逐一驗證。

常見錯誤

- 把中點放在 kh 而不是 $(k-\frac{1}{2})h$，這樣中點法則就變成了在梯形法則節點上的求和。

- 忘記梯形法則中兩端的縱坐標要減半。這裏兩端縱坐標為零，所以 B_n 恰好是 h 乘以內部縱坐標之和。
- 沒有化簡 $\cos(2n-1)\theta$，而不懂利用 $(2n-1)\theta = \pi - \theta$。

STEP 之外

第 (iii) 部分表明 B_{2n} 是 A_n 與 B_n 的算術平均數（arithmetic mean），而 A_{2n} 是 A_n 與 B_{2n} 的幾何平均數（geometric mean）。取倒數後，這就變成先取調和平均數（harmonic mean）、再取幾何平均數的模式，正是阿基米德（Archimedes）用圓的外切及內接多邊形夾逼 π 的方法，而這種迭代稱為 Borchardt 算法（Borchardt's algorithm）。更一般地，比較中點法則與梯形法則的誤差（中點法則的誤差約為梯形法則誤差的一半，且符號相反），便引出辛普森法則（Simpson's rule）和理察森外推法（Richardson extrapolation），兩者都是數值分析（numerical analysis）的核心概念。關於這些法則背後的誤差分析，可參閱 Bartle 與 Sherbert 所著 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）中有關黎曼積分（Riemann integral）的章節。

詳細解答

STEP I 2018，第 7 題

純數學 • 解三次方程

STEP I 2018，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s1-q7

關鍵思路

這個代換（substitution）是一個默比烏斯變換（Möbius transformation），經過精心選取，使得去分母之後 z^2 項和 z 項互相抵消，只剩下 z^3 和常數項。形如 $az^3+b=0$ 的三次方程（cubic equation）很容易解，所以整個任務就是把一般的既約三次方程（reduced cubic）$x^3-3cx+d=0$ 化成這個特殊形式。要做到這一點，就要由兩個數的和與積求出這兩個數，這歸結為一個二次方程（quadratic equation）；而條件 $d^2>4c^3$ 正是來自這個二次方程有相異實根（distinct real roots）的條件。

解答

第 (i) 部分

設 $x=\dfrac{pz+q}{z+1}$，並把方程兩邊乘以 $(z+1)^3$：

$$(pz+q)^3-3pq(pz+q)(z+1)^2+pq(p+q)(z+1)^3=0.$$

我們需要用到 $(pz+q)(z+1)^2=pz^3+(2p+q)z^2+(p+2q)z+q$。現在按 z 的冪次合併同類項。

$$\begin{aligned}
z^3:&\quad p^3-3p^2q+p^2q+pq^2=p(p^2-2pq+q^2)=p(p-q)^2,\\
z^2:&\quad 3p^2q-3pq(2p+q)+3pq(p+q)=3p^2q-6p^2q-3pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^1:&\quad 3pq^2-3pq(p+2q)+3pq(p+q)=3pq^2-3p^2q-6pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^0:&\quad q^3-3pq^2+p^2q+pq^2=q(q^2-2pq+p^2)=q(p-q)^2.
\end{aligned}$$

因此方程化為 $az^3+b=0$，其中

$$a=p(p-q)^2, \qquad b=q(p-q)^2.$$

由於 $p\neq q$，我們可以除以 $(p-q)^2$，得到更簡單的形式 $pz^3+q=0$。

對於每個 $x\neq p$，這個代換都可以反解為 $z=\dfrac{x-q}{p-x}$；而 $x=p$ 只有在 $p(p-q)^2=0$ 時才是該三次方程的根。此外，$z=-1$ 永遠不是 $pz^3+q=0$ 的解，因為那需要 $p=q$。所以三次方程的根與 $pz^3+q=0$ 的根恰好一一對應（當 $p=0$ 時，三次方程就是 $x^3=0$）。

第 (ii) 部分

比較 $x^3-3cx+d$ 與 $x^3-3pqx+pq(p+q)$，我們需要

$$pq=c, \qquad pq(p+q)=d, \qquad \text{即} \qquad pq=c, \quad p+q=\frac{d}{c},$$

由於 $c\neq 0$，除以 c 是容許的。和為 $\frac{d}{c}$、積為 c 的兩個數，就是

$$t^2-\frac{d}{c}t+c=0.$$

的兩個根。這個二次方程有相異實根，當且僅當其判別式（discriminant）為正：

$$\frac{d^2}{c^2}-4c>0 \iff d^2>4c^3,$$

這裡乘以了 $c^2>0$。所以當 $d^2>4c^3$ 時，取 p 和 q 為這個二次方程的兩個根，就能把方程寫成所需的形式，而且 p、q 是相異的實數。

第 (iii) 部分

這裡 $c=-2$ 而 $d=-2$，所以 $d^2=4>-32=4c^3$，第 (ii) 部分適用。我們需要 $p+q=\frac{d}{c}=1$ 及 $pq=c=-2$，所以 p、q 是 $t^2-t-2=(t-2)(t+1)=0$ 的根。取 $p=2$、$q=-1$。由第 (i) 部分，方程變為

$$2z^3-1=0, \qquad z^3=\tfrac{1}{2},$$

它唯一的實根是 $z=2^{-1/3}$。記 $u=2^{1/3}$，則 $z=\frac{1}{u}$。於是

$$x=\frac{2z-1}{z+1}=\frac{2-u}{1+u}.$$

想一想 分母含有立方根，這個式子能否再化簡？

可以。利用 $1+u^3=(1+u)(1-u+u^2)$ 進行有理化（rationalise），由於 $u^3=2$，這個式子等於 3：

$$x=\frac{(2-u)(1-u+u^2)}{3}=\frac{2-3u+3u^2-u^3}{3}=\frac{3u^2-3u}{3}=u^2-u.$$

所以實根是

$$x = 2^{2/3} - 2^{1/3} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}.$$

這是唯一的實根：$x^3 + 6x - 2$ 的導數（derivative）是 $3x^2 + 6 > 0$，所以它嚴格遞增。z 的另外兩個值是複數，給出兩個複根。（若改為取 $p = -1$、$q = 2$，則得到 $z^3 = 2$，結果是同一個根。）

第 (iv) 部分

由於 $x = p$ 給出 $p^3 - 3p^3 + 2p^3 = 0$，所以 $x - p$ 是一個因式（factor），而

$$x^3 - 3p^2x + 2p^3 = (x-p)(x^2 + px - 2p^2) = (x-p)^2(x+2p).$$

所以根是 $x = p$（重根）和 $x = -2p$。

留意這正是第 (i) 部分中 $q = p$ 的形式，也恰好是第 (ii) 部分排除了的情況。現在設 $d^2 = 4c^3$，且 $c, d \neq 0$。那麼 $c^3 = \frac{1}{4}d^2 > 0$，所以 $c > 0$。我們要找 p 使得 $p^2 = c$ 及 $2p^3 = d$。把第二式除以第一式，啟發我們取

$$p = \frac{d}{2c},$$

而這確實可行：$p^2 = \dfrac{d^2}{4c^2} = \dfrac{4c^3}{4c^2} = c$，於是 $2p^3 = 2p \cdot p^2 = 2 \cdot \dfrac{d}{2c} \cdot c = d$。所以 $x^3 - 3cx + d = x^3 - 3p^2x + 2p^3$，其根為

$$x = \frac{d}{2c}\text{（二重）} \qquad \text{及} \qquad x = -\frac{d}{c}.$$

驗算

- 第 (iii) 部分：$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \approx 0.32748$，而 $x^3 + 6x - 2$ 在這個值的取值準確到小數點後十五位都是 0。卡爾達諾公式（Cardano's formula）給出同一個根：$\sqrt[3]{1+3} + \sqrt[3]{1-3}$。
- 第 (iv) 部分：取 $c = 1$、$d = 2$，三次方程為 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$，與二重根 $\frac{d}{2c} = 1$ 及單根 $-\frac{d}{c} = -2$ 吻合。
- 第 (i) 部分：取 $p = 1$、$q = 0$，三次方程為 $x^3 = 0$，代換給出 $x = \frac{z}{z+1}$，所以 $x^3(z+1)^3 = z^3$，與 $a = 1$、$b = 0$ 吻合。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分忘記 c 可能是負數：不等式乘以 c^2 是安全的，但乘以 c 就不是。
- 在第 (iii) 部分把 $\frac{1}{2}$ 的三個立方根全部當作實根。只有 $z = 2^{-1/3}$ 是實數。

- 在第 (iv) 部分取 $p = \sqrt{c}$。當 $d < 0$ 時符號就錯了；$p = \frac{d}{2c}$ 則會自動給出正確的符號。

STEP 之外

這是推導三次方程卡爾達諾公式的一條巧妙途徑。二次方程 $t^2 - \frac{d}{c}t + c = 0$ 扮演了「預解式」(resolvent) 的角色，而 $d^2 - 4c^3$ 的符號（相差一個因子）就是三次方程的判別式，它決定方程有一個實根還是三個實根。為何三次和四次方程可以用根式求解，而一般的五次方程卻不能，正是伽羅瓦理論 (Galois theory) 的主題。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是開始閱讀這方面內容的好起點。

詳細解答

STEP I 2018，第 8 題

純數學 • 耦合微分方程

STEP I 2018，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s1-q8

關鍵思路

兩條導數（derivative）規則是刻意設計成互相抵消的：每當出現 s'，就會帶來 c^2；每當出現 c'，就會帶來 $-\mathrm{s}^2$。因此，貫穿全題最自然的做法，是對乘積和商求導，觀察各項如何合併，然後利用 (i) 的恆等式（identity）把所有東西化成單一個函數。至於積分（integral），要把每個被積函數看成「某東西乘以 s^2」或「某東西乘以 c^2」，因為這些正正是我們已知的導數。最後兩部分中關於 u 的積分，其實是同樣的積分換了個樣子。

解答

全題中，在不會引起混淆時，以 s 和 c 分別表示 $\mathrm{s}(x)$ 和 $\mathrm{c}(x)$。

第 (i) 部分

由連鎖法則（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3\right)=3\mathrm{s}^2\,\mathrm{s}'+3\mathrm{c}^2\,\mathrm{c}'=3\mathrm{s}^2\mathrm{c}^2-3\mathrm{c}^2\mathrm{s}^2=0,$$

所以 $\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3$ 是常數。它在 $x=0$ 的值是 $0^3+1^3=1$，因此

$$\mathrm{s}(x)^3+\mathrm{c}(x)^3=1 \quad \text{對所有} x,$$

即為所求。這個恆等式是全題其餘部分的引擎：它讓我們可以把 s^3 換成 $1-\mathrm{c}^3$，反之亦然。

第 (ii) 部分

由乘積法則（product rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc}) = \mathrm{s}'\mathrm{c} + \mathrm{sc}' = \mathrm{c}^2 \cdot \mathrm{c} + \mathrm{s} \cdot (-\mathrm{s}^2) = \mathrm{c}^3 - \mathrm{s}^3.$$

利用 (i)，$\mathrm{s}^3 = 1 - \mathrm{c}^3$，所以上式等於 $\mathrm{c}^3 - (1 - \mathrm{c}^3) = 2\mathrm{c}^3 - 1$，正是我們想要的結果。

至於商（在 $\mathrm{c}(x) \neq 0$ 之處），商法則（quotient rule）給出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}}\right) = \frac{\mathrm{s}'\mathrm{c} - \mathrm{sc}'}{\mathrm{c}^2} = \frac{\mathrm{c}^3 + \mathrm{s}^3}{\mathrm{c}^2} = \frac{1}{\mathrm{c}(x)^2},$$

同樣是用了 (i)。留意這與 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$ 之間令人愉快的對應。

第 (iii) 部分

由於 $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$，第一個積分可以立即寫出：

$$\int \mathrm{s}(x)^2 \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + C.$$

想一想 怎樣改寫 s^5，才能令已知的導數 $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$ 出現？

分出一個因子 s^2，再對餘下部分使用 (i)：$\mathrm{s}^5 = \mathrm{s}^3 \cdot \mathrm{s}^2 = (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{s}^2 = -(1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}'$。這是 $g(\mathrm{c})\,\mathrm{c}'$ 的形式，可用逆連鎖法則（reverse chain rule）積分：

$$\int \mathrm{s}(x)^5 \,\mathrm{d}x = -\int (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}' \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + \tfrac{1}{4}\mathrm{c}(x)^4 + C.$$

（求導回去驗證：$-\mathrm{c}' + \mathrm{c}^3\mathrm{c}' = -\mathrm{c}'(1 - \mathrm{c}^3) = \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{s}^3$，結果理應如此。）

第 (iv) 部分

設 $u = \mathrm{s}(x)$，於是 $x = \mathrm{s}^{-1}(u)$，且 $\mathrm{d}u = \mathrm{s}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{c}(x)^2\,\mathrm{d}x$。由 (i)，$\mathrm{c}^3 = 1 - u^3$，所以 $\mathrm{c} = (1 - u^3)^{1/3}$（取實立方根，無論 c 的正負號如何都成立），因此

$$(1 - u^3)^{2/3} = \mathrm{c}(x)^2.$$

於是

$$\int \frac{1}{(1 - u^3)^{2/3}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + C = \mathrm{s}^{-1}(u) + C,$$

這正是我們要證明的。

第 (v) 部分

使用同一個代換（substitution），其中 $(1 - u^3)^{1/3} = \mathrm{c}$，且 $\mathrm{d}u = \mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$。

對於第一個積分，$(1-u^3)^{4/3} = \mathrm{c}^4$，所以由 (ii) 中關於商的結果，

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^3)^{4/3}} = \int \frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{c}^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{c}^2} = \frac{\mathrm{s}(x)}{\mathrm{c}(x)} + C = \frac{u}{(1-u^3)^{1/3}} + C.$$

對於第二個積分，

$$\int (1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{c}\cdot\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x.$$

(ii) 中關於乘積的結果說明 $\mathrm{c}^3 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc})\right)$，所以

$$\int \mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\big(x + \mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x)\big) + C.$$

回到 u，其中 $x = \mathrm{s}^{-1}(u)$，且 $\mathrm{sc} = u(1-u^3)^{1/3}$：

$$\int (1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{s}^{-1}(u) + u(1-u^3)^{1/3}\Big) + C.$$

驗算

- (v) 的答案可以透過對 u 求導來驗證。例如，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\frac{u}{(1-u^3)^{1/3}} = \frac{1}{(1-u^3)^{1/3}} + \frac{u^3}{(1-u^3)^{4/3}} = \frac{1}{(1-u^3)^{4/3}}.$$

- 以數值方法解微分方程（differential equation）至 $x = 1.2$，得 $\mathrm{s}(1.2) \approx 0.9411$ 及 $\mathrm{c}(1.2) \approx 0.5500$，而確實 $0.9411^3 + 0.5500^3 \approx 1$。設 $U = \mathrm{s}(1.2)$，數值積分給出 $\int_0^U (1-u^3)^{-2/3}\,\mathrm{d}u \approx 1.2000$，與 (iv) 的預測一致；又 $\int_0^U (1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u \approx 0.8588 = \frac{1}{2}(1.2 + 0.9411\times 0.5500)$，與 (v) 吻合。
- 數值上，$\int_0^{1.2} \mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x \approx 0.4500 = 1 - \mathrm{c}(1.2)$，與 (iii) 一致。

常見錯誤

- 寫成 $\int \mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x = +\mathrm{c} + C$：$\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$ 中的負號很容易遺漏。
- 在 (iv) 和 (v) 中，忘記把 $\mathrm{d}u$ 轉換成 $\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$，或者最終答案仍以 x 而非 u 表示。
- 在 (v) 中試圖直接積分 c^3，而沒有察覺 (ii) 早已把它表示為一個導數加一個常數。

STEP 之外

對曲線 $x^3 + y^3 = 1$ 而言，s, c 這一對函數的角色，就如 sin 和 cos 之於圓 $x^2 + y^2 = 1$；這類「廣義三角函數」(generalised trigonometric functions) 與橢圓函數 (elliptic functions) 是

近親，後者正是透過反演類似 (iv) 中的積分而產生的，就如 $\sin^{-1} u = \int (1-u^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u$ 一樣。以帶初始條件的微分方程來定義函數，再由此推導出它們的全部性質，是大學一年級的標準技巧；而題目中假設這些函數是「唯一確定」的，背後就是常微分方程（ODE）的存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem）。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《基礎微分方程》）既涵蓋相關理論，也有許多耦合方程組的例子。

詳細解答

STEP I 2018，第 9 題

力學 • 斜面上的運動

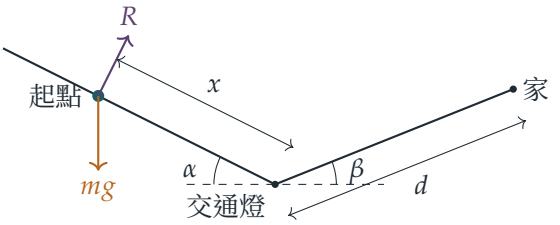
> **STEP I 2018，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q9

關鍵思路

由於沒有阻力，小型賽車（go-kart）在每段直路上的加速度都是常數：沿第一段斜坡向下的加速度為 $g\sin\alpha$，沿第二段斜坡向上則有大小為 $g\sin\beta$ 的減速度。因此每一段都是一個等加速度（constant acceleration）問題，而兩段之間由到達交通燈時的速率連接起來。能量（或 $v^2 = u^2 + 2as$）決定我到底能否到家；時間則由每一段上的 $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ 得出，其餘就是以 k 表示的細心代數運算。

解答

把小型賽車連同駕駛者模擬為一個質點（particle），沿每條最大斜率直線（line of greatest slope）運動，沒有摩擦力，也沒有空氣阻力。所受的力只有重量 mg 和法向反作用力（normal reaction）R，而後者不做功。



到達家門

沿第一段斜坡分解力，重量沿斜坡向下的分量為 $mg\sin\alpha$，所以加速度為 $g\sin\alpha$。由靜止出發並走過距離 x 後，到達交通燈時的速率 V 滿足

$$V^2 = 2gx\sin\alpha.$$

由於速率沒有突變，我以速率 V 開始駛上第二段，此時重量沿斜坡產生大小為 $g\sin\beta$ 的減速度。在交通燈以外距離 s 處，我的速率 v 滿足 $v^2 = V^2 - 2gs\sin\beta$。要到達家門，v^2 必須一直保持非負，直至 $s = d$，即

$$2gx\sin\alpha - 2gd\sin\beta \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad x\sin\alpha \geq d\sin\beta,$$

這正是所求。（等價地說：根據能量守恆（conservation of energy），我永遠不能升到高於起點的高度，而起點比交通燈高 $x\sin\alpha$，家則比交通燈高 $d\sin\beta$。）

總時間

為使代數簡潔，設 $c = \left(\frac{1}{2}g\sin\alpha\right)^{1/2}$，則 $g\sin\alpha = 2c^2$；又因 $\sin\beta = \sin\alpha/k$，故 $g\sin\beta = 2c^2/k$。

第一段。由 $x = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t_1^2 = c^2t_1^2$ 可知到達交通燈的時間為 $t_1 = \sqrt{x}/c$，而該處的速率為 $V = (g\sin\alpha)t_1 = 2c\sqrt{x}$。

第二段。從交通燈起量度 s，有 $s = Vt - \frac{1}{2}(g\sin\beta)t^2$，所以到達 $s = d$ 的時間 t_2 滿足

$$\frac{c^2}{k}t_2^2 - 2c\sqrt{x}\,t_2 + d = 0.$$

想一想 這個二次方程有兩個根。哪一個才是我到達的時間？

較大的根是：假如斜坡無限長，質點停下後沿斜坡滑回，再次經過 $s = d$ 的時間。我是在第一次到達 $s = d$ 時到家，所以我們要取較小的根：

$$t_2 = \frac{2c\sqrt{x} - \sqrt{4c^2x - 4c^2d/k}}{2c^2/k} = \frac{k}{c}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x - \tfrac{d}{k}}\right) = \frac{1}{c}\left(k\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}\right),$$

這裏因 $k > 0$ 而用了 $k\sqrt{x - d/k} = \sqrt{k^2x - kd}$。平方根之所以是實數，正是因為 $x \geq d/k$，也就是第一部分的條件 $x\sin\alpha \geq d\sin\beta$。

相加得 $T = t_1 + t_2$，於是

$$\left(\frac{g\sin\alpha}{2}\right)^{1/2} T = cT = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd},$$

這就是所求的結果。

使 T 最小

由於 c 是正常數，我們在 $x \geq d/k$ 上求 $f(x) = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}$ 的最小值。求導（differentiating）得

$$f'(x) = \frac{1+k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{2\sqrt{k^2x - kd}}.$$

令 $f'(x) = 0$，得 $(1+k)\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}$。兩邊皆為正，所以平方不會失去任何資訊：

$$\begin{aligned}(1+k)^2(k^2x - kd) &= k^4x \\ x\left[(1+k)^2k^2 - k^4\right] &= (1+k)^2kd \\ xk^2(1+2k) &= (1+k)^2kd,\end{aligned}$$

這裏用了 $(1+k)^2 - k^2 = 1 + 2k$。除以 $k^2(1+2k) > 0$，得

$$x = \frac{(1+k)^2}{k(1+2k)}\,d.$$

這是一個容許的起點：$(1+k)^2 = 1 + 2k + k^2 > 1 + 2k$，所以這個 x 嚴格大於 d/k，我確實能到家。

存在最佳的 x 是合理的：起點太近，我在山坡最後一段就會慢得像爬行；起點太遠，我又要在第一段斜坡上花很長時間。

驗算

- 在最佳點，$\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}/(1+k)$，所以 $cT = \sqrt{x}\,\dfrac{1+2k}{1+k} = \sqrt{\dfrac{(1+2k)d}{k}}$，最短時間的形式簡潔得令人愉快。
- 取 $\alpha = \beta$，即 $k = 1$。此時最佳點為 $x = \frac{4}{3}d$，公式給出 $cT = 2\sqrt{4d/3} - \sqrt{d/3} = \sqrt{3d}$，與上一項驗算吻合。
- 在臨界值 $x = d/k$ 時，我只是剛好慢慢挪到門口，且 $f'(x) \to -\infty$，所以把起點稍為後移必定能節省時間。
- 以細小的時間間隔逐步數值推進運動，並對多組隨機角度和距離進行測試，結果與 T 的公式在五位有效數字內一致；以電腦搜尋 x，找到的最小值亦正是上面所得的值。

常見錯誤

- 為 t_2 取了二次方程的較大根：那是滑回下坡時經過家門的時間。

- 忘記交通燈處的速率並非已知，必須由第一段延續過來。
- 遺漏條件 $x \geq d/k$，而正是這個條件使 $\sqrt{k^2x - kd}$ 為實數。

STEP 之外

最短時間的簡潔答案暗示了一個更廣闊的主題：選擇路徑或起點以使行程時間最短，正是*變分法*（calculus of variations）的研究對象；其最著名的問題——最速降線（brachistochrone）問題——就是要找出在重力作用下下降最快的曲線。在大學一年級的力學課程中，你亦會接觸到這個想法：對於保守力（conservative forces），單靠能量就能告訴你質點可以到達哪裏，而要求時間則必須對運動方程（equation of motion）積分。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這兩個想法都有細緻的闡述。

詳細解答

STEP I 2018，第 10 題

力學 • 連接質點

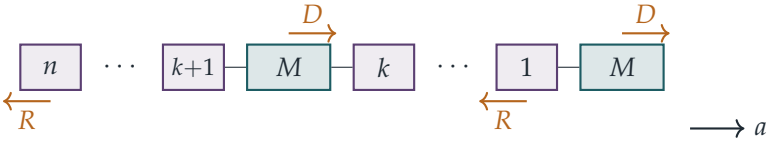
> **STEP I 2018，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q10

關鍵思路

每節車輛的加速度（acceleration）都相同，所以我們先由整列火車求出加速度一次，再對火車中最方便的那一部分應用牛頓第二定律（Newton's second law）：在某個連接器（coupling）處把火車「切開」，該連接器的張力（tension）就會顯露為一個外力（external force）。令後面各部分變得容易的技巧，是用兩種方法求最前方的張力 T：一次從前方機車入手，一次從它後面的所有車輛入手。這樣做會把 T 與單一個量 $R+ma$ 聯繫起來，而這個量同時支配著其他每一個連接器。

解答

模型。 把每輛機車和每節車廂視為沿水平路軌運動的質點（particle），並把連接器視為可以受拉或受壓（compression）的輕桿（light rods）。機車不受阻力（resistance），而每節車輛所受的鉛垂方向的力互相平衡，所以只需考慮水平方向的力。加速度 a 以運動方向為正。由前至後把車廂編號為 $1,2,\ldots,n$，使車廂 $1,\ldots,k$ 位於兩輛機車之間，而 $k+1,\ldots,n$ 位於第二輛機車之後（其中 $1\le k\le n-1$）。



（每節車廂都受一個向後的阻力 R；圖中只畫出其中兩個。）

加速度。 整列火車的質量為 $nm+2M$，而連接器的力屬於內力，所以

$$(nm+2M)a = 2D - nR, \qquad a = \frac{2D-nR}{nm+2M} > 0,$$

由於 $2D > nR$，所以加速度為正。特別地，$R+ma>0$，這個事實我們會反覆用到。

第 (i) 部分

前方機車受向前的力 D，以及其連接器向後的張力 T，所以

$$D - T = Ma.$$

因此

$$\begin{aligned} T = D - \frac{M(2D-nR)}{nm+2M} &= \frac{D(nm+2M) - 2MD + nMR}{nm+2M} \\ &= \frac{n(mD+MR)}{nm+2M}, \end{aligned}$$

即為所求。

T 的一個更簡潔形式。 現在改為考慮前方機車後面的所有車輛：一輛機車和 n 節車廂，總質量為 $M+nm$。它們受 T 和第二輛機車的 D 向前拉動，並受阻力 nR：

$$T + D - nR = (M+nm)a.$$

從此式減去 $D-T=Ma$ 便可消去 D：

$$2T - nR = nma, \qquad \text{所以} \qquad T = \tfrac{1}{2}n\,(R+ma).$$

第 (ii) 部分

除最前方的連接器外，其他每個連接器都屬於以下兩類之一。

第二輛機車前面的連接器。 對於 $1 \le j \le k$，設 T_j 為緊接車廂 j 後方的連接器的張力（因此 T_k 是車廂 k 與第二輛機車之間的連接器）。前方機車連同車廂 $1,\dots,j$ 的質量為 $M+jm$，並受 T_j 向後拉：

$$D - jR - T_j = (M+jm)a \quad\Longrightarrow\quad T_j = (D-Ma) - j(R+ma) = T - j(R+ma).$$

由於 $R+ma>0$ 且 $j \ge 1$，無論 k 是多少，這類連接器全部都有 $T_j < T$。

第二輛機車後面的連接器。 對於 $k+1 \le j \le n$，設 S_j 為緊接車廂 j 前方的連接器的張力。最簡單的做法是考慮它後面的車輛：車廂 $j,\dots,n$，共 $n-j+1$ 節，只受 S_j 向前拉：

$$S_j - (n-j+1)R = (n-j+1)ma \quad\Longrightarrow\quad S_j = (n-j+1)(R+ma).$$

想一想 這些後方連接器中，哪一個的張力最大？它與 T 相比又如何？

張力 S_j 隨 j 增大而減小，所以最大的是 $S_{k+1} = (n-k)(R+ma)$，位於緊接第二輛機車後方的連接器。將它與 $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$ 比較，並除以 $R+ma > 0$，得

$$S_{k+1} < T \iff n-k < \tfrac{1}{2}n \iff k > \tfrac{1}{2}n.$$

所以若 $k > \frac{1}{2}n$，每個後方連接器的張力至多為 $S_{k+1} < T$，而每個前方連接器都有 $T_j < T$。因此 T 大於其他任何連接器的張力，即為所求。（這個條件也是必要的：若 $k \le \frac{1}{2}n$，則 $S_{k+1} \ge T$。）

第 (iii) 部分

考慮車廂 k 與第二輛機車之間的連接器。由第 (ii) 部分及 $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$，

$$T_k = T - k(R+ma) = \left(\tfrac{1}{2}n - k\right)(R+ma).$$

若 $k > \frac{1}{2}n$，第一個因子為負而第二個因子為正，所以 $T_k < 0$：這個連接器處於受壓狀態。從物理角度看，第二輛機車正在推動它前面的 k 節車廂（超過整列火車的一半），同時前方機車在拉動它們。

驗算

- 取 $n=5$、$k=3$、$M=10$、$m=2$、$D=20$、$R=1$。則 $a = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$，公式給出 $T = \frac{5(40+10)}{30} = \frac{25}{3}$，與 $D - Ma = 20 - \frac{35}{3}$ 相符。沿火車由前往後，各張力依次為 $\frac{25}{3}, 5, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}$（車廂 3 至機車），然後是 $\frac{20}{3}, \frac{10}{3}$。所以 T 最大，而且恰好有一個連接器受壓，與預測一致。
- 若 $M=0$，機車就只是力，此時 $T = D$，這正是無質量的前方機車應有的結果。
- 每個張力都是一個力乘以一個無量綱（dimensionless）比值，所以單位正確。

常見錯誤

- 把阻力也加在機車上：題目只說車廂受阻力。
- 忘記第二輛機車的驅動力作用於任何包含它的火車部分。
- 假設每個連接器都必定受拉；連接器是一根桿，所以負張力是完全合乎物理的推力。

STEP 之外

把一個系統分拆成若干部分，並為每一部分分別畫出受力圖（free-body diagram），其中內力（internal forces）以大小相等、方向相反的成對形式出現，這是連接體力學的基礎。在大學一年級的課程中，這會發展為桁架（truss）和框架（framework）的分析：你要同時求出多根構件的內力，而有些構件會原來是受壓的支柱（strut），而不是受拉的拉桿（tie）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）細緻地討論了受力圖和牛頓第三定律（Newton's third law）。

詳細解答

STEP I 2018，第 11 題

力學 • 斜面上的摩擦力

STEP I 2018，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s1-q11

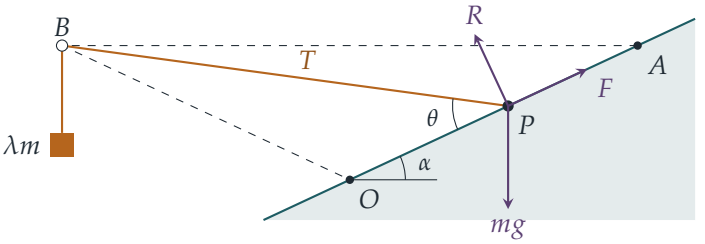
關鍵思路

先從幾何入手：$OA = OB = d$，所以三角形 OAB 是等腰三角形（isosceles triangle）；又因為 AB 是水平的，它的兩個底角都是 α。繩子由 P 往回越過 O 的一側伸向 B，因此它一方面把 P 沿斜面向下拉，另一方面把 P 拉離斜面。於是摩擦力（friction）必須把質點托住，而法向反作用力（normal reaction）則因張力（tension）而減小。每個平衡（equilibrium）條件都是一條關於 θ 的不等式，而且必須對第 (i) 部分所得範圍內的每一個 θ 都成立，所以我們要找出最不利的位置。

解答

把 P 和懸掛的物體視為質點（particle），繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible），滑輪視為光滑（smooth），因此整條繩子的張力處處相同。懸掛的質點處於平衡，所以

$$T = \lambda mg.$$



第 (i) 部分

把 O 放在原點，x 軸取水平方向。於是 $A = (d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$。點 B 與 A 等高，且與 O 的距離為 d，所以 $B = (\pm d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$。取正號得到的就是 A 本身，因此

$$B = (-d\cos\alpha,\ d\sin\alpha).$$

此點位於斜面所在直線的上方，並在 O 相對於 A 的另一側。在三角形 OAB 中，$OA = OB = d$；又因為 AB 水平而 AO 與水平線成角 α，所以 $\angle OAB = \alpha$。因此 $\angle OBA = \alpha$ 亦成立，而 $\angle AOB = 180° - 2\alpha$；由於 $\alpha < 45°$，這是一個鈍角。

設 P 位於 OA 上。繩子沿 PB 伸展，它與 L 所成的銳角為 $\theta = \angle BPO$。這個角是銳角，因為它至多是 $2\alpha < 90°$，下面就來證明。它是三角形 PAB 的一個外角（exterior angle），所以

$$\theta = \angle BPO = \angle PAB + \angle PBA = \alpha + \angle PBA.$$

當 P 由 O 移向 A 時，射線 BP 由 BO 轉向 BA，所以 $\angle PBA$ 由 $\angle OBA = \alpha$ 遞減至 0。因此

$$\alpha \le \theta \le 2\alpha,$$

當 P 在 O 時 $\theta = 2\alpha$，而當 P 趨近 A 時 $\theta \to \alpha$。

留意這對各力意味着甚麼。從沿斜面向下的方向 PO 量起，繩子成銳角 θ，並指向離開斜面的一方。所以張力有沿斜面向下的分量 $T\cos\theta$，以及垂直於斜面、把 P 拉離斜面的分量 $T\sin\theta$。

第 (ii) 部分

沿垂直於斜面的方向分解（resolving）：

$$R = mg\cos\alpha - T\sin\theta = mg(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

> ? **想一想** 在這一部分中，既然我們不知道 μ，摩擦力去了哪裏？

我們根本不需要它。無論 μ 是多少，P 都必須與斜面保持接觸，所以需要 $R \ge 0$。（事實上 $R > 0$：若 $R = 0$，就沒有摩擦力，沿斜面方向便沒有任何力可以平衡 $mg\sin\alpha + T\cos\theta > 0$。）因此，要在每一點都能平衡，必須有

$$\lambda\sin\theta \le \cos\alpha \quad \text{對所有出現的} \theta \text{ 成立.}$$

由於 sin 在 $[\alpha, 2\alpha] \subset [0°, 90°)$ 上遞增，$\sin\theta$ 的最大值出現在 $\theta = 2\alpha$（或當 P 趨近 O 時任意接近它）。因此 $\lambda\sin 2\alpha \le \cos\alpha$，即 $2\lambda\sin\alpha\cos\alpha \le \cos\alpha$。兩邊除以 $\cos\alpha > 0$，得

$$2\lambda\sin\alpha \le 1,$$

即為所求。

第 (iii) 部分

重力和張力都把 P 沿斜面向下拉，所以摩擦力 F 沿斜面向上作用。沿斜面方向分解，

$$F = mg\sin\alpha + T\cos\theta = mg(\sin\alpha + \lambda\cos\theta).$$

在此位置能夠平衡，當且僅當 $F \le \mu R$（由於 $F > 0$，這同時迫使 $R > 0$）。設 $\mu = \tan\beta$，條件為

$$\sin\alpha + \lambda\cos\theta \le \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

兩邊乘以 $\cos\beta > 0$，並把含 λ 的項歸在一起：

$$\lambda(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta) \le \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha,$$
$$\lambda\cos(\beta - \theta) \le \sin(\beta - \alpha).$$

這裏 $0 < \beta < 90^\circ$ 且 $0 < \theta \le 2\alpha < 90^\circ$，所以 $-90^\circ < \beta - \theta < 90^\circ$，從而 $\cos(\beta - \theta) > 0$。因此，在角度為 θ 的位置能夠平衡，恰好當

$$\lambda \le \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \theta)}.$$

要使此式在每一個位置都成立，它必須在 $\cos(\beta - \theta)$ 最大之處成立，也就是在範圍 $\alpha \le \theta \le 2\alpha$ 容許下 θ 最接近 β 之處。

情況 $\beta \ge 2\alpha$。範圍內每一個 θ 都不超過 β，所以 $0 \le \beta - 2\alpha \le \beta - \theta \le \beta - \alpha < 90^\circ$。餘弦在 $[0^\circ, 90^\circ)$ 上遞減，所以 $\cos(\beta - \theta)$ 在 $\theta = 2\alpha$ 處最大，即位於 O（或緊鄰 O）的位置。因此一個必要條件是

$$\lambda \le \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - 2\alpha)}.$$

這也是充分條件，因為在其他每一個位置，對 λ 的限制都較寬鬆。

情況 $\alpha \le \beta \le 2\alpha$。此時 $\theta = \beta$ 落在範圍之內：由第 (i) 部分，P 在 L 上介於 O 與 A 之間的某個位置恰好給出這個角（若 $\beta = \alpha$，則是當 $P \to A$ 時趨近）。在那裏 $\cos(\beta - \theta) = 1$，即其最大可能值，條件變為

$$\lambda \le \sin(\beta - \alpha).$$

在該位置，繩子垂直於總接觸力；當摩擦力達到極限時，總接觸力與法線成角 β。若 $\beta = \alpha$，這迫使 $\lambda = 0$：此時質點單憑自身重量就已剛好處於極限平衡（limiting equilibrium），任何繩子張力都會令它滑動。

驗算

► 當 $\beta = 2\alpha$ 時兩個答案一致：此時 $\cos(\beta - 2\alpha) = 1$，兩者都給出 $\lambda \le \sin\alpha$。

- 當 $\lambda = 0$ 時，條件變為 $\sin(\beta - \alpha) \geq 0$，即 $\mu \geq \tan\alpha$，這正是物塊能靜止於粗糙斜面上的熟悉條件。
- 對於 $\alpha = 20°$、$\beta = 50°$，界限為 $\sin 30° / \cos 10° \approx 0.508$。一項電腦驗算把 P 放在 OA 上的許多點，直接分解各力，結果發現對於數以千計的隨機 α 和 β，使各處皆能平衡的最大 λ 都與兩條公式吻合。它亦證實了 $\alpha \leq \theta \leq 2\alpha$。

常見錯誤

- 把 B 放在 O 與 A 同一側。由於 $OB = OA$ 而 $B \neq A$，B 位於 O 的另一側，所以張力把 P 沿斜面向下拉，而不是向上。
- 忘記張力會減小法向反作用力，從而減少可用的摩擦力。
- 在第 (iii) 部分的第二種情況中只檢查兩端的位置。最不利的位置是 $\theta = \beta$ 之處，它位於內部。

STEP 之外

組合式 $\lambda\cos(\beta - \theta) \leq \sin(\beta - \alpha)$ 是*摩擦角*（angle of friction）的代數形式：總接觸力必須落在與法線成角 β 的範圍之內，即所謂的摩擦錐（cone of friction）。只要從這個錐的角度思考，許多摩擦問題都能化為一行幾何。要求「對每一個位置」都能平衡，其實是一個小型的最優化問題；工程師按最壞情況進行設計時，也是用同樣的方式推理。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）細緻地處理摩擦力和受力圖，並附有大量具挑戰性的習題。

詳細解答

STEP I 2018，第 12 題

概率與統計 • 放回抽樣

> **STEP I 2018，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q12

關鍵思路

把每個正面次數寫成兩個指示變量（indicator variable）之和，每次拋擲對應一個。無論各次拋擲是否獨立（independent），和的期望值（expectation）都等於期望值之和，所以平均值很容易求得。方差（variance）則取決於一個數，就是兩次拋擲皆出現正面的概率，而這正是放回抽樣（drawing with replacement）與不放回抽樣（drawing without replacement）的分別所在。

解答

全文中，設 $p = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$ 及

$$q = p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1.$$

我們假設每枚硬幣被選中的機會相等，而且硬幣選定後，各次拋擲互相獨立。

第 (i) 部分

設 C_k 為選中第 k 枚硬幣的事件，故 $\mathrm{P}(C_k) = \frac{1}{3}$。由全概率定律（law of total probability），

$$\mathrm{P}(\text{正面}) = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}(C_k)\,\mathrm{P}(\text{正面} \mid C_k) = \tfrac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) = p.$$

第 (ii) 部分

設 X_1 和 X_2 分別為第一次和第二次拋擲出現正面的指示變量，故 $N_1 = X_1 + X_2$。由於第一枚硬幣會被放回，第二次拋擲的情況與第一次完全相同，由第 (i) 部分得 $\mathrm{P}(X_1 =$

$1) = \mathrm{P}(X_2 = 1) = p$。因此

$$\mathrm{E}(N_1) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) = 2p.$$

求方差需要 $\mathrm{P}(X_1 = 1,\, X_2 = 1)$。兩次選擇互相獨立，9 個有序硬幣對 (j,k) 的概率各為 $\frac{1}{9}$，而給定該硬幣對時，兩次皆為正面的機會是 $p_j p_k$。所以

$$\mathrm{P}(X_1 = 1,\, X_2 = 1) = \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_j p_k = \left(\frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}\right)^2 = p^2 = \mathrm{P}(X_1 = 1)\,\mathrm{P}(X_2 = 1).$$

同樣的因式分解對其他結果亦成立，因此 X_1 與 X_2 互相獨立，且 $N_1 \sim \mathrm{B}(2, p)$。也可以直接計算：由於 $X_i^2 = X_i$，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N_1^2) &= \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + 2\,\mathrm{E}(X_1X_2) = 2p + 2p^2,\\ \mathrm{Var}(N_1) &= 2p + 2p^2 - (2p)^2 = 2p(1-p),\end{aligned}$$

正如所求。

第 (iii) 部分

現在以不放回方式先後選出兩枚硬幣，設 Y_1、Y_2 分別為第一枚和第二枚選出的硬幣出現正面的指示變量，故 $N_2 = Y_1 + Y_2$。每枚硬幣成為第一枚被選中的機會相等，由對稱性，每枚成為第二枚被選中的機會亦相等，所以與第 (i) 部分一樣，$\mathrm{P}(Y_1 = 1) = \mathrm{P}(Y_2 = 1) = p$，且

$$\mathrm{E}(N_2) = 2p.$$

想一想 可以沿用第 (ii) 部分中 P(兩次皆正面) 的計算嗎？

不可以：同一枚硬幣不能再被選中兩次。現在有 6 個機會相等的有序對 (j,k)，其中 $j \neq k$，而每個無序對 $\{j,k\}$ 出現兩次，所以

$$\mathrm{P}(Y_1 = 1,\, Y_2 = 1) = \frac{1}{6}\sum_{j\neq k} p_j p_k = \frac{2q}{6} = \frac{q}{3}.$$

一般而言這並不等於 p^2，故 Y_1 與 Y_2 並不獨立。再次利用 $Y_i^2 = Y_i$，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N_2^2) &= \mathrm{E}(Y_1) + \mathrm{E}(Y_2) + 2\,\mathrm{E}(Y_1Y_2) = 2p + \tfrac{2}{3}q,\\ \mathrm{Var}(N_2) &= 2p + \tfrac{2}{3}(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1) - 4p^2.\end{aligned}$$

第 (iv) 部分

兩式相減，

$$\mathrm{Var}(N_1) - \mathrm{Var}(N_2) = \left(2p - 2p^2\right) - \left(2p + \tfrac{2}{3}q - 4p^2\right) = 2p^2 - \tfrac{2}{3}q.$$

而 $9p^2 = (p_1+p_2+p_3)^2 = p_1^2+p_2^2+p_3^2+2q$，所以

$$\begin{aligned} 2p^2 - \tfrac{2}{3}q &= \tfrac{2}{9}(p_1^2+p_2^2+p_3^2+2q) - \tfrac{6}{9}q = \tfrac{2}{9}(p_1^2+p_2^2+p_3^2-p_1p_2-p_2p_3-p_3p_1) \\ &= \tfrac{1}{9}\Big[(p_1-p_2)^2+(p_2-p_3)^2+(p_3-p_1)^2\Big], \end{aligned}$$

最後一步成立，是因為展開這三個平方會得到 $2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)-2q$。

實數的平方和是非負的，所以 $\mathrm{Var}(N_2) \le \mathrm{Var}(N_1)$。等號成立當且僅當三個平方皆為零，即當且僅當 $p_1 = p_2 = p_3$。證明完畢。

作為副產品，我們得到第 (iii) 部分答案的一個簡潔形式：

$$\mathrm{Var}(N_2) = 2p(1-p) - \tfrac{1}{9}\Big[(p_1-p_2)^2+(p_2-p_3)^2+(p_3-p_1)^2\Big].$$

驗算

- 若 $p_1 = p_2 = p_3 = p$，每枚硬幣都一樣，那麼硬幣怎樣選出並無分別：兩個次數都服從 $\mathrm{B}(2,p)$，方差相等，與等號成立的情況吻合。
- 取 $p_1 = \frac{1}{2}$、$p_2 = \frac{1}{3}$、$p_3 = \frac{1}{6}$，則 $p = \frac{1}{3}$，$q = \frac{11}{36}$。於是 $\mathrm{Var}(N_1) = \frac{4}{9}$，$\mathrm{Var}(N_2) = \frac{2}{3} + \frac{11}{54} - \frac{4}{9} = \frac{23}{54}$，少了 $\frac{1}{54}$，與 $\frac{1}{9}\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{54}$ 一致。親手列出所有結果亦得出相同數值。
- 極端情況 $p_1 = p_2 = 1$、$p_3 = 0$：在第 (iii) 部分中，除非第 1 和第 2 枚硬幣同時被選中，否則選出的兩枚硬幣中恰有一枚必定是正面，因此 N_2 以概率 $\frac{1}{3}$ 取值 2，其餘情況取值 1，方差為 $\frac{2}{9}$。公式給出 $2p + \frac{2}{3}q - 4p^2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$。

常見錯誤

- 把第 (iii) 部分的兩次拋擲當作獨立，於是又得到 $2p(1-p)$；第 (iv) 部分的重點正正在於它們並不獨立。
- 把 $\mathrm{Var}(N_1)$ 寫成各枚硬幣方差 $2p_k(1-p_k)$ 的平均；這忽略了隨機選擇硬幣所帶來的額外變異，而且在第 (ii) 部分中，每次拋擲可能用不同的硬幣。

STEP 之外

第 (ii) 與第 (iii) 部分的分別，就是放回抽樣與不放回抽樣的分別。不放回抽樣使各次抽取呈負相關（negatively correlated），從而降低方差；同樣的效應在抽樣調查中產生「有限總體校正」（finite population correction），亦解釋了為何超幾何分佈（hypergeometric distribution）的方差比具相同平均值的二項分佈（binomial distribution）小。第 (iv) 部

分的代數運算就是恆等式 $\sum p_k^2 - \sum_{j<k} p_j p_k = \frac{1}{2}\sum_{j<k}(p_j - p_k)^2$，它與「方差永不為負」這個事實關係密切。Blitzstein 和 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）正是以這種精神講解指示變量、協方差（covariance）和超幾何分佈。

詳細解答

STEP I 2018，第 13 題

概率與統計 • 二項分佈與貝葉斯定理

> **STEP I 2018，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q13

關鍵思路

一切都建基於一個簡單的計算：若考生作答 k 題，其中答對 j 題，則得分為 $2j-(k-j)=3j-k$。因此合格即表示至少答對 $(k+5)/3$ 題，而對每個 k，這就準確告訴我們要把哪些二項式項相加。在第 (iii) 部分，巧妙的做法是把每一題看成有三種結果（答對、答錯、未作答），這樣整個問題就化為單一的多項計數（multinomial count）。

解答

全文設 $p=\frac{1}{n}$ 為隨機選出的答案正確的概率（probability），並設 $q=1-p$。由於 $n\geq 2$，故 $0<p\leq\frac{1}{2}$。

第 (i) 部分

設 P_k 為 A 恰好作答 k 題時合格的概率。她的各次選擇互相獨立（independent），所以她答對的題數 J 服從二項分佈（binomial distribution）$\mathrm{B}(k,p)$。她的得分為 $3J-k$，所以她合格當且僅當

$$3J-k\geq 5 \iff J\geq\frac{k+5}{3}.$$

逐一考慮 k 的各個值：

- $k=0,1,2$：分別需要 $J\geq\frac{5}{3},2,\frac{7}{3}$，即 $J\geq 2$、$J\geq 2$ 及 $J\geq 3$，但 $J\leq k$，故這些都不可能（最高得分為 $2k\leq 4$）。所以 $P_0=P_1=P_2=0$。
- $k=3$：需要 $J\geq\frac{8}{3}$，即 $J=3$，所以 $P_3=p^3$。

► $k=4$：需要 $J\geq 3$，所以

$$P_4=\binom{4}{3}p^3q+p^4=4p^3(1-p)+p^4=p^3(4-3p).$$

► $k=5$：需要 $J\geq \frac{10}{3}$，即 $J=4$ 或 5，所以

$$P_5=\binom{5}{4}p^4q+p^5=5p^4(1-p)+p^5=p^4(5-4p).$$

現在把 P_4 與它的兩個對手比較。由於 $p<1$，有 $4-3p>1$，所以 $P_4>p^3=P_3$。此外

$$P_4-P_5=p^3\big[(4-3p)-p(5-4p)\big]=p^3\big(4p^2-8p+4\big)=4p^3(1-p)^2>0,$$

因為 $0<p<1$。又因 $P_4>0$，亦勝過 $P_0=P_1=P_2=0$，所以 P_4 嚴格最大，故 A 應選擇 $k=4$，得證。

想一想 作答全部五題，豈不是必然有更多得分機會？

在這裏並非如此。作答五題時，她需要答對四題，因為第五題一旦答錯便會扣一分，而答錯的機會遠比答對大。作答四題時，答對三題便已足夠。因式分解（factorisation）$4p^3(1-p)^2$ 顯示，這個優勢對每個 $n\geq 2$ 都成立，而不僅限於 n 很大的情況。

第 (ii) 部分

設 K 為 B 作答的題數，所以對 $k=0,\ldots,5$ 有 $\mathrm{P}(K=k)=\frac{1}{6}$；並設 S 為 B 合格這一事件。在 $K=k$ 的條件下，B 的處境與 A 完全相同，所以 $\mathrm{P}(S\mid K=k)=P_k$。由貝葉斯定理（Bayes' theorem），

$$\mathrm{P}(K=4\mid S)=\frac{\frac{1}{6}P_4}{\frac{1}{6}(P_0+P_1+\cdots+P_5)}=\frac{p^3(4-3p)}{p^3+p^3(4-3p)+p^4(5-4p)}.$$

約去 p^3（它不為零）後，分母變為 $1+4-3p+5p-4p^2=5+2p-4p^2$，所以

$$\mathrm{P}(K=4\mid S)=\frac{4-3p}{5+2p-4p^2}.$$

代入 $p=\frac{1}{n}$，並把分子和分母同乘以 n^2：

$$\mathrm{P}(K=4\mid S)=\frac{4n^2-3n}{5n^2+2n-4}=\frac{n(4n-3)}{5n^2+2n-4}.$$

第 (iii) 部分

對每一題而言，C 擲硬幣的結果與她所選的答案互相獨立，亦與其他題目的情況獨立。所以每一題各自獨立地有三種結果之一：

$$\begin{aligned}
\text{答對 } (+2): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1},\\
\text{答錯 } (-1): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n+1},\\
\text{未作答 } (0): &\quad \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

設她答對 c 題、答錯 w 題，其中 $c+w\le 5$。她合格當 $2c-w\ge 5$。這迫使 $c\ge 3$，然後：

- $c=3$：需要 $w\le 1$；
- $c=4$：由於 $c+w\le 5$，$w\le 1$ 自動成立；
- $c=5$：$w=0$。

把 c 題答對、w 題答錯、$5-c-w$ 題未作答分配到各題的方法數，就是多項係數（multinomial coefficient）$\frac{5!}{c!\,w!\,(5-c-w)!}$。由於答對與未作答的概率同為 $\frac{1}{n+1}$，每一種排列的概率都是 $\dfrac{(n-1)^w}{(n+1)^5}$。把五種情況相加：

(c,w)	排列數	概率 $\times(n+1)^5$
$(3,0)$	10	10
$(3,1)$	20	$20(n-1)$
$(4,0)$	5	5
$(4,1)$	5	$5(n-1)$
$(5,0)$	1	1

總和為 $16+25(n-1)=25n-9$，所以

$$\mathrm{P}(\text{C 合格}) = \frac{25n-9}{(n+1)^5}.$$

驗算

- 當 $n=2$：$P_3=\frac{1}{8}$，$P_4=\frac{5}{16}$，$P_5=\frac{3}{16}$，所以 $k=4$ 勝出。在 (ii) 中，公式給出 $\frac{2\cdot 5}{20}=\frac{1}{2}$，與直接計算 $\frac{5/16}{10/16}$ 的結果吻合。
- 對於 (iii)，當 $n=3$ 時答案為 $\frac{66}{1024}\approx 0.0645$，而以電腦模擬 200 000 次測驗得出 0.0644。三條公式亦與電腦對 $n=2,\ldots,29$ 作精確窮舉的結果一致。

- 當 $n \to \infty$，(ii) 的答案趨向 $\frac{4}{5}$：當猜題幾乎毫無希望時，合格幾乎總是來自作答四題（需答對三題），而非作答五題（需答對四題）或作答三題（需三題全對，概率為 p^3，遠小於 $4p^3$）。

常見錯誤

- 忘記作答五題時答對三題只得 $6 - 2 = 4$ 分，並不合格：需要答對四題。
- 在 (ii) 中，分母漏了 P_3：作答三題而三題全對，也是合格的一種途徑。
- 在 (iii) 中，把問題看成「以概率 $\binom{5}{k}h^k(1-h)^{5-k}$ 作答 k 題」，然後套用第 (i) 部分，這樣做是可行的，但很容易漏掉某一項；三種結果的計數方法較為簡潔。

STEP 之外

第 (iii) 部分是*稀疏化*（thinning）的一個例子：每一題以某個概率被保留，而各結果仍然互相獨立，所以答對、答錯及跳過的題數服從多項分佈（multinomial distribution）。第 (ii) 部分則是貝葉斯更新（Bayesian updating），這是現代統計學很大部分背後的思想。兩者在 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率論導引》）以及 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率論入門》）中都有深入闡述。

詳細解答

STEP II 2018，第 1 題

純數學 • 多項式的根

> **STEP II 2018，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q1

關鍵思路

係數由前往後讀和由後往前讀都一樣，所以把方程除以 x^2，就可以把這個四次方程（quartic）化為關於 $t = x + \frac{1}{x}$ 的二次方程（quadratic）。每一個 t 值都對應四次方程的一對根 k、$\frac{1}{k}$，而實數 x 只能給出 $|t| \geq 2$，且 $t = \pm 2$ 當且僅當 $x = \pm 1$。於是，數相異根的個數，就歸結為：哪些 t 值會出現，以及其中是否有一個等於 ± 2。

解答

根成倒數（reciprocal）對出現

設 $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$。由於 $P(0) = 1 \neq 0$，任何根 k 都不為零，而且

$$k^4 P\left(\tfrac{1}{k}\right) = 1 + ak + bk^2 + ak^3 + k^4 = P(k) = 0.$$

因為 $k^4 \neq 0$，得 $P(\frac{1}{k}) = 0$，所以 k^{-1} 也是根。

代換（substitution）$t = x + \frac{1}{x}$

把 $P(x) = 0$ 除以 x^2（因 $x \neq 0$，這是可以的），並利用 $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$：

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \iff t^2 + at + (b - 2) = 0.$$

設 t_1、t_2 為這個二次方程的根，則 $t_1 + t_2 = -a$，$t_1 t_2 = b - 2$。展開可知

$$P(x) = (x^2 - t_1 x + 1)(x^2 - t_2 x + 1),$$

因為右方等於 $x^4 - (t_1 + t_2)x^3 + (2 + t_1 t_2)x^2 - (t_1 + t_2)x + 1$。所以 P 的根就是 $x^2 - t_1 x + 1$ 的根連同 $x^2 - t_2 x + 1$ 的根。

現在運用「所有根都是實數」這個假設。每個因式 $x^2 - t_i x + 1$ 都有兩個實根 k 和 $\frac{1}{k}$（它們的積是 1），而 $t_i = k + \frac{1}{k}$ 是實數。對於實數 $k \neq 0$，$k + \frac{1}{k}$ 與 k 同號，而且

$$\left|k + \tfrac{1}{k}\right| - 2 = \frac{(|k| - 1)^2}{|k|} \geq 0,$$

等號只在 $k = \pm 1$ 時成立。因此：

- 若 $|t_i| > 2$，因式 $x^2 - t_i x + 1$ 有兩個相異實根，兩者都不等於 ± 1；
- 若 $t_i = 2$，該因式為 $(x-1)^2$；若 $t_i = -2$，則為 $(x+1)^2$。

此外，不同的 t 值不可能有公共根 x，因為 x 決定了 $t = x + \frac{1}{x}$。

第 (i) 部分

若只有一個相異根 k，則 $\frac{1}{k} = k$，所以 $k = \pm 1$，且 $P(x) = (x \mp 1)^4$。展開得

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1, \qquad (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$

兩者都具有所需的形式。所以所求的值為 $a = -4$, $b = 6$ 及 $a = 4$, $b = 6$。

第 (ii) 部分

逐一考慮 t_1、t_2 的各種可能（兩者都是實數，且 $|t_i| \geq 2$）：

- $t_1 \neq t_2$，且兩者都有 $|t_i| > 2$：四個相異根。
- $t_1 = t_2$：四次式是完全平方（perfect square）$(x^2 - t_1 x + 1)^2$，所以若 $|t_1| > 2$，有兩個相異根；若 $t_1 = \pm 2$，則只有一個。
- $\{t_1, t_2\} = \{2, -2\}$：$P(x) = (x-1)^2(x+1)^2$，兩個相異根。
- 其中一個 t_i 為 ± 2，另一個的絕對值大於 2：根為 ± 1（二重）及另外兩個根，即三個相異根。

? **想一想** 為甚麼其中一個 t 值必定是 ± 2？

四個根中只有三個相異，表示有某個根是重根（repeated root）；上面的列表顯示，在出現三個相異根的情況下，這只會在最後一種情況發生。說得更直接一點：根分成一對對互為倒數的根，而相異根的個數是奇數，就迫使某個根等於自己的倒數，即 ± 1。

所以 $t = 2$ 或 $t = -2$ 是 $t^2 + at + b - 2 = 0$ 的根：

$$\begin{aligned} t = 2: &\quad 4 + 2a + b - 2 = 0 \iff b = -2a - 2, \\ t = -2: &\quad 4 - 2a + b - 2 = 0 \iff b = 2a - 2. \end{aligned}$$

因此 $b = 2a - 2$ 或 $b = -2a - 2$，得證。

第 (iii) 部分

當 $b = 2a - 2$ 時，關於 t 的二次方程為

$$t^2 + at + 2a - 4 = (t + 2)(t + a - 2),$$

所以 $t_1 = -2$，$t_2 = 2 - a$。前者給出 $(x + 1)^2$，後者給出 $x^2 - (2 - a)x + 1 = 0$，所以

$$x = -1\text{（二重）}, \qquad x = \frac{2 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}.$$

由於題目告訴我們所有根都是實數，這些根都是實數；這相當於 $a^2 - 4a = a(a - 4) \geq 0$，即 $a \leq 0$ 或 $a \geq 4$。

最後部分

由 (ii)，要有三個相異根，就需要 $b = 2a - 2$ 或 $b = -2a - 2$。反過來，假設 $b = 2a - 2$（且所有根都是實數）。由 (iii)，t 的值為 -2 及 $2 - a$；根據上面的情況列表，除非 $2 - a = \pm 2$，否則恰好有三個相異根：

- $a = 0$，$b = -2$：$t = \pm 2$，$P(x) = (x^2 - 1)^2$，只有兩個相異根；
- $a = 4$，$b = 6$：$t = -2$ 出現兩次，$P(x) = (x + 1)^4$，只有一個根。

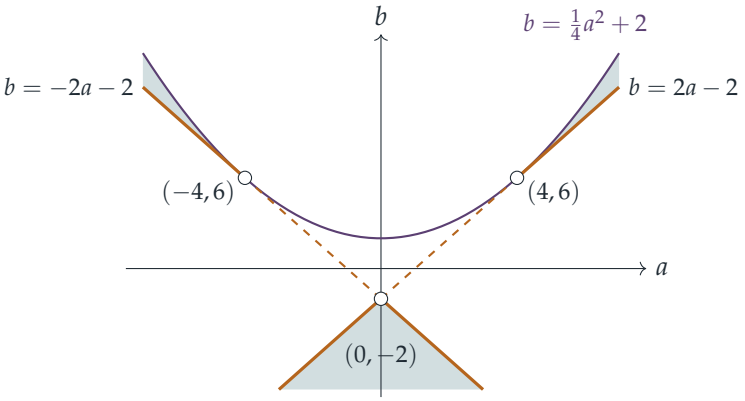
把 x 換成 $-x$，P 會變成同樣形式、但 a 換成 $-a$ 的多項式，這會把兩條直線互換。所以當 $b = -2a - 2$ 時，t 的值為 2 及 $-a - 2$，例外情況為 $a = 0$，$b = -2$ 及 $a = -4$，$b = 6$。

因此，對於使所有根都是實數的實數 a、b，$(*)$ 恰好有三個相異根當且僅當

$$b = 2a - 2 \text{ 或 } b = -2a - 2, \qquad \text{且} (a, b) \neq (0, -2),\ (4, 6),\ (-4, 6).$$

注意 $(4, -10)$ 和 $(-4, -10)$ 是容許的：例如 $a = 4$，$b = -10$ 給出 $t = 2$ 及 $t = -6$，所以有三個相異根。

下圖顯示 (a, b) 平面。陰影區域是所有根都是實數的地方：在兩條直線之下（一個 t 值最多為 -2，另一個至少為 2），或在 $|a| \geq 4$ 時位於直線與拋物線 $b = \frac{1}{4}a^2 + 2$ 之間（兩個 t 值在同一側）。拋物線是 $t_1 = t_2$ 的地方，它與兩條直線相切於 $(\pm 4, 6)$。答案就是兩條直線在陰影區域邊界上的實線部分，再除去三個空心圓點。



（直線的虛線部分，即 $0 < |a| < 4$，位於所有根都是實數的區域之外，這就是 (iii) 需要 $a \leq 0$ 或 $a \geq 4$ 的原因。）

驗算

- 取 $a = -4$，$b = -10$（在 $b = 2a - 2$ 上，且容許）。由 (iii) 得 $x = -1, -1, 3 \pm 2\sqrt{2}$，而確實 $(x+1)^2(x^2 - 6x + 1) = x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 4x + 1$。根 $3 \pm 2\sqrt{2} \approx 5.828,\ 0.172$ 互為倒數，正如預期。
- 在被排除的點 $a = 0$，$b = -2$，四次式為 $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$，只有兩個相異根。
- 我們用電腦對步長為 $\frac{1}{4}$、$|a| \leq 10$、$|b| \leq 15$ 的網格上每一點 (a, b) 以數值方法求根；在 1579 個所有根都是實數的網格點中，恰好是上述條件所預測的 88 個點給出三個相異根。

常見錯誤

- 忘記例外的點：單憑 $b = 2a - 2$ 是必要但不充分的，因為 $(0, -2)$ 和 $(4, 6)$ 都在這條直線上。
- 假設重根必定是 ± 1：二重的一對根 $k, k, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}$ 也是可能的，但這只給出兩個相異根，而不是三個。

STEP 之外

係數正讀反讀都一樣的多項式稱為*迴文多項式*（palindromic，又稱倒數多項式，reciprocal），而 $t = x + \frac{1}{x}$ 這個技巧可以把任何偶數次的迴文多項式的次數減半。同樣的代

換配合 $x = e^{i\theta}$，會得到 $t = 2\cos\theta$；正是用這個方法可以求出 $2\cos(2\pi/n)$ 的極小多項式（minimal polynomial），高斯（Gauss）處理正 17 邊形時也是用這個方法。描述多項式的根在何處重合（正如上圖 (a, b) 平面中的曲線所做的）這個想法，引出了判別式（discriminant）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是進一步閱讀多項式及其根的好起點。

詳細解答

STEP II 2018，第 2 題

純數學 • 凹函數

> **STEP II 2018，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q2

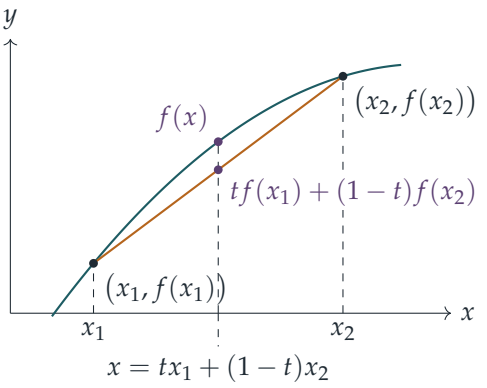
關鍵思路

當 t 由 0 變到 1 時，點 $tx_1 + (1-t)x_2$ 由 x_2 移到 x_1，而 $tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ 就是弦（chord）在該點上方的高度。所以凹性（concavity）的意思是：每一條弦都位於曲線之上或之下——準確來說，在曲線上或曲線下方。掌握了這條兩點不等式之後，只要用兩次就得到三點的版本；再把它應用於適當的凹函數（concave function），並利用 $A + B + C = \pi$，兩條三角形不等式便隨之而來。

解答

示意圖

設 $x = tx_1 + (1-t)x_2$。那麼點 $\big(x,\, tf(x_1) + (1-t)f(x_2)\big)$ 把由 $\big(x_2, f(x_2)\big)$ 到 $\big(x_1, f(x_1)\big)$ 的弦按 $(1-t) : t$ 的比分割，所以它位於弦上、正好在 x 的正上方（或正下方）。定義所說的是：曲線在 x 處的高度至少與弦一樣高。



為何 $f'' < 0$ 推出凹性

若 $x_1 = x_2$，或 $t = 0$ 或 $t = 1$，不等式取等號，所以可設 $0 < t < 1$，並不失一般性（without loss of generality）設 $x_1 < x_2$（對調 x_1, x_2 只不過是對調 t 與 $1-t$）。於是 $x = tx_1 + (1-t)x_2$ 滿足 $x_1 < x < x_2$，且

$$x - x_1 = (1-t)(x_2 - x_1), \qquad x_2 - x = t(x_2 - x_1).$$

由中值定理（mean value theorem），存在 $c_1 \in (x_1, x)$ 及 $c_2 \in (x, x_2)$，使得

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

由於在 (a,b) 上 $f'' < 0$，f' 在該區間上嚴格遞減（strictly decreasing），而 $c_1 < c_2$，所以 $f'(c_1) > f'(c_2)$。代入上面的長度，並約去正因子 $x_2 - x_1$，得

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-t} > \frac{f(x_2) - f(x)}{t}.$$

兩邊乘以 $t(1-t) > 0$，得 $tf(x) - tf(x_1) > (1-t)f(x_2) - (1-t)f(x)$，即

$$f(x) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

所以 f 在 (a,b) 上是凹函數。用文字來說：曲線的斜率不斷下降，所以由 x_1 到 x 的斜率大於由 x 到 x_2 的斜率，曲線便向上鼓起，高於弦。

第 (i) 部分

想一想 哪兩個點、用甚麼權重，加權平均後會得到 $\frac{1}{3}(u+v+w)$？

把 v 和 w 歸為一組：取 $x_1 = u$、$x_2 = \frac{1}{2}(v+w)$ 及 $t = \frac{1}{3}$。由於 x_2 介於 v 與 w 之間，它位於 (a,b) 內，而且

$$tx_1 + (1-t)x_2 = \tfrac{1}{3}u + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}(v+w) = \tfrac{1}{3}(u+v+w).$$

由定義得

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3}f\Big(\frac{v+w}{2}\Big).$$

現在再用一次定義，取 $x_1 = v$、$x_2 = w$、$t = \frac{1}{2}$：$f\big(\frac{1}{2}(v+w)\big) \geq \frac{1}{2}f(v) + \frac{1}{2}f(w)$。由於這一項的係數 $\frac{2}{3}$ 是正數，代入後不等號的方向不變：

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\big(f(v)+f(w)\big) = \frac{f(u)+f(v)+f(w)}{3},$$

這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

在 $0 < x < \pi$ 上取 $f(x) = \sin x$。此時 $f''(x) = -\sin x < 0$，所以 sin 在 $(0,\pi)$ 上是凹函數。三角形的內角滿足 $0 < A, B, C < \pi$ 及 $A + B + C = \pi$，因此在第 (i) 部分中取 $u = A$、$v = B$、$w = C$，得

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

第 (iii) 部分

當 $0 < x < \pi$ 時 $\sin x > 0$，所以 $g(x) = \ln(\sin x)$ 在該區間上有定義，且

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x, \qquad g''(x) = -\operatorname{cosec}^2 x < 0.$$

所以 g 在 $(0,\pi)$ 上是凹函數，由第 (i) 部分得

$$\frac{\ln\sin A + \ln\sin B + \ln\sin C}{3} \leq \ln\sin\frac{\pi}{3} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

兩邊乘以 3 並合併對數，得 $\ln(\sin A \sin B \sin C) \leq \ln\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^3$。由於 exp 是遞增函數，

$$\sin A \times \sin B \times \sin C \leq \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

驗算

兩個上界都由等邊三角形（equilateral triangle）取到：$3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$，以及 $\sin^3\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.6495$。等腰直角三角形給出的和是 $1+\sqrt{2} \approx 2.414$，積是 $\frac{1}{2}$，兩者都低於上界。用電腦檢驗 200 000 個隨機三角形，沒有一個的和超過 2.598076，也沒有一個的積超過 0.649519。非常扁平的三角形（$A, B \to 0$，$C \to \pi$）會令兩者都趨向 0，正如預期。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分，若取 $t = \frac{1}{3}$、$x_1 = u$、$x_2 = v$，得到的是 $\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v$，並非三個數的平均值；第二個點必須是 v 與 w 的中點。
- 在第 (iii) 部分，不能直接把第 (ii) 部分的不等式套用到乘積上；要靠對數把乘積化為和。另外也要檢查 $\ln \sin x$ 有定義，這需要 $\sin x > 0$。
- 只說 $f'' < 0$「意味着曲線向下彎」，本身並不構成弦不等式的證明；中值定理的論證才令它變得嚴謹。

STEP 之外

第 (i) 部分是琴生不等式（Jensen's inequality）的三點情況：對凹函數 f 及總和為 1 的權重 $t_i \geq 0$，有 $f\left(\sum t_i x_i\right) \geq \sum t_i f(x_i)$，其證明正是用歸納法（induction），做法與這裏完全一樣。取 $f = \ln$，便得到算術－幾何平均不等式（AM–GM inequality）；在概率論中，它說的是對凹函數 f，有 $f(\mathrm{E}[X]) \geq \mathrm{E}[f(X)]$。凸函數（convex function）與凹函數，以及第二段背後的中值定理，在 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）中有詳細而嚴謹的討論。

詳細解答

STEP II 2018，第 3 題

純數學 • 旋轉對稱與積分

> **STEP II 2018，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q3

關鍵思路

繞點 (a,b) 作半周旋轉（half-turn），會把 (x,y) 映到 $(2a-x,\,2b-y)$。因此，具有這種對稱性的曲線會把每個 x 值與其反射值 $2a-x$ 配對，並使兩個對應的高度之和為 $2b$。對正切函數而言，最自然的配對是 $x \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - x$，因為 $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = 1/\tan x$。單憑這一條恆等式，就能得出曲線的對稱性；之後，對於關於中心對稱的區間上的積分，根本不用真正積分也能求出結果。

解答

第 (i) 部分

設 $f(x) = (1+\tan x)^{-1}$，利用鏈式法則（chain rule），

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{\cos^2 x\,(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{(\cos x+\sin x)^2} \\ &= -\frac{1}{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x} = -\frac{1}{1+\sin 2x}, \end{aligned}$$

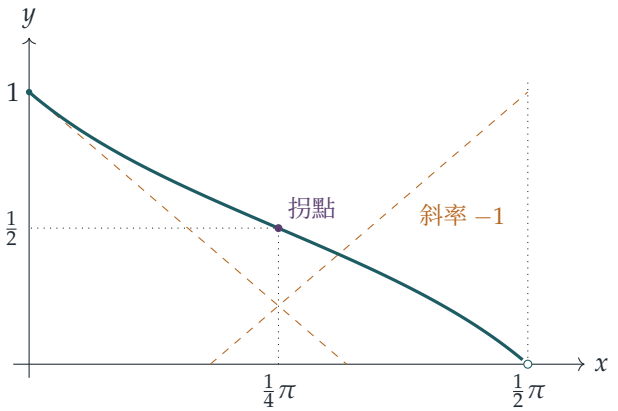
即為所求。（把 $1+\tan x$ 乘以 $\cos x$，正是令整個式子變得簡潔的一步。）

至於值域（range），由 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ 得 $0 \le 2x < \pi$，所以 $\sin 2x$ 取遍 $[0,1]$ 內的每個值：在 $x=0$ 時取值 0，在 $x=\frac{1}{4}\pi$ 時取值 1。因此 $1 \le 1+\sin 2x \le 2$。取倒數（由於各項皆為正數，不等號方向會反轉），再取負號，得

$$-1 \le f'(x) \le -\tfrac{1}{2}.$$

兩個端點都能取到：$f'(0) = -1$ 及 $f'(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$。

關於草圖：$f(0)=1$，$f(\frac{1}{4}\pi)=\frac{1}{2}$，而由於 $\tan x\to\infty$，當 $x\to\frac{1}{2}\pi$ 時 $f(x)\to 0$。曲線處處遞減，斜率介乎 -1 與 $-\frac{1}{2}$ 之間。曲線在 $x=0$ 處最陡（斜率 -1），在 $x=\frac{1}{4}\pi$ 處最平緩，而當 $x\to\frac{1}{2}\pi$ 時又再變陡，斜率趨向 -1。所以 f' 在 $\frac{1}{4}\pi$ 處取得極大值，該點是一個拐點（point of inflection）：曲線在 $[0,\frac{1}{4}\pi)$ 上向上凹（concave up），在 $(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ 上向下凹（concave down）。（事實上 $f''(x)=2\cos 2x/(1+\sin 2x)^2$，它在 $\frac{1}{4}\pi$ 處變號。）



兩條虛線的斜率均為 -1：一條是曲線在 $(0,1)$ 處的切線，另一條是當 $x\to\frac{1}{2}\pi$ 時曲線趨近的方向。曲線看來在繞 $(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2})$ 作半周旋轉下是對稱的，而這正是本題餘下部分的主題。

第 (ii) 部分

繞 (a,b) 旋轉 π 會把 (x,y) 映到 $(2a-x,\,2b-y)$，因為 (a,b) 是一點與其像的中點。曲線關於 (a,b) 具有二階旋轉對稱（rotational symmetry of order 2），當且僅當這個旋轉把曲線映成它自己。（要做到這一點，定義域（domain）必須關於 $x=a$ 對稱，使得只要 x 在定義域內，$2a-x$ 亦在定義域內。）

（$\Rightarrow$）假設曲線具有這種對稱性。對定義域內任意 x，點 $(x,g(x))$ 在曲線上，所以其像 $(2a-x,\,2b-g(x))$ 亦在曲線上。由於曲線是函數的圖像，曲線上 x 坐標為 $2a-x$ 的點只有 $(2a-x,\,g(2a-x))$。所以 $g(2a-x)=2b-g(x)$，即

$$g(x)+g(2a-x)=2b.$$

（$\Leftarrow$）假設對定義域內每個 x 都有 $g(x)+g(2a-x)=2b$。曲線上一般點 $(x,g(x))$ 的像是

$$(2a-x,\,2b-g(x))=(2a-x,\,g(2a-x)),$$

它在曲線上。所以這個旋轉把曲線映入其自身；又由於旋轉兩次即得恆等變換，它把曲線映成其自身。在恆等式中代入 $x=a$，得 $g(a)=b$，與 (a,b) 在曲線上一致。

至於積分，關於原點對稱即 $a = b = 0$，所以 $g(-x) = -g(x)$：g 是奇函數（odd function）。在左半部分作代換（substitution）$x = -u$，

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} g(-u)\,\mathrm{d}u = -\int_{0}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u,$$

所以兩半互相抵消，得

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

第 (iii) 部分

設 $h(x) = \dfrac{1}{1+\tan^k x}$，其中 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$。參考 (i) 的草圖，嘗試取 $a = \frac{1}{4}\pi$、$b = \frac{1}{2}$。定義域 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 關於 $\frac{1}{4}\pi$ 對稱，且 $2a - x = \frac{1}{2}\pi - x$。

? **想一想** 怎樣化簡 $h(\frac{1}{2}\pi - x)$？

利用 $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = \cot x = 1/\tan x$，此式在 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時成立，而此時 $\tan x > 0$。於是，分子分母同乘以 $\tan^k x$，

$$h(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1}{1+\tan^{-k} x} = \frac{\tan^k x}{\tan^k x + 1},$$

所以

$$h(x) + h(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1+\tan^k x}{1+\tan^k x} = 1 = 2\cdot\tfrac{1}{2}.$$

由於 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ 給出 $h(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$，點 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ 在曲線上。由 (ii)，無論正常數 k 取何值，曲線都關於 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ 具有二階旋轉對稱。

至於積分，設 $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} h(x)\,\mathrm{d}x$。區間 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ 關於 $\frac{1}{4}\pi$ 對稱，所以代換 $x = \frac{1}{2}\pi - u$ 把它映成其自身（兩端互換，正好抵消 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ 帶來的負號）：

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} h(\tfrac{1}{2}\pi - u)\,\mathrm{d}u = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \big(1 - h(u)\big)\,\mathrm{d}u \\ &= \Big(\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\Big) - I. \end{aligned}$$

因此 $2I = \frac{1}{6}\pi$，而

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\tan^k x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12}.$$

從幾何角度看，在矩形 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi] \times [0,1]$ 內，半周旋轉把曲線下方的區域與曲線上方的區域互換，所以面積是矩形面積的一半，即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\pi$。這正是把 (ii) 的論證中的 g 換成 $h - \frac{1}{2}$。

驗算

- 取 $k = 1$ 及 $x = \frac{1}{6}\pi$：$h = 1/(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) \approx 0.634$；取 $x = \frac{1}{3}\pi$：$h = 1/(1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 0.366$。兩者之和為 1，與對稱性所言相符。
- 答案與 k 無關。當 $k \to \infty$ 時，h 在 $x < \frac{1}{4}\pi$ 時接近 1，在 $x > \frac{1}{4}\pi$ 時接近 0，所以積分趨向區間 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 的長度，即 $\frac{1}{12}\pi$，結果一致。
- 對 $k = 0.3$、1、2、3.7 及 10 作數值積分，每次都得 0.2617994，與 $\pi/12 \approx 0.2617994$ 吻合。

常見錯誤

- 在 (i) 中把值域寫成 $-1 < f'(x) \leq -\frac{1}{2}$：值 -1 在 $x = 0$ 處取到，而 $x = 0$ 在定義域內。
- 在 (ii) 中只證明一個方向。「當且僅當」需要同時證明對稱性 $\Rightarrow$ 恆等式，以及恆等式 $\Rightarrow$ 對稱性。
- 在 (iii) 中嘗試直接積分 $1/(1 + \tan^k x)$。對一般的 k，根本找不到初等原函數（elementary antiderivative），而對稱性才是整道題的關鍵。

STEP 之外

(iii) 中的技巧，即作代換 $x \mapsto a + b - x$ 後把積分與自身相加，常被稱為「King 法則」（King's rule）。它是利用定義域的對稱性來簡化積分的一個特例；這個想法在羣論（group theory）和物理學中佔有核心地位，因為問題的對稱性可以預言哪些積分為零（如 (ii)），或取簡單的值。同樣的推理可求得對每個 $k > 0$ 都有 $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^k x} = \frac{1}{4}\pi$。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了更多可以用這類對稱論證解決的積分。

詳細解答

STEP II 2018，第 4 題

純數學 • 三角方程

> **STEP II 2018，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q4

關鍵思路

題目給出的恆等式（identity）把餘弦之和化為乘積，而解一條等於零的方程時，我們正需要乘積。在 (i) 中，把頭尾兩項配對、中間兩項配對，立即得到一個公因子（common factor）。在 (ii) 和 (iii) 中，有用的做法是把一切以兩角的半和與半差表示；這樣一來，(ii) 可以因式分解（factorise），而 (iii) 則變成兩個平方之和等於零。

解答

第 (i) 部分

把第一項與最後一項配對，中間兩項配對。由恆等式，

$$\cos x + \cos 4x = 2\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{3x}{2},$$
$$3(\cos 2x + \cos 3x) = 6\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{x}{2}.$$

（由於餘弦是偶函數（even function），我們可寫 $\cos(-\frac{3x}{2}) = \cos\frac{3x}{2}$。）因此左邊為

$$2\cos\tfrac{5x}{2}\left(\cos\tfrac{3x}{2} + 3\cos\tfrac{x}{2}\right).$$

設 $c = \cos\frac{x}{2}$，由三倍角公式（triple-angle formula）$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 得 $\cos\frac{3x}{2} = 4c^3 - 3c$，所以括號內正好是 $4c^3$。因此方程為

$$8\cos\tfrac{5x}{2}\cos^3\tfrac{x}{2} = 0.$$

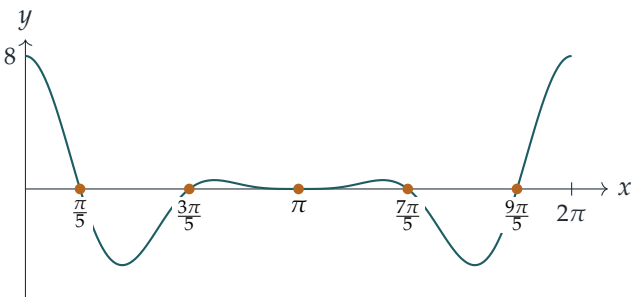
第一個因子。$\cos\frac{5x}{2} = 0$ 即 $\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$，其中 k 為整數，亦即 $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$。要 $0 \le x \le 2\pi$，須 $0 \le 2k+1 \le 10$，所以 $k = 0, 1, 2, 3, 4$。

第二個因子。$\cos\frac{x}{2} = 0$ 且 $0 \le \frac{x}{2} \le \pi$，只得 $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$，即 $x = \pi$，而這已在上面的列表中。

因此解為

$$x = \frac{\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \pi,\ \frac{7\pi}{5},\ \frac{9\pi}{5}.$$

左邊的圖像顯示了這些解；在 $x = \pi$ 處，$\cos\frac{5x}{2}$ 和 $\cos^3\frac{x}{2}$ 同時為零，所以曲線在該處只是觸及橫軸，而不是穿過它。



第 (ii) 部分

對頭兩項使用恆等式，並利用 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$，

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) - \cos 2x = 2\cos x\cos y - 2\cos^2 x + 1.$$

令它等於 1，得

$$2\cos x\,(\cos y - \cos x) = 0,$$

所以 $\cos x = 0$ 或 $\cos y = \cos x$。

- 若 $\cos x = 0$ 且 $0 \le x \le \pi$，則 $x = \frac{\pi}{2}$（此時任何 y 皆可）。
- 若 $\cos y = \cos x$，則 $x = y$，因為餘弦在 $[0, \pi]$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），所以在該區間內每個值只取一次。

所以 $x = y$ 或 $x = \frac{\pi}{2}$，得證。

第 (iii) 部分

設 $s = \frac{1}{2}(x+y)$ 及 $d = \frac{1}{2}(x-y)$。由恆等式得 $\cos x + \cos y = 2\cos s\cos d$，而 $\cos(x+y) = \cos 2s = 2\cos^2 s - 1$。方程變為

$$2\cos s\cos d - 2\cos^2 s + 1 = \tfrac{3}{2} \iff 4\cos^2 s - 4\cos s\cos d + 1 = 0.$$

? **想一想** 一條方程，兩個未知數：它怎能同時確定 x 和 y？

對 $\cos s$ 配方（complete the square）。由於 $1 = \cos^2 d + \sin^2 d$，

$$4\cos^2 s - 4\cos s\cos d + \cos^2 d + \sin^2 d = (2\cos s - \cos d)^2 + \sin^2 d = 0.$$

兩個實數的平方之和為零，當且僅當兩者皆為零，於是得到兩條方程：

$$\sin d = 0 \qquad 及 \qquad 2\cos s = \cos d.$$

由於 $x, y \in [0, \pi]$，有 $-\frac{\pi}{2} \le d \le \frac{\pi}{2}$，而 sin 在此區間內唯一的零點是 $d = 0$。所以 $x = y$，於是 $s = x$ 且 $\cos d = 1$，得 $\cos x = \frac{1}{2}$。由 $0 \le x \le \pi$，即 $x = \frac{\pi}{3}$。

所以唯一的解是

$$x = y = \frac{\pi}{3}.$$

確實，$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$。

同樣的代數運算還說明了更多：對所有 x、y，

$$\tfrac{3}{2} - \big(\cos x + \cos y - \cos(x+y)\big) = \tfrac{1}{2}\big[(2\cos s - \cos d)^2 + \sin^2 d\big] \ge 0,$$

所以 $\frac{3}{2}$ 是左邊所能取的最大值，而這條方程問的正是此最大值在何處取得。

驗算

- 在 (i) 中，當 $x = \frac{\pi}{5}$：由於 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$，有 $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = 0$ 及 $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 0$。當 $x = 0$，左邊為 $1+3+3+1 = 8$，與 $8\cos 0\cos^3 0$ 吻合。
- 用電腦在 $[0, 2\pi]$ 上以細密網格搜尋，恰好找到上述五個零點；在 $[0, \pi]^2$ 上以網格搜尋，找到 $\cos x + \cos y - \cos(x+y)$ 的最大值為 1.5，且只在 $x = y \approx 1.0472 = \frac{\pi}{3}$ 處取得。
- 在 (ii) 中，$x = \frac{\pi}{2}$ 對每個 y 都給出 $\cos(\frac{\pi}{2} + y) + \cos(\frac{\pi}{2} - y) - \cos\pi = -\sin y + \sin y + 1 = 1$。

常見錯誤

- 把 $x = \pi$ 列了兩次，或者漏掉了它：在 (i) 中它來自兩個因子，但只算一個解。
- 在 (ii) 中，除以 $\cos x$，因而失去 $x = \frac{\pi}{2}$。
- 在 (iii) 中，停在關於 $\cos s$ 的二次方程，而沒有利用判別式（discriminant）（或平方和）迫使 $\cos^2 d = 1$。

STEP 之外

(i) 中的係數 $1,3,3,1$ 並非巧合：左邊是 $e^{ix}(1+e^{ix})^3$ 的實部（real part），而由於 $1+e^{ix} = 2\cos\frac{x}{2}\,e^{ix/2}$，一行便得到 $8\cos^3\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$。第 (iii) 部分其實是經典不等式（inequality）$\cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2}$ 的變裝版本，其中 A、B、C 為三角形的三個角（令 $A=x$、$B=y$、$C=\pi-x-y$），等號只在等邊三角形（equilateral triangle）時成立；像這樣求二元函數的最大值，是大學一年級多變量微積分（multivariable calculus）的標準課題。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）展示了複指數如何令這類三角恆等式幾乎變得自動成立。

詳細解答

STEP II 2018，第 5 題

純數學 • 級數的積分

> **STEP II 2018，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q5

關鍵思路

每一部分都是先把函數化成冪級數（power series），再逐項（term by term）積分。在 (i) 中，這只不過是對一個幾何級數（geometric series）積分。在 (ii) 中，把指數函數展開後，每一項都變成形如 $\int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 的積分，而這個積分是一個階乘（factorial）；階乘互相約去後，剩下的正好是 (i) 中的級數。至於 (iii)，分母中的 $\ln x$ 就是線索：代換（substitution）$x = \mathrm{e}^{-t}$ 會把它變成 $-t$，並把整個積分變成兩個 (ii) 中的積分。

解答

第 (i) 部分

當 $|x| < 1$ 時，二項式展開（binomial expansion）（即公比為 $-x$ 的幾何級數）為

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

將兩邊由 0 積分至 x。左邊，由於 $\ln 1 = 0$，所以 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln(1+x)$。右邊逐項積分，得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (\text{將} n+1 \text{ 換成} n) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n},\end{aligned}$$

這正是 $|x| < 1$ 時所要求的結果。

第 (ii) 部分

對所有 x，

$$\mathrm{e}^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ax)^n}{n!} = 1 - ax + \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots.$$

$n = 0$ 的一項是 1，所以

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-ax}}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n x^{n-1}}{n!}.$$

在這裏除以 x 並無問題：餘下的每一項都含有因子 x，所以被積函數（integrand）在 $x = 0$ 處完全正常（它趨向 a）。乘以 e^{-x} 再逐項積分（題目說可以不理會收斂（convergence）問題），得

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} I_{n-1}, \qquad \text{其中} I_m = \int_0^{\infty} x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

想一想 I_m 是甚麼？

取 $u = x^m$ 及 $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 進行分部積分（integration by parts）。當 $m \geq 1$ 時，

$$I_m = \Big[-x^m \mathrm{e}^{-x} \Big]_0^{\infty} + m \int_0^{\infty} x^{m-1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m I_{m-1},$$

因為當 $x \to \infty$ 時 $x^m \mathrm{e}^{-x} \to 0$（指數函數佔上風），而在 $x = 0$ 處它等於 0。由於 $I_0 = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$，可得 $I_m = m!$。

所以 $I_{n-1} = (n-1)!$，而 $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$。因此

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n} = \ln(1 + a),$$

這裏用了第 (i) 部分並取 $x = a$；由於 $|a| < 1$，這是容許的。這正是所要求的結果。

第 (iii) 部分

代入 $x = \mathrm{e}^{-t}$，使得 $\ln x = -t$ 及 $\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$。當 x 由 0 變到 1 時，t 由 ∞ 減至 0。此外 $x^p = \mathrm{e}^{-pt}$ 及 $x^q = \mathrm{e}^{-qt}$。因此

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^{-pt} - \mathrm{e}^{-qt}}{-t}\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt}\right)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t,$$

其中兩個負號互相抵消，而對調上下限則令 p 和 q 互換。現在寫成 $\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt} = \left(1 - \mathrm{e}^{-pt}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-qt}\right)$，並把積分拆開。每一部分都是 (ii) 中的形式，分別取 $a = p$ 和 $a = q$，而兩者都滿足 $|a| < 1$。所以

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(1 + p) - \ln(1 + q) = \ln\left(\frac{1 + p}{1 + q}\right).$$

把積分拆開是合理的，因為兩個積分各自都收斂：由 (ii)，每一個都有有限的值。

驗算

- 若 $p = q$，被積函數為零，而 $\ln \frac{1+p}{1+p} = 0$ 亦確實如此。
- 互換 p 和 q，被積函數和答案都會變號。
- 符號檢查：當 $0 < x < 1$ 時，$\ln x < 0$；若 $p < q$，則 $x^p > x^q$，所以被積函數為負，而 $\ln \frac{1+p}{1+q}$ 亦為負。
- 取 $p = \frac{1}{2}$、$q = 0$，答案為 $\ln \frac{3}{2} \approx 0.405465$。以數值方法計算 $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ 得到相同的值；隨機在 $(-1,1)$ 中選取 p 和 q，結果與公式吻合至小數點後六位。

常見錯誤

- 忘記 e^{-ax} 中 $n = 0$ 的一項會與 1 抵消，結果試圖積分 e^{-x}/x，而這個積分在 0 處發散。
- 在 (iii) 的代換中弄錯符號：要追蹤三個負號（分別來自 $\ln x$、$\mathrm{d}x$ 及對調上下限），弄錯其中一個就會得到 $\ln \frac{1+q}{1+p}$。
- 寫成 $I_{n-1} = n!$ 而不是 $(n-1)!$；這樣階乘就不再約成 $\frac{1}{n}$。

STEP 之外

積分 $I_m = \int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m!$ 就是伽瑪函數（gamma function）$\Gamma(m+1)$，它把階乘推廣到非整數。(iii) 中的積分是「積分號下求導」（differentiating under the integral sign）的經典例子：對 p 求導可以消去麻煩的 $\ln x$，只剩下 $\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$。事實上，只要 $p, q > -1$，結果都成立。題目叫我們不必理會的「交換求和與積分次序」，在數學分析課程中是以一致收斂（uniform convergence）或控制收斂（dominated convergence）來證明其合理性的。如想了解這些步驟背後的分析，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP II 2018，第 6 題

純數學 • 階乘與質數

> **STEP II 2018，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q6

關鍵思路

兩部分都取決於同一個事實：質數（prime）p 整除（divides）$k!$ 當且僅當 $p \le k$。在 (i) 中，一旦 $n \ge 5$，階乘（factorial）便是 5 的倍數，所以 $n! + 5$ 也是。在 (ii) 中，左方只由不超過 $2n-1$ 的數構成，因此任何大於 $2n-1$ 的質數都不能整除它。如果 $m!$ 大得足以包含這樣一個質數，方程便不成立。題中的兩個定理，作用正是令 m 足夠大，並提供那個質數。

解答

第 (i) 部分

當 $n \ge 5$ 時，5 是 $n!$ 的其中一個因數，所以 $5 \mid n!$，從而 $5 \mid n! + 5$。但 $n! + 5 > 5$，所以 $n! + 5$ 有一個嚴格介乎 1 與其本身之間的因數 5，因此不是質數。故此只需檢查 $n \le 4$：

$$1! + 5 = 6, \qquad 2! + 5 = 7, \qquad 3! + 5 = 11, \qquad 4! + 5 = 29.$$

6 不是質數，其餘三個都是。解為

$$(n, p) = (2, 7),\ (3, 11),\ (4, 29).$$

第 (ii) 部分

記 $P_n = 1! \times 3! \times \cdots \times (2n-1)!$。這些階乘中的每一個因數，都是介乎 1 與 $2n-1$ 之間的整數。因此若質數 q 整除 P_n，由於 q 是質數，它必整除其中一個整數，所以 $q \le 2n-1$。這就得出關鍵事實：

$$\text{沒有質數} q > 2n-1 \text{ 整除} P_n. \qquad (*)$$

另一方面，每個質數 $q \le m$ 都整除 $m!$。所以若 $P_n = m!$，則 m 小於每一個大於 $2n-1$ 的質數。

n 較大時。 假設 $n \ge 7$ 且 $P_n = m!$。由定理 1，$m! = P_n > (4n)!$，所以 $m > 4n$（階乘是遞增的）。由定理 2，存在質數 q 使得 $2n < q < 4n$。於是 $q < 4n < m$，所以 $q \mid m! = P_n$。但 $q > 2n > 2n-1$，這與 $(*)$ 矛盾（contradiction）。因此 $n \ge 7$ 時沒有解。

> **想一想** 為甚麼我們不能對所有 n 都直接引用這兩個定理？

定理 1 只聲稱對 $n \ge 7$ 成立，而事實上它在 $n = 6$ 時並不成立。所以 $n = 1, \ldots, 6$ 需要逐一親手檢查。我們再次利用 $(*)$ 來簡化計算。

n 較小時。

- $n = 1$：$P_1 = 1 = 1!$，所以 $m = 1$。
- $n = 2$：$P_2 = 1 \times 6 = 6 = 3!$，所以 $m = 3$。
- $n = 3$：$P_3 = 6 \times 120 = 720 = 6!$，所以 $m = 6$。
- $n = 4$：$P_4 = 720 \times 5040$。由於 $720 = 6!$ 且 $5040 = 7 \times 8 \times 9 \times 10$，得 $P_4 = 6! \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 10!$，所以 $m = 10$。
- $n = 5$：$P_5 = P_4 \times 9! = 10! \times 9! > 10!$，所以 $m \ge 11$。於是質數 11 整除 $m!$，但 $11 > 9 = 2n-1$，與 $(*)$ 矛盾。無解。
- $n = 6$：$P_6 = 10! \times 9! \times 11! > 12!$（因為 $10! \times 9! > 12$），所以 $m \ge 13$。於是質數 13 整除 $m!$，但 $13 > 11 = 2n-1$，與 $(*)$ 矛盾。無解。

在每個有解的情況中，m 都是唯一的，因為正整數的階乘從 $2!$ 起嚴格遞增（而 $1! = 1 < 2!$）。所以解為

$$(n, m) = (1,1),\ (2,3),\ (3,6),\ (4,10).$$

驗算

恆等式 $1!\,3!\,5!\,7! = 10!$ 很容易驗證：兩邊都等於 3 628 800。以電腦在 $n \le 59$ 及 $m < 400$ 範圍內搜尋，恰好找到上述四組解，並確認 $n! + 5$ 只在 $n = 2, 3, 4$ 時是質數（搜尋範圍 $n \le 30$）。搜尋亦確認定理 1 在 $n = 6$ 時不成立，這正是為何確實需要親手檢查 $n = 5$ 和 $n = 6$。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分遺漏 $n = 1$：此時乘積只有單一因數 1!，所以 $(1,1)$ 是一個解。
- 對 $n = 5$ 或 $n = 6$ 使用定理 1。定理只對 $n \geq 7$ 陳述，所以這兩個情況需要各自的論證。
- 未檢查 $q \leq m$ 便聲稱「$q \mid m!$」。這正是我們需要由定理 1 得出 $m > 4n$ 的原因。

STEP 之外

定理 2 就是伯特蘭公設（Bertrand's postulate）：對每個 $n \geq 1$，都存在質數 p 使得 $n < p \leq 2n$。切比雪夫（Chebyshev）於 1852 年證明了它，後來艾狄胥（Erdős）利用中心二項式係數（central binomial coefficient）$\binom{2n}{n}$ 給出了一個優美的初等證明。像 $n! + 1 = m^2$ 這類方程（布羅卡問題，Brocard's problem）至今仍未解決。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是深入學習質數與階乘算術的好起點。

詳細解答

STEP II 2018，第 7 題

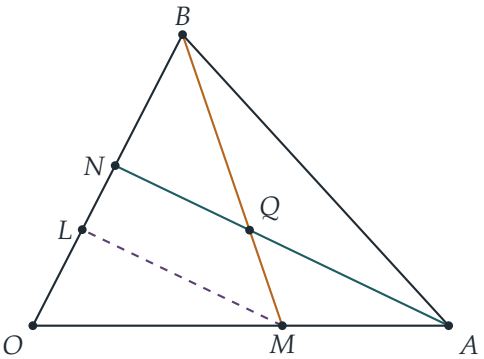
純數學 • 幾何中的向量

> **STEP II 2018，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q7

關鍵思路

由於 M 在 OA 上，而 N 在 OB 上，我們可以把 **m** 寫成 **a** 的倍數，把 **n** 寫成 **b** 的倍數。然後點 Q 可以從兩條路徑到達：一次沿 BM，一次沿 AN。每條路徑都把 **q** 表示為 **a** 與 **b** 的組合。由於 **a** 與 **b** 不平行（parallel），我們可以比較係數（compare coefficients），所有結果便由此而得。

解答



求 m

設 $\mathbf{m} = m\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{n} = n\mathbf{b}$，其中 $0 < m < 1$ 及 $0 < n < 1$，因為 M 和 N 都在三角形的邊上。

沿 BM。Q 位於 M 與 B 之間，且 $MQ : QB = \mu : 1$，所以 Q 位於由 M 到 B 全程的 $\frac{\mu}{1+\mu}$

處：

$$\mathbf{q} = \mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}(\mathbf{b} - \mathbf{m}) = \frac{1}{1+\mu}\,\mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b} = \frac{m}{1+\mu}\,\mathbf{a} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

沿 AN。同理，$NQ : QA = \nu : 1$，所以

$$\mathbf{q} = \mathbf{n} + \frac{\nu}{1+\nu}(\mathbf{a} - \mathbf{n}) = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+\nu}\,\mathbf{n} = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{n}{1+\nu}\,\mathbf{b}.$$

想一想 為甚麼我們可以分別令 **a** 的係數相等，以及 **b** 的係數相等？

O、A、B 是一個真正三角形的頂點，所以 **a** 與 **b** 都非零且不平行。若 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 而 $\beta \neq 0$，則 **b** 會是 **a** 的倍數；所以 $\beta = 0$，繼而 $\alpha = 0$。因此平面上每個向量都只有唯一一種表示為 **a** 與 **b** 組合的方式。

把 **q** 的兩個表達式相減並比較係數：

$$\frac{m}{1+\mu} = \frac{\nu}{1+\nu}, \qquad \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{n}{1+\nu}.$$

第一式給出 $m = \dfrac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}$，即

$$\mathbf{m} = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a},$$

正如所求。第二式以角色互換的同一論證給出

$$\mathbf{n} = \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

求 λ

現在 $\mathbf{l} = \lambda\mathbf{b}$，所以

$$\overrightarrow{ML} = \lambda\mathbf{b} - m\,\mathbf{a}, \qquad \overrightarrow{AN} = n\,\mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

兩者平行當且僅當對某個純量（scalar）k 有 $\overrightarrow{ML} = k\,\overrightarrow{AN}$。比較 **a** 的係數（理由同前）得 $k = m$，再由 **b** 的係數得 $\lambda = kn = mn$。（從幾何角度看：$ML \parallel AN$ 使三角形 OML 與 OAN 相似（similar），所以 $OL/ON = OM/OA$。）因此

$$\lambda = mn = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu} \cdot \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu} = \mu\nu.$$

條件 $\mu\nu < 1$

$$m < 1 \iff (1+\mu)\nu < 1+\nu \iff \mu\nu < 1,$$
$$n < 1 \iff \mu(1+\nu) < 1+\mu \iff \mu\nu < 1,$$

這裏利用了 $1+\nu>0$ 及 $1+\mu>0$ 來消去分母。所以，在 μ 和 ν 均為正數的前提下，條件 $\mu\nu<1$ 正正就是 M 嚴格位於 O 與 A 之間、N 嚴格位於 O 與 B 之間所需的條件。換句話說，直線 AN 與 BM（Q 按這些比把它們分割）在三角形內部相交。這條件亦表示 $\lambda<1$：經過 M 而平行於 AN 的直線與 OB 相交於 O 與 B 之間，而由於 M 在邊 OA 上，這是必然的。若 $\mu\nu=1$，則 $M=A$ 及 $N=B$，整個圖形退化；若 $\mu\nu>1$，則 M 和 N 位於延長邊上 A 和 B 之外。

驗算

- 中線。若 M 和 N 是中點，則 Q 是重心（centroid），它把每條中線（median）分成由頂點起計 2 : 1 的比。所以 $\mu=\nu=\frac{1}{2}$，而公式給出 $m=\frac{(3/2)(1/2)}{3/2}=\frac{1}{2}$，與預期相符。於是 $\lambda=\frac{1}{4}$：在三角形 OAN 中應用中點定理（midpoint theorem），L 是 ON 的中點，即位於 OB 全長的四分之一處。
- 對稱性。互換 $A\leftrightarrow B$ 會互換 $M\leftrightarrow N$ 及 $\mu\leftrightarrow\nu$，而 m 與 n 的公式亦正確地互換。答案 $\lambda=\mu\nu$ 同樣是對稱的。
- 以電腦對約 10^5 個隨機三角形進行驗算，在邊上隨機取 M 和 N，量度 μ 和 ν，並確認 m、n 及 $\lambda=\mu\nu$ 均準確至 10^{-12} 以內。例如 $m=0.6$ 及 $n=0.55$（如圖所示）給出 $\lambda=0.33$。

常見錯誤

- 把分點比（section ratio）的方向弄反：Q 位於由 M 到 B 全程的 $\frac{\mu}{1+\mu}$ 處，而不是由 B 到 M。
- 令係數相等而不說明原因。這一步依賴 **a** 與 **b** 不平行。
- 以為「三角形是銳角三角形」這個條件會起作用。其實不會：論證對任何三角形都成立。

STEP 之外

比較係數之所以可行，是因為 **a** 與 **b** 線性無關（linearly independent），所以它們構成平面的一組基（basis）。這是大學第一個線性代數（linear algebra）課程的核心概念。簡潔的答案 $\lambda=\mu\nu$ 是一個比例結果，與塞瓦定理（Ceva's theorem）及梅涅勞斯定理（Menelaus' theorem）同屬一類，而這些定理用重心坐標（barycentric coordinates）表達最為簡潔。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）對基與坐標有細緻的闡述。

詳細解答

STEP II 2018，第 8 題

純數學 • 伯努利微分方程

STEP II 2018，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s2-q8

關鍵思路

兩條方程都是伯努利方程（Bernoulli equation）：右方出現 y 的冪，破壞了線性（linearity），但只要選取 y 的適當冪作為新變量，方程便會變成線性。設 $y = v^2$（或 $y = v^3$），公因子 v（或 v^2）可以約去，餘下的是一條常係數一階線性方程（first-order linear equation），可用積分因子（integrating factor）或分離變量（separating variables）求解。至於作圖，比較兩條曲線最簡潔的方法，是把兩者都以同一個指數 $u = e^{-t/6}$ 表示。

解答

題目寫的是 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，但自變量（independent variable）自始至終都是 t，所以我們寫成 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$。

第 (i) 部分

設 $y = v^2$，其中 $v = \sqrt{y} \geq 0$。於是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 及 $y^{1/2} = v$，方程變為

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v - \beta v^2.$$

其中一個解是 $v \equiv 0$，即常數解（constant solution）$y \equiv 0$。在 $v \neq 0$ 之處，我們可以除以 v：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{2}v = \frac{\alpha}{2}.$$

這是線性方程，積分因子為 $e^{\beta t/2}$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ve^{\beta t/2}\right) = \frac{\alpha}{2}e^{\beta t/2} \quad \Longrightarrow \quad ve^{\beta t/2} = \frac{\alpha}{\beta}e^{\beta t/2} + C.$$

因此通解（general solution）為

$$\sqrt{y} = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}, \qquad \text{即} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}\right)^2,$$

其中 C 為常數（只取括號內非負的範圍，因為 $v = \sqrt{y} \geq 0$），另外還有常數解 $y \equiv 0$。取 $C = 0$ 則得到另一個常數解 $y \equiv \alpha^2/\beta^2$。

要 $y_1(0) = 0$，便需要 $v(0) = 0$，故 $C = -\alpha/\beta$，而

$$\boxed{y_1(t) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - e^{-\beta t/2}\right)^2}$$

這個解不是常數，而且當 $t \geq 0$ 時括號 $1 - e^{-\beta t/2}$ 非負，所以它確實是一個解。（在 $t > 0$ 時 $v > 0$，所以除以 v 是合理的。）

第 (ii) 部分

現在冪是 $\frac{2}{3}$，所以我們希望 $y^{2/3}$ 與 y 有公因子。設 $y = v^3$，即 $v = y^{1/3} \geq 0$。於是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3v^2\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 及 $y^{2/3} = v^2$，得

$$3v^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v^2 - \beta v^3.$$

想一想 你會怎樣想到代換 $v = y^{1/3}$？

在第 (i) 部分，$v = y^{1-\frac{1}{2}}$ 令兩邊都有公因子 v。對伯努利方程 $\dot{y} = \alpha y^n - \beta y$ 而言，代換 $v = y^{1-n}$ 總是奏效，而這裏 $1 - n = \frac{1}{3}$。

除了 $v \equiv 0$（即常數解 $y \equiv 0$）之外，除以 v^2：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{3}v = \frac{\alpha}{3}.$$

以積分因子 $e^{\beta t/3}$，與之前完全一樣，得

$$y^{1/3} = \frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}, \qquad \text{即} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}\right)^3,$$

其中 D 為常數（括號內非負）。條件 $y_2(0) = 0$ 迫使 $D = -\alpha/\beta$，故

$$\boxed{y_2(t) = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - e^{-\beta t/3}\right)^3}$$

第 (iii) 部分

當 $\alpha = \beta$ 時，

$$y_1(t) = \left(1 - e^{-t/2}\right)^2, \qquad y_2(t) = \left(1 - e^{-t/3}\right)^3.$$

每條曲線的形狀。兩條曲線都從 0 開始並且遞增，因為 $1-e^{-t/2}$ 和 $1-e^{-t/3}$ 都由 0 增加並趨向 1。當 $t\to\infty$ 時兩者都趨向 1，即 (i) 的常數解 $y=\alpha^2/\beta^2=1$ 與 (ii) 的常數解 $y=\alpha^3/\beta^3=1$。求導得

$$y_1'=e^{-t/2}\left(1-e^{-t/2}\right),\qquad y_2'=e^{-t/3}\left(1-e^{-t/3}\right)^2,$$

所以兩者在原點的斜率都是零。斜率 $y_1'=w(1-w)$（其中 $w=e^{-t/2}$）在 $w=\frac12$ 時最大，所以 y_1 在 $t=2\ln 2$、$y_1=\frac14$ 處有拐點（point of inflection）。同樣，$y_2'=w(1-w)^2$（其中 $w=e^{-t/3}$）在 $w=\frac13$ 時最大，得拐點在 $t=3\ln 3$、$y_2=\frac{8}{27}$。每條曲線都呈 S 形，由原點上升至漸近線（asymptote）$y=1$。

相對位置。設 $u=e^{-t/6}$，則當 $t>0$ 時 $0<u<1$，且 $e^{-t/2}=u^3$、$e^{-t/3}=u^2$。於是

$$y_1=(1-u^3)^2=(1-u)^2(1+u+u^2)^2,\qquad y_2=(1-u^2)^3=(1-u)^3(1+u)^3,$$

因此

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{(1+u+u^2)^2}{(1-u)(1+u)^3}.$$

展開得 $(1+u+u^2)^2=1+2u+3u^2+2u^3+u^4$ 及 $(1-u)(1+u)^3=(1-u^2)(1+u)^2=1+2u-2u^3-u^4$。分子減分母為

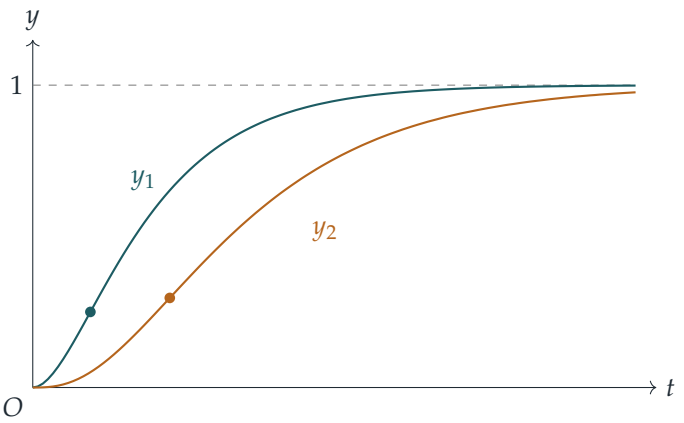
$$3u^2+4u^3+2u^4>0\qquad(0<u<1),$$

而分母為正，所以 $y_1/y_2>1$。因此

$$y_1(t)>y_2(t)\quad\text{對所有}t>0:$$

兩條曲線只在原點相交，而在其他地方 y_1 都位於 y_2 之上。

這與兩端的表現吻合。在 $t=0$ 附近，$y_1\approx\frac{t^2}{4}$，而 $y_2\approx\frac{t^3}{27}$，後者小得多。當 t 很大時，$1-y_1\approx 2e^{-t/2}$ 而 $1-y_2\approx 3e^{-t/3}$，且 $e^{-t/3}$ 衰減得較慢，所以 y_2 離漸近線較遠。



圖中的點標示拐點：y_1 上的 $(2\ln 2,\frac14)$ 及 y_2 上的 $(3\ln 3,\frac{8}{27})$。

驗算

- 代回原方程：對 y_1，取 $\alpha = \beta = 1$，則 $y_1^{1/2} - y_1 = (1-w) - (1-w)^2 = w(1-w)$，其中 $w = e^{-t/2}$，這正是 y_1'。
- t 很大時：$y_1 \to \alpha^2/\beta^2$，即 $\alpha y^{1/2} = \beta y$ 的非零解；同樣 $y_2 \to \alpha^3/\beta^3$，即 $\alpha y^{2/3} = \beta y$ 之處。
- 取 $\alpha = \beta = 1$ 的數值：在 $t = 2$ 時，$y_1 \approx 0.400$、$y_2 \approx 0.115$；在 $t = 10$ 時，$y_1 \approx 0.987$、$y_2 \approx 0.897$。兩條公式亦已用電腦對微分方程作逐步數值積分加以驗證。

常見錯誤

- 除以 v（或 v^2）時沒有指出 $y \equiv 0$ 也是一個解。正因如此，題目才要求通過原點的非常數解。
- 弄錯指數：代換 $y = v^3$ 得出的是 $e^{-\beta t/3}$，而不是 $e^{-\beta t/2}$。
- 單憑斜率判斷兩條曲線的高低。在兩條曲線高度相同、$y \in (0,1)$ 之處，$y^{2/3} > y^{1/2}$，所以 y_2 在那裏會上升得較快；但這並不能說明哪條曲線較高，因此需要直接比較。

STEP 之外

這些是伯努利方程，屬大學一年級的標準方程類型，以 $v = y^{1-n}$ 求解。它們亦展示了解的非唯一性（non-uniqueness）：由於 $y^{1/2}$ 和 $y^{2/3}$ 在 $y = 0$ 處斜率無限大，右方在該處不滿足利普希茨條件（Lipschitz condition），於是 $y \equiv 0$ 與 y_1 都通過原點。事實上，先停留在 0 直至任意時刻 t_0，然後沿着 $y_1(t - t_0)$ 走，便得到一整族解。皮卡–林德勒夫定理（Picard–Lindelöf theorem）準確說明了何時不會出現這種情況。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《基礎微分方程》）同時涵蓋伯努利方程及解的存在性與唯一性。

詳細解答

STEP II 2018，第 9 題

力學 • 重力作用下的碰撞

> **STEP II 2018，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q9

關鍵思路

兩粒珠子（bead）的加速度始終相同，都是向下的 g，所以兩者之間的相對運動是等速的。A 反彈之後，兩珠之間的距離以恆定速率縮小，由此即可求出碰撞所需的時間。最後一部分則純粹是能量與動量的計算：知道 A 撞到地面時的速率，就知道它離開碰撞時的速率，其餘交給牛頓實驗定律（Newton's experimental law）便可。

解答

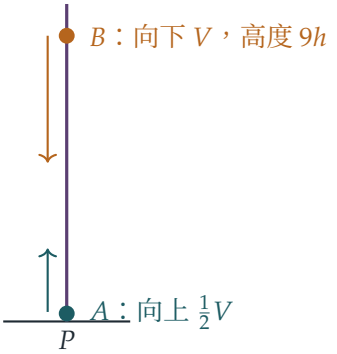
我們把兩粒珠子視為質量同為 m 的質點（particle），套在一條光滑（smooth）的豎直金屬線上，並忽略空氣阻力，因此在兩次撞擊之間，每粒珠子都只受重力作用而自由運動。取向上為正方向，高度由 P 起量度。

直至第一次反彈

A 由靜止下落 $8h$，故由能量守恆（conservation of energy）得

$$V^2 = 2g(8h) = 16gh, \qquad V = 4\sqrt{gh}.$$

在同一段時間內，B 亦由靜止下落了 $8h$（運動完全相同），所以此刻 B 位於高度 $17h - 8h = 9h$，以速率 V 向下運動。A 從地面以速率 $\frac{1}{2}V$ 向上反彈。



碰撞

從 A 離開地面的一刻起，兩粒珠子的加速度都是 $-g$，因此 B 相對於 A 的速度一直保持其初始值

$$(-V)-\tfrac{1}{2}V=-\tfrac{3}{2}V.$$

想一想 為甚麼計算兩珠何時相遇時可以不理會重力？

重力令兩者的速度改變相同的量 $-gt$，所以在兩者之差中互相抵消。於是 $9h$ 的距離以恆定速率 $\frac{3}{2}V$ 縮小，碰撞發生在反彈後

$$\tau=\frac{9h}{\frac{3}{2}V}=\frac{6h}{V}=\frac{6h}{4\sqrt{gh}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}$$

的時刻。（我們還需要 A 在那時仍在空中；稍後會看到確實如此。）此時 A 的高度為

$$H=\tfrac{1}{2}V\tau-\tfrac{1}{2}g\tau^2=2\sqrt{gh}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}-\frac{1}{2}g\cdot\frac{9h}{4g}=3h-\frac{9}{8}h=\frac{15}{8}h,$$

正如所求。碰撞前一瞬間，

$$\text{速度：}A=\tfrac{1}{2}V-g\tau=2\sqrt{gh}-\tfrac{3}{2}\sqrt{gh}=\tfrac{1}{2}\sqrt{gh},$$
$$\text{速度：}B=-V-g\tau=-4\sqrt{gh}-\tfrac{3}{2}\sqrt{gh}=-\tfrac{11}{2}\sqrt{gh}.$$

所以 A 仍在上升，而且

$$u_A=\tfrac{1}{2}\sqrt{gh}\,(\text{向上}),\qquad u_B=\tfrac{11}{2}\sqrt{gh}\,(\text{向下}).$$

驗算一下：B 的高度為 $9h-V\tau-\frac{1}{2}g\tau^2=9h-6h-\frac{9}{8}h=\frac{15}{8}h$，同樣吻合。

恢復係數

設 e 為兩珠之間的恢復係數（coefficient of restitution），並設 v_A、v_B 為兩者在碰撞後一瞬間的速度（向上為正）。暫且以 $\sqrt{gh}$ 為單位，於是 $u_A=\frac{1}{2}$ 向上，$u_B=\frac{11}{2}$ 向下。

動量（momentum）（兩者質量相等，而在瞬間發生的碰撞中，重力的衝量（impulse）可以忽略）：

$$v_A + v_B = \tfrac{1}{2} - \tfrac{11}{2} = -5.$$

牛頓實驗定律：兩珠以速率 $\frac{1}{2} + \frac{11}{2} = 6$ 互相接近，碰撞後位於上方的 B 以此速率的 e 倍與 A 分離：

$$v_B - v_A = 6e.$$

兩式相減，得 $v_A = -\frac{1}{2}(5+6e)$，所以 A 以速率 $w = \frac{1}{2}(5+6e)\sqrt{gh}$ 向下運動。

現在 A 從高度 $\frac{15}{8}h$ 以初速率 w 下落，並以速率 V 到達地面（它在 B 下方，且向下運動得較快，因為 $v_B = -5 - v_A = \frac{1}{2}(6e-5) > v_A$，所以兩珠不會在此之前再次相遇）。由能量守恆，

$$V^2 = w^2 + 2g \cdot \tfrac{15}{8}h \quad \Longrightarrow \quad w^2 = 16gh - \tfrac{15}{4}gh = \tfrac{49}{4}gh,$$

故 $w = \frac{7}{2}\sqrt{gh}$。於是 $\frac{1}{2}(5+6e) = \frac{7}{2}$，得

$$e = \frac{1}{3}.$$

碰撞後，A 以 $\frac{7}{2}\sqrt{gh}$ 向下運動，B 以 $\frac{3}{2}\sqrt{gh}$ 向下運動。

驗算

- 動能（kinetic energy）：碰撞前總動能為 $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{1}{4} + \frac{121}{4}) = \frac{61}{4}mgh$；碰撞後為 $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{49}{4} + \frac{9}{4}) = \frac{29}{4}mgh$。能量有所損失，這正是 $e < 1$ 時應有的情況。
- 若 $e = 1$（且質量相等），兩珠會直接交換速度，於是 A 會以 $\frac{11}{2}\sqrt{gh}$ 離開，著地時速率大於 V；若 $e = 0$，兩珠會以 $\frac{5}{2}\sqrt{gh}$ 一同運動，A 著地時速率會較小。$\frac{1}{3}$ 這個數值合理地介乎兩者之間。
- 以電腦逐步模擬整個運動（取 $g = h = 1$），得出碰撞發生在高度 1.875，兩者速率分別為 0.5 和 5.5；並且在 $e = \frac{1}{3}$ 時，第二次著地的速率為 $4 = V$。

常見錯誤

- 忘記在 A 下落期間 B 也一直在下落：反彈時 B 位於 $9h$，而不是 $17h$，而且已經以速率 V 運動。
- 牛頓定律中的正負號錯誤：所有速度都應以同一個正方向表示，並檢查得出的分離速率是否為正。

STEP 之外

在其中一粒下落珠子的參考系（frame）中考慮問題，這個技巧讓我們初嚐伽利略相對性（Galilean relativity）的滋味：在均勻重力場中，自由下落的參考系完全感受不到重力，而這正是愛因斯坦（Einstein）等效原理（equivalence principle）的出發點。大學一年級力學中的碰撞問題，通常在質心參考系（centre-of-mass frame）中求解；在這個參考系中，恢復係數為 e 的撞擊只不過是把兩個速度反向，並乘以 e。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這兩個概念都有細緻的論述。

詳細解答

STEP II 2018，第 10 題

力學 • 伸長繩上的運動學

STEP II 2018，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

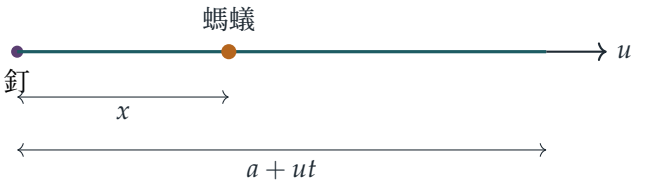
step.maths.org/questions/18-s2-q10

本題在 *Beyond STEP* 第 11.12 節橡皮繩上的螞蟻中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/rubber-rope.html

關鍵思路

由於繩子是均勻（uniform）的，它在每一處都以相同的倍數拉長，所以繩上每一點沿繩的比例位置保持不變。因此，繩上一點的速率與它跟釘的距離成正比。這樣，螞蟻的方程便是線性（linear）的，而最自然要追蹤的量是螞蟻沿繩所處的比例位置 $x/(a+ut)$，而不是 x 本身。

解答



繩上一點的速率

在時間 t，自由端與釘的距離為 $a+ut$，這也就是繩子的長度。繩子是均勻的，所以整條繩都以相同的倍數 $(a+ut)/a$ 被拉長。因此，在 $t=0$ 時與釘相距 x_0 的繩上一點，始終位於沿繩相同的比例位置 x_0/a：

$$x = \frac{x_0}{a}(a+ut).$$

固定 x_0 求導，得其速率為 $\frac{x_0 u}{a}$；以該點目前的位置 x 表示，

$$\text{點的速率，其中該點與釘相距} x = \frac{ux}{a+ut}.$$

作為驗證，此速率在釘處為 0，在自由端為 u。

螞蟻的方程

螞蟻相對於釘的速率，等於 v 加上牠腳下繩子的速率，所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a+ut}.$$

利用商法則（quotient rule），再代入這條方程，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) &= \frac{1}{a+ut}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{ux}{(a+ut)^2} \\ &= \frac{1}{a+ut}\left(v + \frac{ux}{a+ut}\right) - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{v}{a+ut},\end{aligned}$$

此即所求。

到達末端所需的時間

由 0 積分至 t，並利用 $t=0$ 時 $x=0$：

$$\frac{x}{a+ut} = \int_0^t \frac{v}{a+us}\,\mathrm{d}s = \frac{v}{u}\ln\left(\frac{a+ut}{a}\right) = \frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{ut}{a}\right).$$

左邊是螞蟻已走過的繩長比例，當它等於 1 時，螞蟻便到達末端。右邊由 0 開始持續遞增且無上界，所以這情況恰好發生一次，發生於時間 T，其中

$$\ln\left(1+\frac{uT}{a}\right) = k \iff 1+\frac{uT}{a} = \mathrm{e}^k \iff uT = a(\mathrm{e}^k - 1),$$

這正是題目給出的結果。

回程

現在螞蟻朝釘的方向走，所以牠自身沿繩的速度為 $-v$，於是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v + \frac{ux}{a+ut}.$$

想一想 我們需要重做一次商法則的計算嗎？

不需要：上面的推導除了 v 的正負號外完全不變，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}.$$

回程始於 $t = T$，此時螞蟻在繩的末端，即 $x/(a+ut) = 1$。由 T 積分至 t，

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{a+ut}{a+uT}\right).$$

當這個比例為 0 時，螞蟻便到達釘處；這首先發生於時間 t_1，其中

$$\ln\left(\frac{a+ut_1}{a+uT}\right) = k \iff a+ut_1 = (a+uT)\,\mathrm{e}^k.$$

所以回程需時

$$t_1 - T = \frac{(a+uT)(\mathrm{e}^k-1)}{u}.$$

由去程可知 $\mathrm{e}^k - 1 = uT/a$ 及 $a+uT = a\mathrm{e}^k$，所以

$$t_1 - T = \frac{a\mathrm{e}^k}{u}\cdot\frac{uT}{a} = T\mathrm{e}^k.$$

回程需時 $T\mathrm{e}^k$，比去程長 e^k 倍。

驗算

- 若 $u \to 0$，繩子不會拉長：$k \to 0$，而 $T = a(\mathrm{e}^k-1)/u \to a/v$，同時回程時間 $T\mathrm{e}^k \to a/v$ 亦然，正合預期。
- 回程時間較長，這是合理的：回程時，螞蟻腳下的繩子會把牠帶離釘。
- 對隨機選取的 a、u 和 v 值（例如 $a=1$、$u=v$，因此 $k=1$ 及 $T = \mathrm{e}-1 \approx 1.718$），以數值方法逐步推進兩條微分方程（differential equation），結果顯示螞蟻在時間 T 到達末端，再經過 $T\mathrm{e} \approx 4.67$ 後回到釘處，與公式吻合。

常見錯誤

- 以為繩上每一點都以速率 u 移動；其實只有自由端是這樣。
- 忘記回程始於 $t = T$ 而非 $t = 0$，因此積分常數（constant of integration）會改變。
- 題目要求只以 T 和 k 表示答案，卻把答案停留在 $(a+uT)(\mathrm{e}^k-1)/u$。

STEP 之外

無論繩子拉長得多快，螞蟻總會到達末端，因為 $\int \mathrm{d}t/(a+ut)$ 發散（diverges）。螞蟻已走過的距離佔繩長的比例，隨時間的對數（logarithm）增長；倘若拉長得更快（例如以指數方式），該積分便會收斂（converge），螞蟻就可能永遠到不了。同樣的概念——在一

個本身正在膨脹的空間中以固定速率前進——也出現在宇宙學（cosmology）中，它決定了遙遠星系發出的光能否到達我們。這裏透過找出合適的量來解線性方程，其實是積分因子法（integrating-factor method）的一個例子；參見 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）。

詳細解答

STEP II 2018，第 11 題

力學 • 摩擦力與力矩

STEP II 2018，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s2-q11

關鍵思路

三條方程正好確定三個未知的接觸力：水平方向的牛頓（Newton）第二定律（Newton's second law）、豎直方向沒有加速度（acceleration），以及題目給定的條件——對質心（centre of mass）的力矩（moment）互相平衡。只要把兩個法向反作用力（normal reaction）都用加速度 a 表示，兩種失效情況便各自變成 a 的一個臨界值。前輪在其反作用力降至零時離地；後輪在所需的摩擦力（friction）超過其反作用力的 μ 倍時打滑。哪個臨界值較低，哪種情況便先發生。

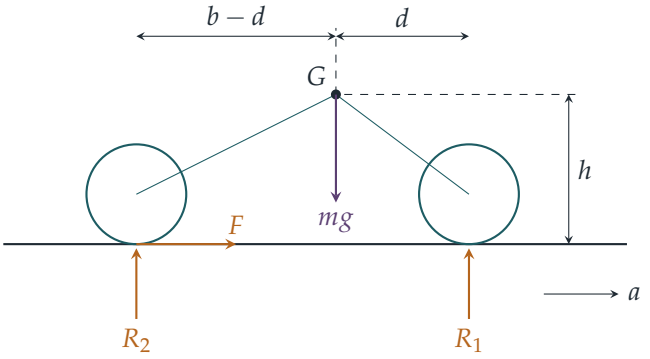
解答

模型與受力

把電單車視為沿直線運動的剛體（rigid body），向右的加速度為 $a \geq 0$。路面水平，所以質心 G 沒有豎直方向的加速度，而車身亦不轉動。所受的力為：

- 重力 mg，於 G 處向下作用；
- 前輪的法向反作用力 R_1（前輪光滑，所以該處沒有摩擦力）；
- 後輪的法向反作用力 R_2 及摩擦力 F。引擎驅動後輪，所以 F 向前作用，而且是唯一的水平力。

前輪接觸點在 G 前方水平距離 d 處，後輪接觸點則在 G 後方 $b - d$ 處。兩者都在 G 下方距離 h 處。



以 a 表示反作用力

水平及豎直方向分別有

$$F = ma, \qquad R_1 + R_2 = mg.$$

現在對 G 取力矩，以逆時針為正（即會令前輪抬起的方向）。重力對 G 沒有力矩。R_1 在 G 前方距離 d 處向上作用，產生逆時針力矩 $R_1 d$。R_2 在 G 後方距離 $b-d$ 處向上作用，產生順時針力矩 $R_2(b-d)$。而 F 沿 G 下方距離 h 的直線向前作用，所以產生逆時針力矩 Fh。令總力矩為零：

$$R_1 d + Fh = R_2(b-d).$$

代入 $F = ma$ 及 $R_1 = mg - R_2$：

$$mgd - R_2 d + mah = R_2(b-d) \quad \Longrightarrow \quad R_2 = \frac{m(gd+ah)}{b},$$

於是

$$R_1 = mg - R_2 = \frac{m\big((b-d)g - ah\big)}{b}.$$

隨着 a 增大，重量由前輪轉移到後輪：R_1 減小，R_2 增大。

兩種失效各在何時發生？

前輪。只要 $R_1 \geq 0$，前輪便保持貼地，即

$$a \leq \frac{(b-d)g}{h} =: a_{\text{離地}}.$$

後輪。只要 $F \leq \mu R_2$，後輪便不會打滑，即

$$ma \leq \frac{\mu m(gd+ah)}{b} \iff a(b-\mu h) \leq \mu dg.$$

? **想一想** 為甚麼我們可以除以 $b-\mu h$ 而不必把不等式（inequality）反向？

這正是給定條件 $\mu < b/h$ 的用途：它表示 $b - \mu h > 0$。因此後輪在以下情況下保持抓地：

$$a \le \frac{\mu d g}{b - \mu h} =: a_{\text{打滑}}.$$

（若沒有這個條件，可提供的摩擦力的增長速度至少與所需摩擦力一樣快，後輪便永遠不會打滑。）

兩個臨界值都是正數，而當 a 由零開始增大時，後輪先打滑當且僅當 $a_{\text{打滑}} < a_{\text{離地}}$。由於 $b - \mu h > 0$ 且 $h > 0$，我們可以交叉相乘：

$$\begin{aligned}
\frac{\mu d g}{b - \mu h} < \frac{(b-d)g}{h} &\iff \mu d h < (b-d)(b - \mu h) \\
&\iff \mu d h + \mu h(b-d) < b(b-d) \\
&\iff \mu h b < b(b-d) \\
&\iff \mu < \frac{b-d}{h},
\end{aligned}$$

最後一步除以 $bh > 0$。所以若 $(*)$ 成立，後輪會在前輪離地之前打滑，此即所求。（事實上，這串推導顯示兩個命題是等價的。）

$(*)$ 成立時的最大加速度

若 $(*)$ 成立，則 $a_{\text{打滑}} < a_{\text{離地}}$。任何不超過 $a_{\text{打滑}}$ 的加速度都同時滿足兩個條件，所以前輪貼地而後輪抓地。任何更大的加速度都需要 $F > \mu R_2$。因此不打滑時的最大加速度為

$$a_{\max} = \frac{\mu d g}{b - \mu h},$$

此即所求。

$(*)$ 不成立時

此時 $\mu \ge \dfrac{b-d}{h}$，所以同一串等價推導（把 $<$ 換成 $\ge$）給出 $a_{\text{離地}} \le a_{\text{打滑}}$。因此每個不超過 $a_{\text{離地}}$ 的加速度都令 $R_1 \ge 0$，同時亦滿足 $a \le a_{\text{打滑}}$，所以後輪不會打滑。超過 $a_{\text{離地}}$ 便需要 $R_1 < 0$，而只要前輪接觸路面，這是不可能的。所以前輪保持接觸時的最大加速度為

$$a_{\max} = \frac{(b-d)g}{h}.$$

在這個加速度下 $R_1 = 0$：電單車正處於翹頭（wheelie）的臨界狀態，全部重量都落在後輪上。

驗算

- 當 $a = 0$：$R_2 = mgd/b$ 及 $R_1 = mg(b-d)/b$，正是按槓桿原理（lever rule）得出的一般靜態分配。較接近 G 的車輪承受較多重量。
- 在邊界情況 $\mu = (b-d)/h$ 下，有 $b - \mu h = d$，所以 $a_{\text{打滑}} = \mu g = (b-d)g/h = a_{\text{離地}}$。兩個答案一致，理應如此。
- 數值例子：$b = 1.5\,\text{m}$，$d = 0.75\,\text{m}$，$h = 0.6\,\text{m}$，$\mu = 0.8$，$g = 9.8\,\text{m s}^{-2}$。此時 $(b-d)/h = 1.25 > \mu$，而 $a_{\text{打滑}} = 5.88/1.02 \approx 5.76\,\text{m s}^{-2}$，遠低於 $a_{\text{離地}} = 12.25\,\text{m s}^{-2}$。用電腦對大量隨機設定的電單車進行檢驗，逐步增大 a 並記錄哪個條件先失效，結果與兩條公式都吻合。

常見錯誤

- 把摩擦力力矩的正負號弄錯。在 G 下方向前的摩擦力傾向令前輪抬起，這正是加速會令前輪減載的原因。
- 除以 $b - \mu h$ 卻沒有說明它為何是正數。這正是條件 $\mu < b/h$ 唯一的作用。
- 對接觸點取力矩並令總力矩為零。電單車正在加速，所以力矩只在對 G 時平衡，對其他點則不然。

STEP 之外

題目給定的力矩條件，是剛體定律的一個特例：對質心的角動量（angular momentum）變化率等於對質心的總轉矩（torque）。這裏角動量為零，因為電單車不轉動。若對任何其他點取力矩，加速中的物體會由 ma 額外產生一個「虛擬」（fictitious）轉矩，這便解釋了最後一個常見錯誤。同樣的重量轉移分析，也是車輛動力學（vehicle dynamics）中剎車與牽引極限的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對剛體動力學有細緻的闡述。

詳細解答

STEP II 2018，第 12 題

概率與統計 • 最優停止的期望值

STEP II 2018，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s2-q12

關鍵思路

目標定為 h 次正面（Heads）時，我只有在遊戲結束前達到目標，才會贏得 £h，否則分文不得。所以期望收益(expected winnings)就是 h 乘以達到 h 次正面的概率(probability)，整道題的重點在於求出這個概率。要在整數 h 上求最大值，不要用微分，而應考慮比值（ratio）E_{h+1}/E_h，比較相鄰的項。

解答

全題設 $q = 1 - p = \frac{1}{N+1}$ 為反面（Tails）的概率，並設 E_h 為目標定為 h（其中 $h \geq 1$）時我的期望收益。由於我達到 h 次正面便贏得 £h，否則贏得 £0，

$$E_h = h \times \mathrm{P}(\text{我在遊戲結束前達到}h\text{ 次正面}).$$

第 (i) 部分

在版本 1 中，只要出現一次反面，遊戲便結束，所以我達到 h 次正面，當且僅當首 h 次擲幣全是正面。各次擲幣互相獨立（independent），因此這事件的概率為 p^h，而

$$E_h = hp^h.$$

要找出最佳的 h，可比較相鄰的值。由於 $E_h > 0$，

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} = \frac{(h+1)p^{h+1}}{hp^h} = \frac{(h+1)N}{h(N+1)},$$

而

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} \geq 1 \iff (h+1)N \geq h(N+1) \iff N \geq h,$$

且等號只在 $h = N$ 時成立。所以

$$E_1 < E_2 < \cdots < E_N = E_{N+1} > E_{N+2} > \cdots .$$

這個數列(sequence)在 $h = N$ 之前嚴格遞增，下一個值與它相等，之後便嚴格遞減。所以 E_h 的最大值是 E_N，選取 $h = N$ 可使我的期望收益最大，正如所求。(選取 $h = N+1$ 效果同樣好。) 最大值為 $N\left(\frac{N}{N+1}\right)^N$。

第 (ii) 部分

現在遊戲只會在連續兩次反面時結束。把直至第 h 次正面（包括該次）為止的擲幣結果看成 h 個區塊，每個區塊都以一次正面結尾。如果我安全地達到 h 次正面，那麼每個區塊必定是

$$\text{H} \quad \text{或} \quad \text{TH},$$

因為連續兩次反面會令遊戲結束。(一開始就擲出反面是沒有問題的：它前面甚麼也沒有。) 反過來，任何由 h 個這類區塊組成的序列，都不會含有連續兩次反面。序列中每次反面，要麼緊接在一次正面之後，要麼位於開頭，而且必定緊接在一次正面之前。所以我達到 h 次正面，當且僅當擲幣結果可分拆為 h 個屬於這兩類的區塊。

想一想 為甚麼可以直接把各區塊的概率相乘？

每次擲出正面後，遊戲的處境與開始時完全相同：沒有待定的反面，而且將來的擲幣與過去的結果互相獨立。所以每個區塊，與其他區塊獨立地，安全的概率為

$$\text{P(H)} + \text{P(TH)} = p + qp = p(1+q) = \frac{N}{N+1} \cdot \frac{N+2}{N+1} = \frac{N(N+2)}{(N+1)^2}.$$

(這兩個事件互斥（disjoint），因為它們在第一次擲幣已經不同。) 因此達到 h 次正面的概率為 $\left(\frac{N(N+2)}{(N+1)^2}\right)^h$，而

$$E_h = \frac{hN^h(N+2)^h}{(N+1)^{2h}},$$

正如所求。

$N = 2$ 的情況。此時

$$E_h = h\left(\frac{2 \cdot 4}{9}\right)^h = h\left(\frac{8}{9}\right)^h.$$

與第 (i) 部分一樣，

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} = \frac{8(h+1)}{9h} \geq 1 \iff 8h + 8 \geq 9h \iff h \leq 8,$$

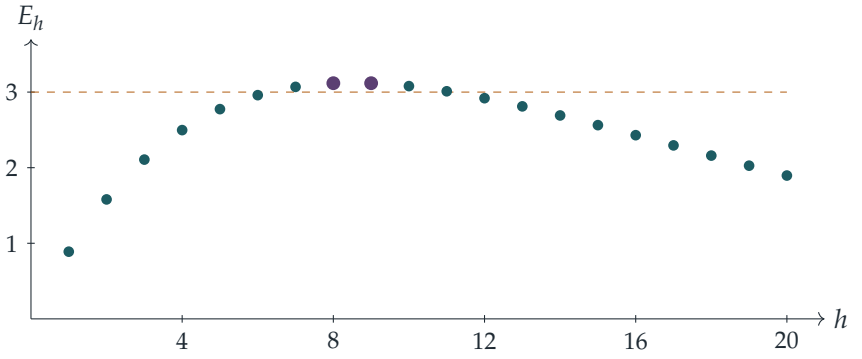
且等號只在 $h = 8$ 時成立。所以 E_h 在 $h = 8$ 之前嚴格遞增，然後 $E_9 = E_8$，之後嚴格遞減。最大值為

$$E_8 = 8\left(\frac{8}{9}\right)^8 = \frac{2^3 \cdot 2^{24}}{3^{16}} = \frac{2^{27}}{3^{16}}.$$

要估算這個值，可取以 3 為底的對數（logarithm），並利用 $\log_3 2 \approx 0.63$：

$$\log_3 E_8 = 27\log_3 2 - 16 \approx 27(0.63) - 16 = 17.01 - 16 = 1.01.$$

所以 $E_8 \approx 3^{1.01}$，非常接近 $3^1 = 3$。最大期望收益約為 £3。



版本 2 中 $N = 2$ 時的值 $E_h = h(8/9)^h$；在 $h = 8, 9$ 處並列的最大值剛好高於 3 的虛線。

驗算

- 版本 2 只會比版本 1 對玩家更有利，因為每個全是正面的開局在兩個版本中都是安全的。事實上 $\frac{N(N+2)}{(N+1)^2} = 1 - \frac{1}{(N+1)^2} > \frac{N}{N+1}$。
- 當 $N = 1$ 時，版本 1 給出 $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}$：以概率 $\frac{1}{2}$ 得一次正面，或以概率 $\frac{1}{4}$ 得兩次正面。
- 準確值為 $E_8 = 2^{27}/3^{16} = 134\,217\,728/43\,046\,721 \approx 3.118$，所以估計值 £3 相當準確。以電腦模擬（simulation）2×10^5 局 $N = 2$、$h = 8$ 的遊戲，所得平均收益約為 £3.11。

常見錯誤

- 在版本 2 中，忘記開頭可以有單獨一次反面，或誤以為第 h 次正面之後還可以出現反面。其實第 h 次正面一出現，我便停止。
- 把 hp^h 微分並令結果等於零。這樣得出 $h = -1/\ln p$，它通常不是整數，而要由此找出最佳整數需要小心處理。比值方法更簡潔，而且準確。
- 忽略了並列的情況：$h = N$ 與 $h = N + 1$ 給出相同的期望收益，所以題目的「證明」只要求證明 $h = N$ 能達到最大值。

STEP 之外

這是一個簡單的最優停止（*optimal stopping*）問題。這裏我預先定下目標，但你可以驗證這樣做並無損失：每當我手持 H 次正面而沒有待定的反面時，多擲一次的增益為正，當且僅當 H 足夠小。這類透過比較「現在停止」與「再走一步」來決定何時停止的問題，會引出鞅（martingale）和動態規劃（dynamic programming）。第 (ii) 部分的區塊論證，讓你初嘗馬爾可夫鏈（Markov chain）中的更新（renewal）思想。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）是很好的下一步。

詳細解答

STEP II 2018，第 13 題

概率與統計 • 遞推關係

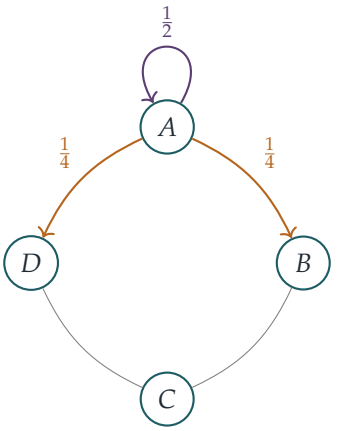
> **STEP II 2018，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q13

關鍵思路

無論包裹在誰手上，下一下哨聲都按固定規則移動它，因此 A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1} 每一個都是 A_n、B_n、C_n、D_n 的固定組合。四條互相耦合的遞推關係（recurrence）看似令人生畏，但選對組合（相對兩個小孩的和與差），每個組合都各自滿足一條只有一行的遞推關係，而這些我們可以即時解出。

解答

為圍成一圈的小孩標上名字。每次吹哨時，持有包裹的人以概率 $\frac{1}{2}$ 保留包裹，並以概率 $\frac{1}{4}$ 傳給每一位相鄰的小孩；注意，按題目的設定，順時針與逆時針傳遞的可能性相同。



圖中顯示由 A 出發的各種移動；每個小孩處的模式都一樣。

第 (i) 部分

由 A 開始，吹哨一次後

$$A_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad B_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad C_1 = 0, \qquad D_1 = \tfrac{1}{4},$$

因為 C 與 A 相隔兩個位置，一步之內無法到達。

要在第二次吹哨後落在某個小孩手上，包裹要麼本來已在那裏而且留下（概率 $\frac{1}{2}$），要麼在相鄰的小孩手上並被傳向正確方向（每個相鄰小孩各貢獻概率 $\frac{1}{4}$）。所以

$$\begin{aligned} A_2 &= \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{4}D_1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{3}{8}, \\ B_2 &= \tfrac{1}{2}B_1 + \tfrac{1}{4}A_1 + \tfrac{1}{4}C_1 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + 0 = \tfrac{1}{4}, \\ C_2 &= \tfrac{1}{2}C_1 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{4}D_1 = 0 + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{8}, \\ D_2 &= \tfrac{1}{2}D_1 + \tfrac{1}{4}C_1 + \tfrac{1}{4}A_1 = \tfrac{1}{8} + 0 + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

驗算一下，$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 1$。

第 (ii) 部分

用於 $n = 2$ 的論證對每個 $n \geq 0$ 都成立，依據是全概率定律 (law of total probability)（以第 n 次吹哨後誰持有包裹作為條件）：

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \tfrac{1}{2}A_n + \tfrac{1}{4}(B_n + D_n), & B_{n+1} &= \tfrac{1}{2}B_n + \tfrac{1}{4}(A_n + C_n), \\ C_{n+1} &= \tfrac{1}{2}C_n + \tfrac{1}{4}(B_n + D_n), & D_{n+1} &= \tfrac{1}{2}D_n + \tfrac{1}{4}(A_n + C_n), \end{aligned}$$

其中 $A_0 = 1$ 及 $B_0 = C_0 = D_0 = 0$。

求 B_n 和 D_n。 把 B_{n+1} 與 D_{n+1} 的方程相加，

$$B_{n+1} + D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(B_n + D_n) + \tfrac{1}{2}(A_n + C_n) = \tfrac{1}{2}(A_n + B_n + C_n + D_n) = \tfrac{1}{2},$$

因為包裹總在某人手上，所以四個概率之和為 1。

? **想一想** 現在已知 $B + D$ 之和，但要怎樣把它分配給 B 和 D？

改為相減而非相加：$A_n + C_n$ 項互相抵消，剩下

$$B_{n+1} - D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(B_n - D_n).$$

由於 $B_0 - D_0 = 0$，可得對每個 n 都有 $B_n - D_n = 0$。（這正是遊戲的鏡像對稱：順時針與逆時針傳遞的可能性相同，而 B 和 D 對稱地位於 A 的兩側。）結合 $B_n + D_n = \frac{1}{2}$，

$$B_n = D_n = \tfrac{1}{4} \qquad \text{對所有} n \geq 1,$$

當然 $B_0 = D_0 = 0$。這與第 (i) 部分吻合。

求 A_n 和 C_n。 對 $n \geq 1$，我們現已知道 $A_n + C_n = 1 - (B_n + D_n) = \frac{1}{2}$。把 A_{n+1} 與 C_{n+1} 的方程相減，$B_n + D_n$ 項互相抵消：

$$A_{n+1} - C_{n+1} = \tfrac{1}{2}(A_n - C_n),$$

而此式對所有 $n \geq 0$ 成立。由於 $A_0 - C_0 = 1$，得對所有 $n \geq 0$ 有 $A_n - C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$。與 $A_n + C_n = \frac{1}{2}$ 聯立求解：

$$\boxed{A_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}, \qquad C_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} \qquad (n \geq 1).}$$

這些公式在 $n = 0$ 時不成立（會得出 $A_0 = \frac{3}{4}$），因為關係式 $A_n + C_n = \frac{1}{2}$ 要在第一次吹哨之後才開始成立。

驗算

- $n = 1$：$A_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 及 $C_1 = 0$；$n = 2$：$A_2 = \frac{3}{8}$ 及 $C_2 = \frac{1}{8}$。兩者都與第 (i) 部分吻合。
- $n = 3$：公式給出 $(A_3, B_3, C_3, D_3) = (\frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4})$，其和為 1，並與直接按遞推關係逐步計算的結果一致；以電腦模擬 200 000 局遊戲，得出 $A_3 \approx 0.313$ 及 $C_3 \approx 0.188$。
- 當 $n \to \infty$ 時，每個概率都趨向 $\frac{1}{4}$：吹哨多次之後，包裹在任何位置的可能性都相同，正如對稱性所暗示。

常見錯誤

- 用從 B 傳出的概率來寫 B_{n+1}，而不是用傳入 B 的概率。應該問：「包裹在上一刻可能在哪裏？」
- 聲稱 $A_n = \frac{1}{4} + 2^{-(n+1)}$ 對所有 $n \geq 0$ 成立；它在 $n = 0$ 時是錯的。
- 「憑對稱性」假設 $B_n = D_n$ 而不給出任何理由；差的遞推關係能令這一點變得嚴謹。

STEP 之外

這是一條馬可夫鏈（Markov chain）：一個在四個狀態組成的環上進行的隨機遊走（random walk），轉移矩陣（transition matrix）為 P，而 $(A_n, B_n, C_n, D_n) = (1,0,0,0)P^n$。組合 $B_n - D_n$、$A_n - C_n$ 及 $A_n + C_n - B_n - D_n$ 來自 P 的特徵向量（eigenvectors）（對應的特徵值（eigenvalues）為 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$ 及 0），而以 2^{-n} 的速率收斂（convergence）至均勻分佈（uniform distribution），是由第二大的特徵值所決定的。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對馬可夫鏈及其長期行為有淺白易明的論述。

詳細解答

STEP III 2018，第 1 題

純數學 • 二次方程的根與不等式

STEP III 2018，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s3-q1

關鍵思路

韋達定理（Vieta's formulas）把 u 和 v 的兩個對稱（symmetric）表達式都化為係數 α 和 β 的簡單函數。一旦固定其中一個表達式，就可以消去 α，另一個表達式便成為只含 β 的函數，而且正好是第 (i) 部分所描繪的兩個函數之一。u 和 v 為實數的條件（判別式（discriminant）≥ 0）則告訴我們可以使用曲線的哪一段，其餘的就交給草圖。

解答

第 (i) 部分

曲線 $y = \mathrm{f}(\beta)$。 求導，得

$$\mathrm{f}'(\beta) = 1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 + \beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta+1)(\beta^2 - \beta + 2)}{\beta^3},$$

其中我們看出了三次式的根 $\beta = -1$。二次因式的判別式為 $1 - 8 < 0$，所以它恆為正。因此唯一的駐點（stationary point）位於 $\beta = -1$，此時

$$\mathrm{f}(-1) = -1 + 1 - 1 = -1.$$

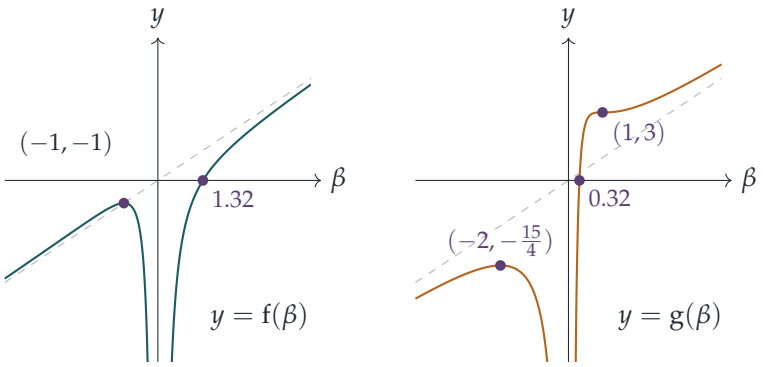
正負號：當 $-1 < \beta < 0$ 時，分子為正而 $\beta^3 < 0$，所以 $\mathrm{f}' < 0$；當 $\beta < -1$ 時兩者皆為負，所以 $\mathrm{f}' > 0$。因此 $(-1, -1)$ 是極大值（maximum）點，而且對每個 $\beta < 0$ 都有 $\mathrm{f}(\beta) \leq -1$。當 $\beta > 0$ 時各項皆為正，所以 f 在該處遞增（increasing）。

邊界的行為：當 $\beta \to 0$（從任一方向）時，$-1/\beta^2$ 一項起主導作用，所以 $\mathrm{f} \to -\infty$。當 $\beta \to \pm\infty$ 時，$\mathrm{f}(\beta) - \beta \to 0$，因此 $y = \beta$ 是斜漸近線（oblique asymptote）。曲線與軸相交一次，交點滿足 $\beta^3 - \beta - 1 = 0$，位於 $\beta \approx 1.32$。

曲線 $y = \mathrm{g}(\beta)$。 同樣地，

$$\mathrm{g}'(\beta) = 1 - \frac{3}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 - 3\beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta-1)^2(\beta+2)}{\beta^3}.$$

駐點位於 $\beta = -2$，此時 $\mathrm{g}(-2) = -2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$；以及位於 $\beta = 1$，此時 $\mathrm{g}(1) = 3$。當 $-2 < \beta < 0$ 時 $\mathrm{g}' < 0$，當 $\beta < -2$ 時 $\mathrm{g}' > 0$，所以 $(-2, -\frac{15}{4})$ 是極大值點，而且對所有 $\beta < 0$ 都有 $\mathrm{g}(\beta) \le -\frac{15}{4}$。當 $\beta > 0$ 時，$\mathrm{g}' \ge 0$，且只在 $\beta = 1$ 時取等號：導數在該處不變號，所以 $(1,3)$ 是駐拐點（stationary point of inflection），而 g 在 $\beta > 0$ 上遞增。同樣地，當 $\beta \to 0$ 時 $\mathrm{g} \to -\infty$，$y = \beta$ 是漸近線，而且只有一個零點，位於 $\beta \approx 0.32$（即 $\beta^3 + 3\beta - 1 = 0$ 的根）。



虛線是漸近線 $y = \beta$。

第 (ii) 部分

由韋達定理，$u + v = -\alpha$ 及 $uv = \beta$（而由於 $\beta \ne 0$，故 $uv \ne 0$）。所以

$$u + v + \frac{1}{uv} = -\alpha + \frac{1}{\beta}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \frac{u+v}{uv} + uv = \beta - \frac{\alpha}{\beta}.$$

第 (iii) 部分

條件 $-\alpha + \frac{1}{\beta} = -1$ 給出 $\alpha = 1 + \frac{1}{\beta}$。代入第二個表達式，

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \beta - \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \beta - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} = \mathrm{f}(\beta).$$

因此我們須證明對每個容許的 β 都有 $\mathrm{f}(\beta) \le -1$。

想一想 曲線 $y = \mathrm{f}(\beta)$ 趨向 $+\infty$，所以這個不等式不可能對所有 β 成立。是甚麼阻止 β 變得很大？

是 u 和 v 必須為實數。兩根為實數當且僅當 $\alpha^2 \geq 4\beta$，即

$$\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq 4\beta \iff (\beta+1)^2 \geq 4\beta^3 \iff 4\beta^3-\beta^2-2\beta-1 \leq 0,$$

其中我們乘以了 $\beta^2 > 0$。現在 $\beta = 1$ 是這個三次式的根，而且

$$4\beta^3-\beta^2-2\beta-1 = (\beta-1)(4\beta^2+3\beta+1).$$

二次因式的判別式為 $9-16 < 0$，所以它恆為正。因此兩根為實數當且僅當 $\beta \leq 1$（且 $\beta \neq 0$）。

- 若 $\beta < 0$：由第 (i) 部分，$f(\beta) \leq f(-1) = -1$。
- 若 $0 < \beta \leq 1$：f 在 $\beta > 0$ 上遞增，所以 $f(\beta) \leq f(1) = 1-1-1 = -1$。

在所有情況下都有 $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv \leq -1$，命題得證。等號在 $\beta = -1$（$\alpha = 0$，兩根為 ± 1）及 $\beta = 1$（$\alpha = 2$，重根（double root）-1）時成立。

第 (iv) 部分

現在 $-\alpha+\frac{1}{\beta} = 3$，所以 $\alpha = \frac{1}{\beta}-3$，而且

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv = \beta-\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}-3\right) = \beta+\frac{3}{\beta}-\frac{1}{\beta^2} = g(\beta).$$

當 $\alpha^2 \geq 4\beta$ 時兩根為實數：

$$\left(\frac{1}{\beta}-3\right)^2 \geq 4\beta \iff (1-3\beta)^2 \geq 4\beta^3 \iff 4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1 \leq 0.$$

同樣，$\beta = 1$ 是一個根，而這次它是重根：

$$4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1 = (\beta-1)(4\beta^2-5\beta+1) = (\beta-1)^2(4\beta-1).$$

由於 $(\beta-1)^2 \geq 0$，這個三次式 ≤ 0 當且僅當 $\beta \leq \frac{1}{4}$ 或 $\beta = 1$。因此容許的值為 $\beta < 0$、$0 < \beta \leq \frac{1}{4}$，以及孤立的值 $\beta = 1$。

想一想 最大值是否就是區間右端的 $g(\frac{1}{4})$？

並不完全是：別遺漏那個孤立點。在三個部分上分別考慮：

- $\beta < 0$：由第 (i) 部分，$g(\beta) \leq -\frac{15}{4}$。
- $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$：g 遞增，所以 $g(\beta) \leq g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}+12-16 = -\frac{15}{4}$。
- $\beta = 1$：$g(1) = 3$。

所以 $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv$ 的最大值是 $\boxed{3}$，在 $\beta = 1$、$\alpha = -2$，即 $u = v = 1$ 時取得。（事實上兩個表達式都等於 $1+1+1 = 3$。）若沒有那個重根，就不可能得到任何大於 $-\frac{15}{4}$ 的值。

驗算

- 把 $u = v = 1$ 代入兩個表達式：兩者皆為 3，與第 (iv) 部分吻合。代入 $u = v = -1$：兩者皆為 -1，即第 (iii) 部分取等號的情況。
- 在第 (iv) 部分試 $\beta = \frac{1}{4}$：$\alpha = 1$，而 $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$，所以 $u = v = -\frac{1}{2}$。於是 $u + v + \frac{1}{uv} = -1 + 4 = 3$ 及 $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = -4 + \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$，與所述相符。
- 用電腦在數千個給出實根的隨機 β 中搜尋，在第 (iii) 部分找不到任何大於 -1 的值，而在第 (iv) 部分除 $\beta = 1$ 外也找不到任何大於 -3.75 的值。

常見錯誤

- 忘記判別式條件，因而在第 (iii) 部分得出沒有上界的結論。
- 把 $(\beta - 1)^2(4\beta - 1) \leq 0$ 解成只有 $\beta \leq \frac{1}{4}$，遺漏了 $\beta = 1$，結果答案變成 $-\frac{15}{4}$ 而非 3。
- 把不等式 $\alpha^2 \geq 4\beta$ 乘以 β（它可能是負數），而不是乘以 β^2。

STEP 之外

這是一個小型的約束最優化（constrained optimisation）問題：我們在給出實根的係數集合上求函數的最大值，而這個集合除了區間之外，還可以包含孤立點。函數在一個集合上的最大值不一定出現在駐點或區間端點，這正是為何在分析和最優化中，仔細描述可行集（feasible set）如此重要。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對連續函數在一般集合上的極值有嚴謹的論述。

詳細解答

STEP III 2018，第 2 題

純數學 • 埃爾米特多項式

> **STEP III 2018，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q2

關鍵思路

把定義倒過來看：它說明 z 的 n 階導數（derivative）等於 $(-1)^n y_n z$。將這式再微分一次，並與 $n+1$ 時的同一個式子比較，一行便得出第 (i) 部分。之後，第 (i) 部分就成為我們微分遞推關係（recurrence）的工具，推動第 (ii) 部分的歸納法（induction）。最後的不等式（inequality）則由第 (ii) 部分的恆等式（identity），再用一次非常簡短的歸納法得出。

解答

全文中 $z = \mathrm{e}^{-x^2}$，故 $z' = -2xz$，而且對每個 x 都有 $z > 0$。將定義移項，得

$$\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^n y_n z \qquad (n \geq 0),$$

由於 $y_0 = 1$，此式在 $n = 0$ 時亦成立。

第 (i) 部分

利用乘積法則（product rule）及 $z' = -2xz$，將上面列出的等式微分：

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} z}{\mathrm{d}x^{n+1}} = (-1)^n \left(y_n' z + y_n z'\right) = (-1)^n \left(y_n' - 2x y_n\right) z.$$

但以 $n+1$ 代替 n 的同一等式指出，左方等於 $(-1)^{n+1} y_{n+1} z$。令兩者相等，再除以永不為零的 $(-1)^n z$，得

$$y_n' - 2x y_n = -y_{n+1}, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = 2x y_n - y_{n+1},$$

此即所求。以上推導並不需要 $n \geq 1$，因此結果在 $n = 0$ 時亦成立；下面會用到這一點。

留待後用：$z' = -2xz$ 及 $z'' = (4x^2 - 2)z$，故 $y_1 = 2x$ 及 $y_2 = 4x^2 - 2$。

第 (ii) 部分

基本情況。 當 $n = 1$ 時，我們需要 $y_2 = 2xy_1 - 2y_0$，而確實 $2x \cdot 2x - 2 = 4x^2 - 2 = y_2$。

歸納步驟。 假設對某個 $k \geq 1$，

$$y_{k+1} = 2xy_k - 2ky_{k-1}. \qquad (*)$$

我們想得到往後一步的同一關係，所以將 $(*)$ 微分：

$$y'_{k+1} = 2y_k + 2xy'_k - 2ky'_{k-1}.$$

? **想一想** 怎樣消去這些導數？當 $k = 1$ 時，第 (i) 部分可以用於 y_{k-1} 嗎？

利用第 (i) 部分替換每一個導數。當 $k = 1$ 時，y'_{k-1} 對應 $n = 0$ 的情況，而我們已指出這情況同樣成立。於是得

$$2xy_{k+1} - y_{k+2} = 2y_k + 2x\big(2xy_k - y_{k+1}\big) - 2k\big(2xy_{k-1} - y_k\big),$$

所以

$$y_{k+2} = 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4kx\,y_{k-1}.$$

含 y_{k-1} 的項再用一次假設 $(*)$ 消去：$2ky_{k-1} = 2xy_k - y_{k+1}$，故 $4kx\,y_{k-1} = 4x^2y_k - 2xy_{k+1}$。代入後，

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4x^2y_k - 2xy_{k+1} \\ &= 2xy_{k+1} - 2(k+1)y_k, \end{aligned}$$

這正是以 $k+1$ 代替 k 的關係。由歸納法，對所有 $n \geq 1$，$y_{n+1} = 2xy_n - 2ny_{n-1}$。

推論。 使用遞推關係兩次，一次在 n，一次在 $n+1$，使兩個乘積中都出現 $2xy_ny_{n+1}$ 這一項：

$$\begin{aligned} y_{n+1}^2 &= y_{n+1}\big(2xy_n - 2ny_{n-1}\big) = 2xy_ny_{n+1} - 2ny_{n-1}y_{n+1}, \\ y_ny_{n+2} &= y_n\big(2xy_{n+1} - 2(n+1)y_n\big) = 2xy_ny_{n+1} - 2(n+1)y_n^2. \end{aligned}$$

相減後，含 x 的項互相抵消：

$$y_{n+1}^2 - y_ny_{n+2} = 2(n+1)y_n^2 - 2ny_{n-1}y_{n+1} = 2n\big(y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}\big) + 2y_n^2,$$

此即所求的恆等式。

第 (iii) 部分

記 $D_n = y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}$。第 (ii) 部分的恆等式可寫成

$$D_{n+1} = 2nD_n + 2y_n^2 \qquad (n \geq 1).$$

我們用歸納法證明對所有 $n \geq 1$，$D_n > 0$。當 $n = 1$ 時，

$$D_1 = y_1^2 - y_0y_2 = 4x^2 - (4x^2 - 2) = 2 > 0$$

對每個 x 都成立。若對某個 $n \geq 1$ 有 $D_n > 0$，則由於 $n \geq 1$，$2nD_n > 0$，又 $2y_n^2 \geq 0$，故 $D_{n+1} > 0$。因此對所有 $n \geq 1$ 及所有實數 x，$y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} > 0$，此即所求。

注意，要得到嚴格不等式，我們需要 D_n 嚴格為正：單靠 y_n^2 是不夠的，因為在 y_n 的零點上它可以等於零。

驗算

- 由遞推關係，$y_3 = 2x(4x^2 - 2) - 4 \cdot 2x = 8x^3 - 12x$。直接將 $z'' = (4x^2 - 2)z$ 微分，得 $z''' = (-8x^3 + 12x)z$，與 $-y_3z$ 吻合。
- 第 (i) 部分在 $n = 1$ 時：$y_1' = 2$，而 $2x \cdot 2x - (4x^2 - 2) = 2$。✓
- 第 (iii) 部分在 $n = 2$ 時：$D_2 = (4x^2 - 2)^2 - 2x(8x^3 - 12x) = 8x^2 + 4$，這是正數，並且等於 $2D_1 + 2y_1^2 = 4 + 8x^2$，與恆等式的預測一致。
- 以電腦在多個有理數 x 值（包括接近各 y_n 零點之處）檢驗遞推關係及不等式直至 $n = 14$，結果完全吻合。

常見錯誤

- 忘記歸納步驟要對 y_{k-1} 使用第 (i) 部分，而在 $k = 1$ 時這是指 y_0：題目只要求第 (i) 部分對 $n \geq 1$ 成立，所以要另外檢查 $n = 0$ 的情況。
- 在第 (iii) 部分只得出 $D_{n+1} \geq 0$：嚴格不等式來自 $D_n > 0$，而不是來自 y_n^2。

STEP 之外

函數 y_n 就是埃爾米特多項式（Hermite polynomials）$H_n(x)$，而關係式 $\mathrm{d}^n z/\mathrm{d}x^n = (-1)^n H_n z$ 是它們的羅德里格公式（Rodrigues formula）。它們在整條實數線上以 e^{-x^2} 為權函數正交（orthogonal），並給出量子諧振子（quantum harmonic oscillator）的能量狀態。第 (iii) 部分的不等式是一個圖蘭型不等式（Turán-type inequality），這類結果對

許多經典正交多項式都成立。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）透過級數解處理埃爾米特方程。

詳細解答

STEP III 2018，第 3 題

純數學 • 歐拉微分方程

> **STEP III 2018，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q3

關鍵思路

左邊是一條歐拉方程（Euler equation，又稱等維方程，equidimensional equation）：每個導數都配上相應次數的 x 冪。把嵌套形式 $(*)$ 展開並比較係數（comparing coefficients），就能確定 a、b 和 c。方程一旦寫成這個形式，便可以透過兩次簡單的積分求解，每次剝去一層導數；而分情況討論的需要，正正出現在其中一個積分是 x^{-1} 的積分、因而產生對數的時候。

解答

全題我們都在 $x > 0$ 上討論，使 x 的所有冪都有定義。

求 a、b 和 c

由乘積法則（product rule），

$$(x^c y)' = x^c y' + cx^{c-1}y, \qquad \text{所以} \qquad x^b(x^c y)' = x^{b+c}y' + cx^{b+c-1}y.$$

再求導一次，

$$\left(x^b(x^c y)'\right)' = x^{b+c}y'' + (b+c)x^{b+c-1}y' + cx^{b+c-1}y' + c(b+c-1)x^{b+c-2}y.$$

乘以 x^a，並選取 $a+b+c=2$，得

$$x^a\left(x^b(x^c y)'\right)' = x^2y'' + (b+2c)\,xy' + c(b+c-1)\,y.$$

這與題目所給的左邊吻合，只要

$$b + 2c = 1 - 2p, \qquad c(b+c-1) = p^2 - q^2.$$

由第一式得 $b+c-1=-2p-c$，於是第二式變為 $-c^2-2pc=p^2-q^2$，即 $(c+p)^2=q^2$。取 $c+p=q$，

$$c=q-p,\qquad b=1-2p-2c=1-2q,\qquad a=2-b-c=1+p+q.$$

因此方程可寫成

$$x^{1+p+q}\Big(x^{1-2q}\big(x^{q-p}y\big)'\Big)'=\mathrm{f}(x),$$

此即所求。（另一個根 $c+p=-q$ 給出的結果只是把 q 換成 $-q$，兩者並無分別，因為方程中只出現 q^2。）

第 (i) 部分

當 $\mathrm{f}=0$ 時，我們可以除以 $x^{1+p+q}\neq 0$：

$$\Big(x^{1-2q}\big(x^{q-p}y\big)'\Big)'=0\quad\Longrightarrow\quad x^{1-2q}\big(x^{q-p}y\big)'=A\quad\Longrightarrow\quad\big(x^{q-p}y\big)'=Ax^{2q-1},$$

其中 A 為常數。下一次積分的做法，取決於冪 $2q-1$ 是否等於 -1。

> **想一想** 為甚麼 p 的值在這裏不會引出不同的情況？

我們要積分的指數是 $2q-1$，它與 p 無關；p 只透過因子 x^{q-p} 出現，而這個因子我們最後才除去。所以情況的劃分只取決於 q。

情況 $q\neq 0$。積分得 $x^{q-p}y=\dfrac{A}{2q}x^{2q}+B$，再乘以 x^{p-q}（並把常數 $\frac{A}{2q}$ 重新記作 A），

$$y=Ax^{p+q}+Bx^{p-q}.$$

情況 $q=0$。此時 $\big(x^{-p}y\big)'=Ax^{-1}$，所以 $x^{-p}y=A\ln x+B$，從而

$$y=x^p\,(A\ln x+B).$$

每種情況都有兩個任意常數（arbitrary constant），正如二階方程所應有的。

第 (ii) 部分

這是 $q=0$、$\mathrm{f}(x)=x^n$ 的情況，所以 $a=1+p$、$b=1$、$c=-p$，方程為

$$x^{1+p}\Big(x\big(x^{-p}y\big)'\Big)'=x^n\quad\Longleftrightarrow\quad\Big(x\big(x^{-p}y\big)'\Big)'=x^{n-p-1}.$$

第一次積分涉及 x^{n-p-1}，它恰好在 $n=p$ 時等於 x^{-1}。

情況 $n\neq p$。積分一次，

$$x\big(x^{-p}y\big)'=\frac{x^{n-p}}{n-p}+A\quad\Longrightarrow\quad\big(x^{-p}y\big)'=\frac{x^{n-p-1}}{n-p}+\frac{A}{x}.$$

由於 $n-p\neq 0$，再積分得

$$x^{-p}y=\frac{x^{n-p}}{(n-p)^2}+A\ln x+B,\qquad \text{所以}\qquad y=\frac{x^n}{(n-p)^2}+x^p\,(A\ln x+B).$$

情況 $n=p$。此時第一次積分便產生對數：

$$x\big(x^{-p}y\big)'=\ln x+A\quad\Longrightarrow\quad\big(x^{-p}y\big)'=\frac{\ln x}{x}+\frac{A}{x}.$$

由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}(\ln x)^2=\frac{\ln x}{x}$，

$$x^{-p}y=\tfrac{1}{2}(\ln x)^2+A\ln x+B,\qquad \text{所以}\qquad y=x^p\left(\tfrac{1}{2}(\ln x)^2+A\ln x+B\right).$$

在兩種情況中，含 A 和 B 的部分正是第 (i) 部分中 $q=0$ 時的餘函數（complementary function），理應如此。

驗算

- 取 $p=q=0$：方程為 $x^2y''+xy'=0$，即 $(xy')'=0$，所以 $y=A\ln x+B$，與第 (i) 部分吻合。
- 在齊次方程 (homogeneous equation) 中試代 $y=x^m$：$m(m-1)+(1-2p)m+p^2-q^2=(m-p)^2-q^2$，所以 $m=p\pm q$，當 $q=0$ 時為重根（repeated root），與上面所得一致。
- 在第 (ii) 部分中取 $n=p=1$，$y=\frac{1}{2}x(\ln x)^2$ 有 $y'=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x$ 及 $y''=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}$，所以 $x^2y''-xy'+y=x\ln x+x-\frac{1}{2}x(\ln x)^2-x\ln x+\frac{1}{2}x(\ln x)^2=x$，此即所求。
- 所有解亦已用電腦在大量隨機的 p、q、n 和 x 值下代回方程驗證；殘差 (residual) 在捨入誤差範圍內為零（約 10^{-6}）。

常見錯誤

- 在 (i) 中遺漏 $q=0$ 的情況，或在 (ii) 中遺漏 $n=p$ 的情況；這些情況下要用 $\int x^{-1}\,\mathrm{d}x=\ln x$ 代替冪法則。
- 在第一步遺漏積分常數：正是它產生第二個線性獨立的解。
- 沒有說明理由便假設 $a+b+c=2$：這是為了使 y'' 乘以 x^2 所必需的。

STEP 之外

把二階算子寫成一階算子的複合，稱為把算子因式分解（factorising），這正是降階法（reduction of order）以及量子力學中階梯算子（ladder operators）背後的想法。代換

$x = \mathrm{e}^t$ 可把任何歐拉方程變成常係數方程，這就解釋了重根 $m = p$ 以及 $\ln x$（即 t）這個因子的出現。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《基礎微分方程》）論述了歐拉方程和降階法。

詳細解答

STEP III 2018，第 4 題

純數學 • 雙曲線的切線

STEP III 2018，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s3-q4

關鍵思路

求切線最快的方法是直接用標準結果：$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 在 (x_1, y_1) 處的切線（tangent）是 $xx_1/a^2 - yy_1/b^2 = 1$。之後的一切都只是兩條直線相交，所以只需解幾組一次聯立方程，再整理三角式子。在第 (ii) 部分，垂直條件是 $\sin\theta$ 與 $\sin\phi$ 之間一條涉及 b 的關係式，正正是它讓我們能把 b 從式子中消去，最後再以 $a^2 - b^2$ 的形式把它帶回來。和差化積公式（sum-to-product formulae）能令最後的代數運算變得簡短。

解答

P 點的切線

對 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 進行隱函數求導（implicit differentiation），得 $\dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2y}{b^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，因此在 (x_1, y_1) 處的斜率（gradient）是 $\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$，而切線為

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \iff \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

這裏用到 (x_1, y_1) 在曲線上這一事實。（這個形式同樣適用於頂點（vertex），即 $y_1 = 0$ 而切線是鉛垂線的情況。）代入 $x_1 = a\sec\theta$、$y_1 = b\tan\theta$：

$$\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1.$$

兩邊乘以 $ab\cos\theta$（它不等於零，因為 $\sec\theta$ 存在），得

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta,$$

即所求。

第 (i) 部分

題目給出的兩條直線就是漸近線（asymptote）$y = \pm\frac{b}{a}x$。

在 S 點，$ay = bx$。把 $ay = bx$ 代入切線方程，得 $bx(1-\sin\theta) = ab\cos\theta$，所以

$$S = \left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right).$$

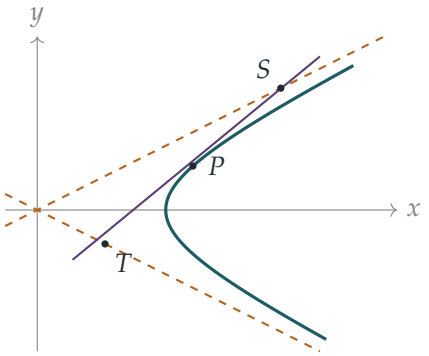
在 T 點，$ay = -bx$，得 $bx(1+\sin\theta) = ab\cos\theta$，所以

$$T = \left(\frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta},\ -\frac{b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right).$$

兩個分母都不為零，因為 $\cos\theta \neq 0$ 意味着 $\sin\theta \neq \pm 1$。將兩者相加，並利用 $(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) = \cos^2\theta$：

$$x_S + x_T = a\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2a}{\cos\theta} = 2a\sec\theta,$$
$$y_S + y_T = b\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)-(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2b\sin\theta}{\cos\theta} = 2b\tan\theta.$$

因此 ST 的中點（mid-point）是 $(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$：**$ST$ 的中點正是 P 本身**。任一點的切線被兩條漸近線所截的線段，都在切點處被平分。



第 (ii) 部分

垂直條件。 把 P 點的切線寫成 $ay\sin\theta = bx - ab\cos\theta$，當 $\sin\theta \neq 0$ 時其斜率為 $\dfrac{b}{a\sin\theta}$。（若 $\sin\theta = 0$，切線是鉛垂線，那麼 Q 點的切線就必須是水平線；但由於 $b/(a\sin\phi) \neq 0$，沒有任何切線是水平的。所以 $\sin\theta \neq 0$，同理 $\sin\phi \neq 0$。）兩條切線互相垂直（perpendicular），需要兩斜率之積為 -1：

$$\frac{b^2}{a^2\sin\theta\sin\phi} = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin\theta\sin\phi = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{$*$}$$

特別地，$\sin\theta$ 與 $\sin\phi$ 異號，所以 $\sin\phi - \sin\theta \neq 0$。留意 $(*)$ 需要 $b^2/a^2 < 1$，這正是用到 $a > b$ 的地方。

交點。 點 (x,y) 滿足

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta, \qquad bx - ay\sin\phi = ab\cos\phi.$$

以第一式減去第二式，得 $ay(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\cos\theta - \cos\phi)$。把第一式乘以 $\sin\phi$、第二式乘以 $\sin\theta$，再相減，得 $bx(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta) = ab\sin(\phi - \theta)$。因此

$$x = \frac{a\sin(\phi-\theta)}{\sin\phi - \sin\theta}, \qquad y = \frac{b(\cos\theta - \cos\phi)}{\sin\phi - \sin\theta}.$$

想一想 這些式子仍然含有 b。怎樣才能只用 a、θ 和 ϕ 表示 x^2 和 y^2？這些分式又能否化簡？

條件 $(*)$ 表示 $b^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi$，所以取平方就能消去 b。為了化簡，設 $\alpha = \frac{1}{2}(\phi+\theta)$ 及 $\beta = \frac{1}{2}(\phi-\theta)$。和差化積公式給出

$$\sin\phi - \sin\theta = 2\cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos\theta - \cos\phi = 2\sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\phi-\theta) = 2\sin\beta\cos\beta,$$

而由於 $\sin\phi - \sin\theta \neq 0$，所以 $\cos\alpha\sin\beta \neq 0$。約去 $2\sin\beta$，

$$x = \frac{a\cos\beta}{\cos\alpha}, \qquad y = b\tan\alpha,$$

因此

$$x^2 = \frac{a^2\cos^2\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{2}(\phi+\theta)\right)},$$

$$y^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi\,\tan^2\left(\tfrac{1}{2}(\phi+\theta)\right).$$

等價地，不用半角可寫成

$$x^2 = \frac{a^2\sin^2(\phi-\theta)}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}, \qquad y^2 = -\frac{a^2\sin\theta\sin\phi\,(\cos\theta-\cos\phi)^2}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}.$$

圓。 我們還需要以 α 和 β 表示 $\sin\theta\sin\phi$。由於 $\theta = \alpha - \beta$ 及 $\phi = \alpha + \beta$，

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\phi &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta \\ &= (1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta - \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha.\end{aligned}$$

設 $k = \sin\theta\sin\phi = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$。於是，利用 $\tan^2\alpha = (1-\cos^2\alpha)/\cos^2\alpha$，

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\Big[\cos^2\beta - k\,(1-\cos^2\alpha)\Big] \\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\Big[(\cos^2\beta - k) + k\cos^2\alpha\Big] \\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\Big[\cos^2\alpha + k\cos^2\alpha\Big] \qquad \text{因為 } \cos^2\beta - k = \cos^2\alpha \\ &= a^2(1+k) = a^2 + a^2\sin\theta\sin\phi = a^2 - b^2,\end{aligned}$$

最後一步用到 $(*)$。所以任意兩條互相垂直的切線的交點都在圓 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 上，即所求。

驗算

- 取 $a=2$、$b=1$、$\theta=\frac{\pi}{6}$、$\phi=-\frac{\pi}{6}$。那麼 $\sin\theta\sin\phi=-\frac{1}{4}=-b^2/a^2$，所以兩切線互相垂直（斜率分別為 1 和 -1）。此時 $\alpha=0$、$\beta=-\frac{\pi}{6}$，所以 $x=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$、$y=0$，而 $x^2+y^2=3=a^2-b^2$。直接驗證：切線 $x-y=\sqrt{3}$ 與 $x+y=\sqrt{3}$ 的確相交於 $(\sqrt{3},0)$。
- 在第 (i) 部分，當 $\theta\to 0$ 時，切線變成鉛垂線 $x=a$，它與漸近線相交於 $(a,\pm b)$，中點為 $(a,0)=P$。
- 以上所有公式，包括 (i) 中的中點以及 $x^2+y^2=a^2-b^2$，都已用電腦對數以千計隨機選取的 $a>b>0$ 及互相垂直的 θ,ϕ 組合，直接解兩條切線方程加以確認。

常見錯誤

- 在 x^2 和 y^2 的式子中保留 b：題目要求只用 a、θ 和 ϕ 表示，所以必須用 $(*)$ 消去 b^2。
- 移項出錯，把切線斜率寫成 $-b/(a\sin\theta)$；應檢查在第一象限的點處斜率是否為正。
- 除以 $\sin\phi-\sin\theta$ 時沒有說明它為何不等於零。

STEP 之外

第 (ii) 部分中的圓是雙曲線（hyperbola）的*準圓*（director circle）：即從該點引出的兩條切線互相垂直的點的軌跡（locus）。對於橢圓（ellipse），準圓是 $x^2+y^2=a^2+b^2$；而對於 $a<b$ 的雙曲線，則根本沒有實的準圓，這就是題目堅持 $a>b$ 的原因。第 (i) 部分的平分性質讓我們初步窺見圓錐曲線（conics）的射影幾何（projective geometry）與仿射幾何（affine geometry）；在這些理論中，切線、漸近線以及極點與極線（poles and polars）都以統一的方式處理。若想找完全同類風格的題目，可以試讀 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）。

詳細解答

STEP III 2018，第 5 題

純數學 • 算術幾何平均不等式

STEP III 2018，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s3-q5

關鍵思路

這是用歸納法（induction）證明 AM–GM 不等式（算術－幾何平均不等式，AM–GM inequality），但有一個巧妙之處：我們不直接證明 $A_n \geq G_n$，而是證明每加入一個新的數，加權差距 $n(A_n - G_n)$ 都不會減少。當 $n = 1$ 時差距為零，因此它一直保持非負。λ_k 的選取使 G_{k+1} 成為 G_k 的一個簡單倍數，從而把整個比較化為一個單變量的多項式不等式（polynomial inequality）。

解答

第 (i) 部分

有兩個事實把第 k 步和第 $k+1$ 步聯繫起來。就和而言，

$$(k+1)A_{k+1} = a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} = kA_k + a_{k+1}.$$

就積而言，$G_k^k = a_1 a_2 \cdots a_k$，而由 λ_k 的定義得 $a_{k+1} = G_k \lambda_k^{k+1}$。所以

$$G_{k+1}^{k+1} = G_k^k \, a_{k+1} = G_k^k \cdot G_k \lambda_k^{k+1} = (G_k \lambda_k)^{k+1}, \qquad \text{所以} \qquad G_{k+1} = G_k \lambda_k,$$

這裏取正的 $(k+1)$ 次方根，因為 $G_k > 0$ 且 $\lambda_k > 0$。這正是 λ_k 要這樣定義的原因。

現在比較兩邊：

$$\begin{aligned}(k+1)(A_{k+1} - G_{k+1}) - k(A_k - G_k) &= kA_k + a_{k+1} - (k+1)G_{k+1} - kA_k + kG_k \\ &= G_k \lambda_k^{k+1} - (k+1)G_k \lambda_k + kG_k \\ &= G_k\left(\lambda_k^{k+1} - (k+1)\lambda_k + k\right).\end{aligned}$$

由於 $G_k > 0$，左邊 ≥ 0 當且僅當括號內的式子 ≥ 0。這就是所要求的等價關係。

第 (ii) 部分

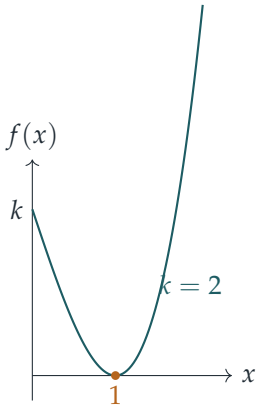
求導數（derivative），

$$f'(x) = (k+1)x^k - (k+1) = (k+1)(x^k - 1).$$

當 $0 < x < 1$ 時有 $x^k < 1$，故 $f'(x) < 0$；當 $x > 1$ 時有 $x^k > 1$，故 $f'(x) > 0$。因此 f 在 $(0, 1]$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），在 $[1, \infty)$ 上嚴格遞增，它在 $x > 0$ 上的最小值是

$$f(1) = 1 - (k+1) + k = 0.$$

所以對所有 $x > 0$ 都有 $f(x) \geq 0$。此外，若 $x \neq 1$，則由 1 兩側的嚴格單調性得 $f(x) > f(1) = 0$。所以 $f(x) = 0$ 僅當 $x = 1$ 時成立，而 $f(1) = 0$ 給出逆命題。



（當 $k = 2$ 時，$f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$；在 $x = 1$ 的二重根（double root）處，圖像剛好與軸相切。）

第 (iii) 部分

對每個正整數 n，記 $d_n = n(A_n - G_n)$。

(a) 由第 (ii) 部分，取 $x = \lambda_k > 0$，得 $\lambda_k^{k+1} - (k+1)\lambda_k + k \geq 0$，所以由第 (i) 部分

$$d_{k+1} \geq d_k \qquad \text{對每個} k \geq 1.$$

又 $A_1 = a_1 = G_1$，所以 $d_1 = 0$。因此

$$0 = d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \cdots \leq d_n,$$

所以 $d_n \geq 0$，兩邊除以 $n > 0$，便得對所有 n 都有 $A_n \geq G_n$。

(b)

想一想 若 $A_n = G_n$，這對整條不等式鏈中較早的各步（而不只是最後一步）說明了甚麼？

若 $A_n = G_n$，則 $d_n = 0$，不等式鏈變成 $0 = d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n = 0$。一條以 0 開始並以 0 結束的非遞減鏈必然是常數，所以對每個 $k = 1, \ldots, n-1$ 都有 $d_{k+1} = d_k$。由第 (i) 部分的恆等式，這表示 $G_k f(\lambda_k) = 0$，而因為 $G_k > 0$，所以 $f(\lambda_k) = 0$。由第 (ii) 部分得 $\lambda_k = 1$，即對每個 $k = 1, \ldots, n-1$ 都有 $a_{k+1} = G_k$。

現在對 k 用歸納法論證。當 $k = 1$ 時：$a_2 = G_1 = a_1$。若 $a_1 = \cdots = a_k = a$，則 $G_k = (a^k)^{1/k} = a$，所以 $a_{k+1} = G_k = a$。因此 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，得證。

驗算

取 $a_1, a_2, a_3 = 1, 4, 16$。則 $A_2 = 2.5$，$G_2 = 2$，$A_3 = 7$，$G_3 = 4$，所以 $d_1, d_2, d_3 = 0, 1, 9$：正如所料是遞增的。這裏 $\lambda_2 = (16/2)^{1/3} = 2$，而 $G_2 f(\lambda_2) = 2(8 - 6 + 2) = 8 = d_3 - d_2$，這印證了第 (i) 部分的恆等式。用電腦在數以千計的隨機正數數列上檢驗該恆等式及 $d_{k+1} \ge d_k$，並沒有發現任何例外。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分只證明了一個方向。把差寫成 $G_k f(\lambda_k)$ 就能同時得到兩個方向，因為 $G_k > 0$。
- 在 (iii)(b) 中只推出 $\lambda_{n-1} = 1$。你需要整條鏈的每一步都取等號，而這是由鏈從 $d_1 = 0$ 開始得出的。
- 在應用第 (ii) 部分之前忘記說明為何 $\lambda_k > 0$，而第 (ii) 部分只涵蓋 $x > 0$ 的情況。

STEP 之外

不等式 $x^{k+1} - (k+1)x + k \ge 0$ 是伯努利不等式（Bernoulli's inequality）的特例，而 AM–GM 本身則是琴生不等式（Jensen's inequality）應用於凹函數（concave function）$\ln x$ 的特例。這些凸性不等式是大學一年級分析學的基本工具。嘗試 AM–GM 的其他幾種證明，包括柯西（Cauchy）的「前進－後退」歸納法，是很好的練習；Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）涵蓋了相關的分析學背景。

詳細解答

STEP III 2018，第 6 題

純數學 • 複數與幾何

> **STEP III 2018，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q6

關鍵思路

一個複數（complex number）是實數，當且僅當它等於自己的共軛（conjugate），因此三點共線（collinear）的條件可以化為一條聯繫 z 與 z^* 的方程。在單位圓（unit circle）上有 $a^* = 1/a$，借此可以消去圓上各點的共軛，於是弦（chord）上任意一點 q 都滿足一條線性方程。之後每個結果，都是寫出兩條這樣的弦方程，再將它們相加或相減而得。

解答

第 (i) 部分

由於 A、Q、C 共線且 $A \neq C$，點 Q 等於 A 加上由 A 到 C 的向量的某個實數倍：對某個實數 t，有 $q - a = t(c - a)$。因為 $c \neq a$，可以相除，所以

$$\frac{q-a}{c-a} = t \quad \text{是實數。}$$

實數等於其共軛，故

$$\frac{q-a}{c-a} = \frac{q^*-a^*}{c^*-a^*},$$

其中 $c^* - a^* \neq 0$，因為 $c \neq a$。交叉相乘得 $(c-a)(q^*-a^*) = (c^*-a^*)(q-a)$，即所求。

現設 $aa^* = cc^* = 1$，於是 $a^* = 1/a$，$c^* = 1/c$。那麼

$$c^* - a^* = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{a-c}{ac} = -\frac{c-a}{ac},$$

而上一條方程變成

$$(c-a)\left(q^* - \frac{1}{a}\right) = -\frac{c-a}{ac}(q-a).$$

兩邊除以 $c-a\neq 0$，再乘以 $-ac$，得

$$-ac\,q^*+c=q-a,\qquad \text{即}\qquad q+ac\,q^*=a+c.$$

這就是弦 AC 的方程：經過 A 和 C 的直線上每一點 q 都滿足它。

第 (ii) 部分

由於 A、B、C、D 按逆時針次序排列，AC 與 BD 是圓內接(inscribed)凸四邊形(convex quadrilateral) 的兩條對角線 (diagonal)，因此它們相交於圓內部的一點 Q。特別地，Q 與這四點都不同，所以第 (i) 部分適用於直線 AC 和 BD：

$$q+ac\,q^*=a+c,$$
$$q+bd\,q^*=b+d.$$

第一式減去第二式，消去 q：

$$(ac-bd)\,q^*=(a+c)-(b+d). \tag{1}$$

想一想 我們已得到關於 q^* 的方程；怎樣才能得到一條關於 q 的方程與之相加？

對 (1) 取共軛，並再次利用 $a^*=1/a$ 等關係。左邊變成

$$\Big(\frac{1}{ac}-\frac{1}{bd}\Big)q=\frac{bd-ac}{abcd}\,q,$$

右邊變成

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{d}=\frac{a+c}{ac}-\frac{b+d}{bd}=\frac{bd(a+c)-ac(b+d)}{abcd}.$$

兩邊乘以 $-abcd$，得

$$(ac-bd)\,q=ac(b+d)-bd(a+c). \tag{2}$$

將 (1) 與 (2) 相加，

$$(ac-bd)(q+q^*)=a+c-b-d+abc+acd-abd-bcd.$$

把右邊各項分組，

$$(a-b)+(acd-bcd)+(c-d)+(abc-abd)=(a-b)(1+cd)+(c-d)(1+ab),$$

即得所求結果。

第 (iii) 部分

直線 AB 與 CD 是內接四邊形的一對對邊，所以它們的交點 P 在圓外。因此 P 與 A、B 不同，也與 C、D 不同。對共線的三點 A、P、B 應用第 (i) 部分，得 $p + ab\,p^* = a + b$。由於 p 是實數，$p^* = p$，所以

$$p(1 + ab) = a + b.$$

同理，由 C、P、D 得

$$p(1 + cd) = c + d.$$

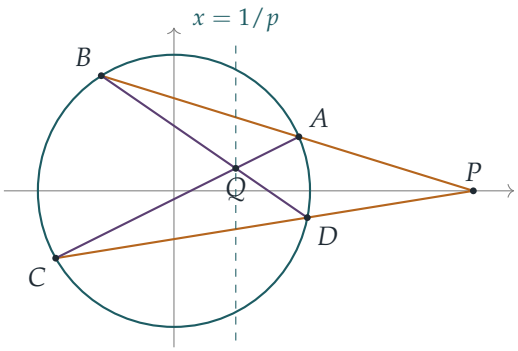
現將第 (ii) 部分的最終結果乘以 p，並代入這兩條方程：

$$\begin{aligned} p\,(ac - bd)(q + q^*) &= (a - b)\,p(1 + cd) + (c - d)\,p(1 + ab) \\ &= (a - b)(c + d) + (c - d)(a + b) \\ &= (ac + ad - bc - bd) + (ac + bc - ad - bd) \\ &= 2(ac - bd). \end{aligned}$$

由於 $ac - bd \neq 0$，可以兩邊除以它，得 $p(q + q^*) = 2$，即所求。

事實上，這裏 $ac - bd$ 不可能為零。若 $ac = bd$，則 (1) 迫使 $a + c = b + d$ 亦成立，於是 $z^2 - (a + c)z + ac$ 與 $z^2 - (b + d)z + bd$ 是同一個二次式（quadratic）。那麼 $\{a, c\} = \{b, d\}$，與各點互不相同矛盾。

由於 $q + q^* = 2\operatorname{Re} q$，這個結果說明 $\operatorname{Re} q = 1/p$。無論經過 P 的兩條直線怎樣選取，對角線的交點 Q 都落在固定的鉛垂線 $x = 1/p$ 上。



驗算

- 對稱情況：取 A、B 位於角度 $20°$、$70°$，C、D 位於 $-70°$、$-20°$。由關於實軸的反射對稱，P 和 Q 都是實數，而結果表明 $pq = 1$。設 $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，$b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$，由公式 $p = (a + b)/(1 + ab)$ 得 $p = \cos\frac{\alpha - \beta}{2} / \cos\frac{\alpha + \beta}{2} = \cos 25° / \cos 45° \approx 1.2817$。直接求 AC 與實軸的交點作為 q：$q \approx 0.7802$，而 $pq \approx 1.0000$。

- 圖中取 $p = 2.2$。對角線相交於 $x \approx 0.4545 = 1/2.2$，與預測相符。三條恆等式亦已用電腦在數千個隨機構形上驗證。

常見錯誤

- 忘記 $ac - bd$ 取共軛後得到的是 $1/(ac) - 1/(bd)$，而不是 $ac - bd$；必須小心消去因子 $abcd$。
- 除以 $c - a$ 或 $ac - bd$ 時沒有說明它為何不為零。

STEP 之外

這裏 Q 位於 P 關於該圓的極線（polar）上：對於單位圓外、與圓心距離為 p 的點 P，其極線是垂直於 OP、與 O 距離為 $1/p$ 的直線。這是射影幾何（projective geometry）中布洛卡定理（Brocard's theorem）的一部分，而背後的映射 $P \mapsto 1/p^*$ 正是關於該圓的反演（inversion），它是複分析（complex analysis）和幾何中的重要工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）對反演及阿岡圖（Argand diagram）的幾何有精彩的闡述。

詳細解答

STEP III 2018，第 7 題

純數學 • 棣美弗定理與級數

> **STEP III 2018，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q7

本題在 *Beyond STEP* 第 2.4 節 $\pi^2/6$ 中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/basel.html

關鍵思路

式子 $\cot\theta + \mathrm{i}$ 其實就是喬裝了的 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)/\sin\theta$，因此棣美弗定理（De Moivre's theorem）可把它的冪化為倍角。改用二項式定理（binomial theorem）展開同樣的冪，則得到一個以 $\cot^2\theta$ 為變量的多項式（polynomial），而它的根（roots）可以從 $\sin(2n+1)\theta$ 等於零的位置直接讀出。接着，韋達定理（Vieta's formula）不費吹灰之力便給出各根之和；再把 $1/\theta^2$ 夾在 $\cot^2\theta$ 與 $1+\cot^2\theta$ 之間，便能把巴塞爾（Basel）級數（series）困在兩個趨向同一極限的界之間。

解答

第 (i) 部分

由於 $\sin\theta \neq 0$，

$$\cot\theta \pm \mathrm{i} = \frac{\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}.$$

根據棣美弗定理，$(\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1} = \cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta$，所以

$$\frac{(\cot\theta+\mathrm{i})^{2n+1} - (\cot\theta-\mathrm{i})^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{2\mathrm{i}\,\sin^{2n+1}\theta} = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta},$$

這正是所求的恆等式（identity）。

現在改用二項式定理展開左方。記 $c = \cot\theta$ 及 $N = 2n+1$，

$$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} c^{N-k}\,\mathrm{i}^k\big(1-(-1)^k\big).$$

當 k 為偶數時，括號內的值是 0；當 k 為奇數時，則是 2。令 $k = 2j+1$，其中 $j = 0, 1, \ldots, n$；那麼 $\mathrm{i}^k = \mathrm{i}(-1)^j$，而 $c^{N-k} = c^{2(n-j)}$。除以 2i，並記 $x = \cot^2\theta$，得

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}x^{n-j} = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n.$$

把這個多項式記作 $P(x)$。它的次數是 n，首項係數（leading coefficient）為 $2n+1 \neq 0$。取 $\theta_m = \dfrac{m\pi}{2n+1}$，其中 $m = 1, \ldots, n$。那麼 $0 < \theta_m < \frac{1}{2}\pi$，故 $\sin\theta_m \neq 0$，且 $\sin(2n+1)\theta_m = \sin m\pi = 0$。因此

$$P\big(\cot^2\theta_m\big) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

想一想 我們怎樣知道這些就是全部的解，而不只是其中一部分？

在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上，$\cot\theta$ 為正而且嚴格遞減（strictly decreasing），所以 $\cot^2\theta$ 亦嚴格遞減。角 $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$ 全都位於這個區間內，故這 n 個數 $\cot^2\theta_m$ 互不相同。一個 n 次多項式最多只有 n 個根，所以它們恰好就是 $P(x) = 0$ 的所有解。

第 (ii) 部分

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$ 的各根之和是 $-a_{n-1}/a_n$。這裏 $a_n = \binom{2n+1}{1}$，$a_{n-1} = -\binom{2n+1}{3}$，所以

$$\sum_{m=1}^{n}\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3},$$

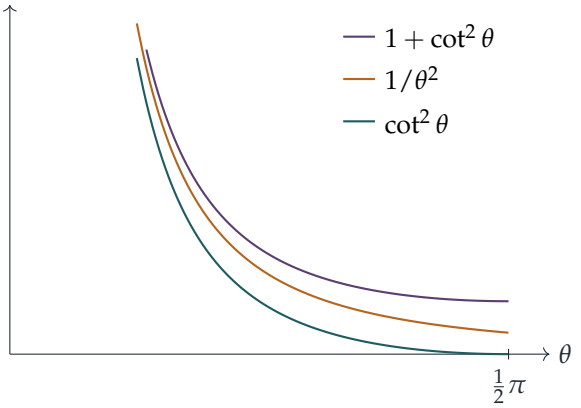
正如所求。

第 (iii) 部分

題目給出，當 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 時，$0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$。三者皆為正數，所以平方後大小次序不變，而取倒數（reciprocal）則令次序倒轉：

$$\frac{1}{\tan^2\theta} < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad \text{即} \qquad \cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2\theta,$$

這裏用了 $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$。



令 $\theta=\theta_m=\dfrac{m\pi}{2n+1}$，使得 $\dfrac{1}{\theta_m^2}=\dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{m^2}$，然後把 $m=1,\dots,n$ 的不等式相加。記 $S_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}$，並利用第 (ii) 部分，得

$$\frac{n(2n-1)}{3}<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}S_n<n+\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{2n(n+1)}{3}.$$

全式乘以 $\pi^2/(2n+1)^2>0$，得

$$\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}<S_n<\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

把分子分母同除以 n^2，可見當 $n\to\infty$ 時兩個分數都趨向 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，所以兩個界都趨向 $\frac{\pi^2}{6}$。根據夾逼定理（squeeze / sandwich theorem），$S_n\to\frac{\pi^2}{6}$，即

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

驗算

- 當 $n=1$ 時，多項式是 $3x-1$，其根為 $\frac{1}{3}=\cot^2\frac{\pi}{3}$，而第 (ii) 部分的公式亦給出 $1\times1/3=\frac{1}{3}$。當 $n=2$ 時，$\cot^2\frac{\pi}{5}+\cot^2\frac{2\pi}{5}$ 應等於 2；數值上 $1.894+0.106=2.000$。
- 取 $n=50$，第 (iii) 部分的界為 $1.5964<S_{50}=1.6251<1.6448$，而 $\pi^2/6\approx1.6449$。兩個界互相逼近，這是理所當然的，因為兩者之差為 $\pi^2n/(2n+1)^2\approx\pi^2/(4n)$。

常見錯誤

- 證明了每個 $\cot^2\theta_m$ 都是根，卻忘記論證它們互不相同——正是這一點才令它們成為全部的解。
- 弄錯韋達定理中的正負號：x^{n-1} 的係數是 $-\binom{2n+1}{3}$，所以各根之和是 $+\binom{2n+1}{3}/\binom{2n+1}{1}$。

► 把不等式倒轉時沒有指出所有量皆為正數，而這正是容許平方及取倒數的前提。

STEP 之外

歐拉（Euler）在 1734 年首先求得 $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$，方法是把 $\sin x/x$ 當作一個「無窮次多項式」來比較係數——與這裏所用的韋達思路相同，只是欠缺了夾逼法所提供的嚴謹性。到了大學，你會透過傅里葉級數（Fourier series）（帕塞瓦爾恆等式（Parseval's identity））再次遇見這個和，亦會以 $\zeta(2)$ 的身份遇見它，即黎曼（Riemann）ζ 函數（zeta function）的第一個值；所有 $\zeta(2k)$ 都是 π^{2k} 的有理數倍，但人們對 $\zeta(3)$ 所知甚少。若想了解極限與夾逼定理背後的分析學，可以讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2018，第 8 題

純數學 • 小數部分的積分

STEP III 2018，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s3-q8

關鍵思路

被積函數（integrand）中最麻煩的是 x^{-1}，所以作代換（substitution）$y = 1/x$：這把 $[0,1]$ 變成 $[1,\infty)$，而後者很自然地可以分拆成一個個單位區間。如果 f 的週期（period）是 1，每個單位區間都可以平移回 $[0,1]$，剩下的有理因子就組成一個伸縮和（telescoping sum）。這樣一來，第 (ii) 部分只需看出 $\{x\}$ 和 $\{2x\}$ 的週期都是 1 便可。

解答

第 (i) 部分

設 $x = 1/y$，於是 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$；當 x 由 0 變到 1 時，y 由 ∞ 遞減至 1。此外 $1 + x = \frac{y+1}{y}$，所以

$$I = \int_{\infty}^{1} \frac{\mathrm{f}(y)}{(y+1)/y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y.$$

把 $[1,\infty)$ 分拆成區間 $[n, n+1]$（其中 $n = 1, 2, 3, \ldots$），便得

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y,$$

正是所求。

現在假設對所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x+1)$，因此對每個整數 n 都有 $\mathrm{f}(x+n) = \mathrm{f}(x)$。在第 n 個積分中設 $y = x + n$，於是 x 的範圍是 $[0,1]$：

$$\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{f}(x)}{(x+n)(x+n+1)}\,\mathrm{d}x.$$

想一想 怎樣把無限多個這樣的積分加起來？

每個積分都有相同的 $\mathrm{f}(x)$ 和積分範圍，所以（按題目指示，不理會收斂（convergence）問題）我們可以交換求和與積分的次序，先把有理因子加起來。利用部分分式（partial fractions），

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1},$$

所以這個和會逐項相消：對固定的 $x \in [0,1]$，

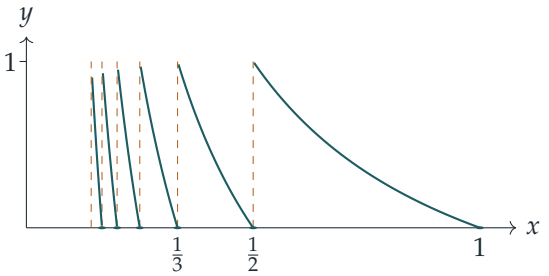
$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+N+1} \longrightarrow \frac{1}{1+x} \quad \text{當} N \to \infty.$$

因此

$$I = \int_0^1 \mathrm{f}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{f}(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$

這就是我們想要的結果。

第 (ii) 部分



上面 $\{x^{-1}\}$ 的圖像說明了為何直接計算是行不通的：在每個區間 $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ 上，它等於 $\frac{1}{x} - n$，而這樣的片段有無限多段，越來越密地擠向 0。第 (i) 部分讓我們完全避開了這些麻煩。

第一個積分。取 $\mathrm{f}(x) = \{x\}$。把 x 加 1，$\lfloor x \rfloor$ 也會加 1，所以 $\{x+1\} = \{x\}$，即 f 的週期是 1。在 $[0,1)$ 上有 $\{x\} = x$（單一點 $x = 1$ 的函數值不影響積分）。所以由第 (i) 部分，

$$\int_0^1 \frac{\{x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = 1 - \ln 2.$$

第二個積分。取 $\mathrm{f}(x) = \{2x\}$，那麼正如所需，$\mathrm{f}(x^{-1}) = \{2x^{-1}\}$。

想一想 函數 $\{2x\}$ 的週期是 $\frac{1}{2}$。我們仍然可以用第 (i) 部分嗎？

可以：任何週期為 $\frac{1}{2}$ 的函數，週期也是 1，因為 $\{2(x+1)\} = \{2x+2\} = \{2x\}$。所以第 (i) 部分適用。在 $[0, \frac{1}{2})$ 上，$2x \in [0,1)$ 而 $\{2x\} = 2x$；在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上，$2x \in [1,2)$ 而 $\{2x\} = 2x - 1$。因此

$$\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

把 $\frac{2x}{1+x} = 2 - \frac{2}{1+x}$ 及 $\frac{2x-1}{1+x} = 2 - \frac{3}{1+x}$ 代入，

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\ln\tfrac{3}{2},$$
$$\int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 3\ln\frac{2}{3/2} = 1 - 3\ln\tfrac{4}{3}.$$

兩者相加，再合併對數（logarithm）項，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 - 6\ln 2 + 3\ln 3 \\ &= 2 + \ln 3 - 4\ln 2 = 2 + \ln\tfrac{3}{16}.\end{aligned}$$

驗算

- 由於 $0 \le \{\cdot\} < 1$，兩個答案都應該介乎 0 與 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2 \approx 0.693$ 之間。我們得到 $1 - \ln 2 \approx 0.3069$ 和 $2 + \ln\frac{3}{16} \approx 0.3260$，都很合理：小數部分（fractional part）的平均值約為 $\frac{1}{2}$，所以答案應大約是 0.693 的一半。
- 用電腦把在片段 $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ 上（第二個積分則用這些片段的兩半）的積分逐一加起來，取數以千計的片段，得到 0.306853 和 0.326024，與兩個答案吻合。

常見錯誤

- 代換 $y = 1/x$ 後把積分上下限弄反，又漏掉負號；其實 $\mathrm{d}x$ 帶來的負號與上下限對調正好互相抵消。
- 以為在整個 $[0,1]$ 上都有 $\{2x\} = 2x$：其實它在 $x = \frac{1}{2}$ 處下跌 1。
- 以為第 (i) 部分要求週期恰好是 1；其實任何週期為 $\frac{1}{k}$（k 為正整數）的函數，週期也是 1。

STEP 之外

我們在這裏不加說明就交換了無窮級數與積分的次序，而這正是在大學裏需要嚴格論證的那類步驟；單調收斂定理（monotone convergence theorem）和控制收斂定理（dom-

inated convergence theorem）等定理說明了何時可以安全地這樣做（在這裏，當 $f \geq 0$ 時每一項都非負，屬於容易的情況）。同樣的代換思路可以得出一些關於小數部分的著名積分，例如 $\int_0^1 \{1/x\}\,\mathrm{d}x = 1 - \gamma$，其中 γ 是歐拉（Euler）常數。若想嚴謹地學習極限、級數與積分，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2018，第 9 題

力學 • 碰撞與遞推關係

> **STEP III 2018，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q9

關鍵思路

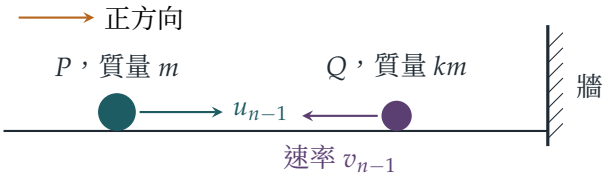
P 與 Q 每次碰撞（collision）都給出兩條線性方程：一條來自動量守恆（conservation of momentum），一條來自牛頓碰撞定律（Newton's law of restitution），把碰撞前後的速度聯繫起來。牆壁只是把 Q 的速度反向，因此某次碰撞前的狀態完全由上一次碰撞後的狀態決定。這樣便得到一對關於 u_n 和 v_n 的一階遞推關係（first-order recurrence），消去 v 後就剩下一條關於 u_n 的二階遞推關係（second-order recurrence）。第 (ii) 部分就是常規工作：把線性遞推關係的解配合其首兩項。

解答

我們把 P 和 Q 視為在光滑（smooth）地面上沿同一直線運動的質點（particle），因此兩次碰撞之間沒有水平力作用，每個質點都保持等速。全程取朝向牆壁的方向為正方向。

兩次碰撞之間發生甚麼。 第 n 次碰撞後，Q 的速度為 v_n（朝向牆壁，因為它接着會撞牆）。與牆的碰撞是完全彈性（perfectly elastic）的，所以 Q 以速度 $-v_n$ 反彈回來，而 P 的速度仍是 u_n。因此在第 $n+1$ 次碰撞前一刻，速度分別為 u_n（P 的）和 $-v_n$（Q 的）。

只要正確理解 v_0，這對第一次碰撞同樣成立：碰撞前，Q 以速率 v_0 離開牆壁運動，所以其速度為 $-v_0$，正好是上述模式在 $n = 0$ 時的情況。



第 (i) 部分

對第 n 次碰撞（$n \geq 1$），由動量守恆（兩邊除以 m）得

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = u_n + kv_n. \tag{1}$$

接近速率（speed of approach）為 $u_{n-1} - (-v_{n-1}) = u_{n-1} + v_{n-1}$。碰撞後，較接近牆壁的 Q 朝牆運動得比 P 快，所以分離速率（speed of separation）為 $v_n - u_n$。由牛頓碰撞定律得

$$v_n - u_n = e\,(u_{n-1} + v_{n-1}). \tag{2}$$

把 (2) 中的 v_n 代入 (1)：

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = (1+k)u_n + ke\,(u_{n-1} + v_{n-1}),$$

所以

$$k(1+e)\,v_{n-1} = (1-ke)\,u_{n-1} - (1+k)\,u_n \qquad (n \geq 1). \tag{3}$$

這條式把每個 v 以兩個相鄰的 u 表示，正是消去 v 所需要的。

? **想一想** 方程 (3) 消去了 v_{n-1}，但 (2) 還含有 v_n。該怎樣處理？

方程 (3) 對所有 $n \geq 1$ 成立，所以我們也可以用 $n+1$ 代替 n：

$$k(1+e)\,v_n = (1-ke)\,u_n - (1+k)\,u_{n+1}.$$

現在把 (2) 乘以 $k(1+e)$，並利用這兩條式替換 $k(1+e)v_n$ 和 $k(1+e)v_{n-1}$：

$$(1-ke)u_n - (1+k)u_{n+1} - k(1+e)u_n = ke(1+e)\,u_{n-1} + e\big[(1-ke)u_{n-1} - (1+k)u_n\big].$$

整理各項。右邊 u_{n-1} 的係數為 $ke + ke^2 + e - ke^2 = e(1+k)$。把 u_n 的項移到左邊，其係數為

$$1 - ke - k - ke + e + ke = 1 - k + e - ke = (1+e)(1-k).$$

因此

$$(1+k)u_{n+1} - (1-k)(1+e)u_n + e(1+k)u_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1),$$

再以 $n-1$ 代替 n，便得到對 $n \geq 2$ 成立的 $(*)$，即所求。

第 (ii) 部分

當 $e=\frac{1}{2}$ 及 $k=\frac{1}{34}$ 時，把 $(*)$ 乘以 68 得

$$70u_n-99u_{n-1}+35u_{n-2}=0,$$

其輔助方程（auxiliary equation）$70t^2-99t+35=(10t-7)(7t-5)=0$ 的根為 $\frac{7}{10}$ 和 $\frac{5}{7}$，與題目給出的形式吻合。

要確定 A 和 B 需要兩個條件，即首兩項。我們已知 u_0。至於 u_1，在 (3) 中取 $n=1$：

$$(1+k)u_1=(1-ke)u_0-k(1+e)v_0,$$

$$\text{所以}\quad \tfrac{35}{34}u_1=\tfrac{67}{68}u_0-\tfrac{3}{68}v_0,\quad \text{得}\quad u_1=\frac{67u_0-3v_0}{70}.$$

把 $n=0$ 和 $n=1$ 代入給定的形式，

$$A+B=u_0,\qquad \tfrac{7}{10}A+\tfrac{5}{7}B=\frac{67u_0-3v_0}{70}.$$

把第二條方程乘以 70 得 $49A+50B=67u_0-3v_0$。減去第一條方程的 49 倍，

$$B=18u_0-3v_0,\qquad A=u_0-B=3v_0-17u_0.$$

n 很大時 u_n 的正負號。 由於 $\frac{5}{7}>\frac{7}{10}$（因為 $50>49$），B 項佔主導地位。準確地說，

$$u_n=\left(\tfrac{5}{7}\right)^n\left[B+A\left(\tfrac{49}{50}\right)^n\right],$$

而 $\left(\frac{49}{50}\right)^n\to 0$，所以括號趨於 B。若 $0<6u_0<v_0$，則 $B=3(6u_0-v_0)<0$，所以對所有足夠大的 n，括號都是負數。由於 $\left(\frac{5}{7}\right)^n>0$，當 n 很大時 u_n 為負，即所求。（具體而言，一旦 $|A|(\frac{49}{50})^n<|B|$，括號便是負數。）

從物理角度看，P 最終會被撞回、離開牆壁：Q 相對於 P 有足夠的初始速率，能不斷把它推回去，儘管 Q 輕得多。

驗算

- 取 $e=1$、$k=1$（質量相等、完全彈性）：$(*)$ 變成 $2u_n+2u_{n-2}=0$，所以 $u_n=-u_{n-2}$。事實上，質量相等的物體作彈性碰撞會互換速度，所以 $u_1=-v_0$ 及 $u_2=-v_1$；然後 Q 帶着 P 原來的速度 u_0 撞牆再折返，得 $u_2=-u_0$。
- 在 $n=0$ 時公式給出 $A+B=u_0$，在 $n=1$ 時給出

  $$\tfrac{7}{10}(3v_0-17u_0)+\tfrac{5}{7}(18u_0-3v_0)=\tfrac{1}{70}(67u_0-3v_0),$$

  正如預期。
- 取 $u_0=1$、$v_0=7$，得 $A=4$、$B=-3$。逐次計算每次碰撞，結果與公式完全吻合，而 u_n 首次變為負數是在 $n=15$，此時 $u_{15}\approx -0.00029$。

常見錯誤

- 忘記 Q 在碰撞前一刻的速度是 $-v_{n-1}$ 而不是 v_{n-1}：牆壁把它反向了。
- 在碰撞定律方程中把分離速率的正負號弄錯；碰撞後 Q 在正方向上位於 P 前面，所以分離速率是 $v_n - u_n$。
- 未從碰撞方程求出 u_1 便使用 $u_1 = \frac{7}{10}A + \frac{5}{7}B$；單靠 $(*)$ 是無法得出它的。

STEP 之外

方程 (1) 和 (2) 合起來是一個線性映射（linear map），把狀態 (u_{n-1}, v_{n-1}) 映到 (u_n, v_n)，所以整個運動就是反覆乘以一個 2×2 矩陣（matrix）。根 $\frac{7}{10}$ 和 $\frac{5}{7}$ 是它的特徵值（eigenvalue），長期行為由最大的特徵值支配：這正是線性動力系統（linear dynamical systems）與差分方程（difference equations）理論的起點。想進一步了解碰撞力學，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）；至於矩陣的觀點，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數導論）。

詳細解答

STEP III 2018，第 10 題

力學 • 複擺

> **STEP III 2018，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q10

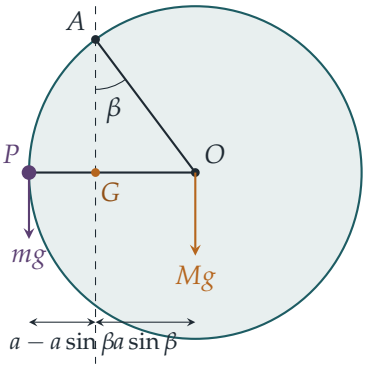
關鍵思路

圓盤與質點合起來構成單一個剛體（rigid body），繞固定軸 L 轉動，因此一切都由一個角度決定。在平衡時，整體的質心（centre of mass）必須位於 A 的正下方，這就是關於 A 的力矩（moment）平衡。至於運動，由於軸是光滑（smooth）的，該處的反作用力不做功，所以能量守恆（conservation of energy）。只要把能量寫成 θ 和 $\dot{\theta}$ 的函數，對它求導便得到運動方程（equation of motion），再把 $\sin\theta$ 換成 θ，便得出小幅振動（small oscillations）的結果。

解答

我們把圓盤模型化為均勻的剛性薄片（lamina），把質點視為固定在圓盤邊緣上的點質量（point mass），並假設軸 L 是光滑的。

平衡。 關於 A 有力矩的力只有兩個重力：作用於 O 的 Mg 和作用於 P 的 mg。A 處的反作用力通過 A。由於 AO 與向下的鉛垂線成角 β，O 位於 A 某一側、水平距離為 $a\sin\beta$ 之處，不妨設在右側。這樣重力 Mg 會令圓盤繞 A 順時針轉動，而只有 mg 能與之平衡，所以 P 必須在通過 A 的鉛垂線的*左*側。因為 OP 是水平的，長度為 a，所以 P 在 A 左方的水平距離為 $a - a\sin\beta$。（這裏 $a\sin\beta < a$，所以 P 確實在鉛垂線的左側。）



關於 A 取力矩，

$$Mg\,a\sin\beta = mg\,(a - a\sin\beta) \quad\Longrightarrow\quad \sin\beta = \frac{m}{M+m}.$$

O 和 P 都位於 A 下方、鉛垂距離為 $a\cos\beta$ 之處。所以在以 AP 為斜邊（hypotenuse）的直角三角形中，水平邊為 $a(1-\sin\beta)$，鉛垂邊為 $a\cos\beta$：

$$\begin{aligned} AP^2 &= a^2(1-\sin\beta)^2 + a^2\cos^2\beta = a^2\big(2-2\sin\beta\big) \\ &= 2a^2\Big(1-\frac{m}{M+m}\Big) = \frac{2Ma^2}{M+m}, \end{aligned}$$

因此 $AP/a = \sqrt{2M/(M+m)}$，正如所求。

值得留意整體質心 G 的位置。它是 O 和 P 的加權平均（weighted average），所以位於線段 OP 上，即在 A 下方深度 $a\cos\beta$ 處。在平衡時它位於 A 的正下方，所以

$$AG = a\cos\beta.$$

能量守恆。 圓盤與質點作為一個剛體一起運動。在平衡時 OP 是水平的，而 OP 隨剛體一起轉動，所以當 OP 與水平線成角 θ 時，整個剛體已從平衡位置轉過了 θ。因此它的角速率（angular speed）為 $|\dot\theta|$。

？ 想一想 質點的速率是多少？

剛體上每一點都沿以軸為圓心的圓周運動。質點與 A 的距離恆為 AP，所以它的速率是 $AP\,|\dot\theta|$，動能（kinetic energy）為

$$\tfrac{1}{2}m\,AP^2\,\dot\theta^2 = \tfrac{1}{2}m\cdot 2a^2(1-\sin\beta)\,\dot\theta^2 = (1-\sin\beta)\,ma^2\dot\theta^2,$$

這裏用了上面得到的 $AP^2 = 2a^2(1-\sin\beta)$。圓盤的動能是 $\frac{1}{2}I\dot\theta^2$。

至於勢能（potential energy），可把總質量 $M+m$ 視為集中在 G。直線 AG 在平衡時是鉛垂的，它同樣轉過了 θ，所以 G 現在位於 A 下方深度 $a\cos\beta\cos\theta$ 處。以平衡位置為

勢能零點，

$$\text{勢能} = (M+m)g\big(a\cos\beta - a\cos\beta\cos\theta\big) = (M+m)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta).$$

軸是光滑的，而 A 處的反作用力作用在一個不動的點上，所以它不做功。唯一其他的力是重力，而重力是保守力（conservative force）。所以動能加勢能是常數：

$$\tfrac{1}{2}I\dot\theta^2 + (1-\sin\beta)\,ma^2\dot\theta^2 + (m+M)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta) = \text{常數},$$

這正是所求的結果。

小幅振動。 對 t 求導：

$$\dot\theta\Big[\big(I + 2(1-\sin\beta)ma^2\big)\ddot\theta + (M+m)ga\cos\beta\,\sin\theta\Big] = 0.$$

只要 $\dot\theta \neq 0$，方括號內的式子就必須為零；由連續性，它在每一時刻都為零。當 θ 很小時，$\sin\theta \approx \theta$，所以

$$\ddot\theta = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{(M+m)ga\cos\beta}{I + 2(1-\sin\beta)ma^2},$$

這是週期（period）為 $2\pi/\omega$ 的簡諧運動（simple harmonic motion）。

現在設 $m = \frac{3}{2}M$。那麼 $\sin\beta = \dfrac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}$，又因為 β 是銳角，$\cos\beta = \frac{4}{5}$。分子為

$$\tfrac{5}{2}M\cdot ga\cdot\tfrac{4}{5} = 2Mga,$$

而以 $I = \frac{3}{2}Ma^2$ 代入，分母為

$$\tfrac{3}{2}Ma^2 + 2\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{2}Ma^2 = \tfrac{3}{2}Ma^2 + \tfrac{6}{5}Ma^2 = \tfrac{27}{10}Ma^2.$$

所以 $\omega^2 = \dfrac{20g}{27a}$，週期為

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{27a}{20g}} = 2\pi\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3a}{5g}} = 3\pi\sqrt{\frac{3a}{5g}},$$

這裏用了 $\sqrt{27/20} = \sqrt{9\cdot 3/(4\cdot 5)} = \frac{3}{2}\sqrt{3/5}$。這就是所求的週期。

驗算

- 取 $m = 0$，得 $\sin\beta = 0$ 及 $AP/a = \sqrt{2}$。此時圓盤懸掛時 O 在 A 的正下方，而與 O 同高的邊緣點與 A 的距離確實是 $\sqrt{2}\,a$。週期變為 $2\pi\sqrt{(3a/2)/g}$，正是以邊緣上一點為支點的圓盤的熟悉結果。

- 動能各項相加得 $\frac{1}{2}(I + m\,AP^2)\dot{\theta}^2$，其中括號內是整個剛體關於 L 的轉動慣量（moment of inertia），理應如此。
- 以 $m = \frac{3}{2}M$ 及 $a = 0.5\,\text{m}$ 對該剛體進行逐步的電腦模擬，得到小幅振動週期為 $1.64815\,\text{s}$。公式給出 $3\pi\sqrt{1.5/49.05} \approx 1.64815\,\text{s}$。模擬亦顯示，即使擺幅很大，能量表達式仍保持不變。

常見錯誤

- 把 P 放在鉛垂線上與 O 同一側。這樣兩個重力會令剛體向同一方向轉動，不可能平衡。
- 用 a 而不是 AP 作為質點與軸的距離。質點是繞 A 而不是繞 O 作圓周運動。
- 分別計算 O 和 P 的勢能，結果在三角運算中迷失方向。改用與 A 相距 $a\cos\beta$ 的整體質心 G，計算會簡潔得多。

STEP 之外

這是一個複擺（compound pendulum）：任何繞固定軸擺動的剛體，其振動都如同一個長度為 $I_{\text{總}}/\big((M+m)h\big)$ 的單擺，其中 h 是軸到質心的距離。我們的能量方法是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的單變量情況：在拉格朗日力學中，運動方程由以單一廣義坐標（generalised coordinate）表示的動能和勢能得出。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對剛體轉動和物理擺有細緻的論述。

詳細解答

STEP III 2018，第 11 題

力學 • 鬆弛繩與拋體

STEP III 2018，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

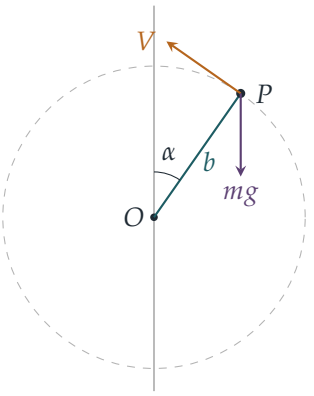
step.maths.org/questions/18-s3-q11

關鍵思路

當繩的張力（tension）降至零的一刻，繩便會變得鬆弛，所以該瞬間沿徑向的運動方程便給出 V。此後質點只是一個普通的拋射體（projectile），而當質點與 O 的距離回到 b 時，繩便再次拉緊。若採用以 O 為中心的坐標，這個條件會漂亮地化簡，因為拋射體由圓上出發，並沿切線（tangent）方向運動。最後一部分則歸結為：在急拉（jerk）的一刻，速度是否正好沿着繩的方向。

解答

我們把質點模擬為一個質量為 m 的質點，繫於一條輕而不可伸長（inextensible）的繩上，並忽略空氣阻力。取 O 為原點，x 為水平方向，y 為鉛直向上，並假設質點沿逆時針方向擺動，使繩在向上鉛直線右方的點 P 變得鬆弛。



在 P 點，繩與向上鉛直線成角 α，所以 $P = (b\sin\alpha,\ b\cos\alpha)$。該處的速度垂直於繩，方

向朝上並越過頂部：

$$\mathbf{v}_P = V(-\cos\alpha,\ \sin\alpha).$$

繩變得鬆弛時的速率

沿繩朝 O 的方向分解。張力 R 朝向 O；由於 P 在 O 之上，重力朝向 O 的分量亦為 $mg\cos\alpha$。質點在半徑為 b 的圓上運動，所以

$$R + mg\cos\alpha = \frac{mV^2}{b}.$$

當 $R = 0$ 時繩變得鬆弛，所以

$$V^2 = gb\cos\alpha, \qquad V = \sqrt{gb\cos\alpha}.$$

繩何時再次拉緊

繩一旦鬆弛，質點便是一個拋射體。經過時間 t 後，其位置為

$$x = b\sin\alpha - Vt\cos\alpha, \qquad y = b\cos\alpha + Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

當 $x^2 + y^2 = b^2$ 時，繩再次拉緊。展開得

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= b^2\sin^2\alpha - 2bVt\sin\alpha\cos\alpha + V^2t^2\cos^2\alpha \\ &\quad + b^2\cos^2\alpha + V^2t^2\sin^2\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4 + 2bVt\sin\alpha\cos\alpha - bgt^2\cos\alpha - gVt^3\sin\alpha \\ &= b^2 + \left(V^2 - gb\cos\alpha\right)t^2 - gVt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4. \end{aligned}$$

含 t 的項互相抵消，因為質點起初沿切線方向運動；含 t^2 的項亦互相抵消，因為 $V^2 = gb\cos\alpha$。因此

$$x^2 + y^2 - b^2 = gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - V\sin\alpha\right).$$

當 $0 < t < 4V\sin\alpha/g$ 時，此式為負，所以質點嚴格位於圓內，繩保持鬆弛。此式在時間 T 再次等於零（其後變為正），其中

$$gT = 4V\sin\alpha,$$

此即所求。

拉緊前一刻的運動方向

在時間 T，速度的分量為

$$\dot{x} = -V\cos\alpha, \qquad \dot{y} = V\sin\alpha - gT = V\sin\alpha - 4V\sin\alpha = -3V\sin\alpha.$$

所以質點正向左下方運動，而其路徑與水平所成的角 β 滿足

$$\tan\beta = \frac{|\dot{y}|}{|\dot{x}|} = \frac{3V\sin\alpha}{V\cos\alpha} = 3\tan\alpha,$$

此即所求。

靜止下來

想一想 速度要滿足甚麼條件，質點才會驟然停住？

急拉只會消去沿繩方向的動量（momentum）分量，垂直於繩的分量則不受影響。所以質點靜止下來，當且僅當該垂直分量本身已經為零，即當且僅當拉緊前一刻的速度平行於繩 $\overrightarrow{OQ}$，其中 Q 為質點在時間 T 的位置。（速度並非零，因為 $\dot{x} = -V\cos\alpha \neq 0$。）

利用 $V^2 = gb\cos\alpha$ 及 $T = 4V\sin\alpha/g$，

$$x(T) = b\sin\alpha - \frac{4V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = b\sin\alpha\,(1-4\cos^2\alpha),$$
$$y(T) = b\cos\alpha + \frac{4V^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{8V^2\sin^2\alpha}{g} = b\cos\alpha\,(1-4\sin^2\alpha).$$

向量 (x,y) 與 $(\dot{x},\dot{y})$ 平行，當且僅當 $x\dot{y} - y\dot{x} = 0$。除以 $-bV$，得

$$3\sin^2\alpha\,(1-4\cos^2\alpha) - \cos^2\alpha\,(1-4\sin^2\alpha) = 0.$$

設 $S = \sin^2\alpha$，則 $\cos^2\alpha = 1-S$ 及 $1-4\cos^2\alpha = 4S-3$：

$$\begin{aligned} 3S(4S-3) - (1-S)(1-4S) &= 0 \\ 12S^2 - 9S - (1-5S+4S^2) &= 0 \\ 8S^2 - 4S - 1 &= 0, \end{aligned}$$

所以 $S = \frac{1}{16}\left(4 \pm \sqrt{16+32}\right) = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{3}\right)$。由於 $S = \sin^2\alpha > 0$，負根不可能成立，而餘下的根位於 $(0,1)$ 之內，所以它對應一個真正的銳角。以上每一步都是可逆的，所以當繩拉緊時質點瞬間靜止，當且僅當

$$\sin^2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

驗算

- 公式 $V^2 = gb\cos\alpha$ 表明當 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 時 $V \to 0$：繩要在 O 的水平高度變得鬆弛，質點必須在該處已經停下，這是正確的。

- 當 $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$ 時，得 $\alpha \approx 55.7°$ 及 $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}(3-\sqrt{3})$，所以 $Q = \big(b\sin\alpha\,(\sqrt{3}-2),\ -\sqrt{3}\,b\cos\alpha\big)$，位於 O 的左下方。OQ 的斜率為 $\sqrt{3}\cot\alpha/(2-\sqrt{3})$，而路徑的斜率為 $3\tan\alpha$。兩者相符，因為

$$3(2-\sqrt{3})\tan^2\alpha = \frac{3(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}.$$

  以電腦模擬這個運動，三個結果均得到證實。

常見錯誤

- 只用能量來求 V：能量把 V 與初速聯繫起來，但以 b、g 及 α 確定 V 的，是張力為零的條件。
- 弄錯 P 點的速度方向。速度垂直於 OP，所以它與水平（而非鉛直）成角 α。
- 忘記證明 T 是繩首次拉緊的時間；因式分解（factorisation）$gt^3(\frac{1}{4}gt - V\sin\alpha)$ 正好說明了這一點。

STEP 之外

繩只能拉、不能推，所以鬆弛繩問題實際上是一個約束時有時無的受約束系統（constrained system）；同樣的單側約束（one-sided constraint）概念，亦出現於接觸力學（contact mechanics），以及帶不等式約束的拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）之中。驟然的急拉是一種衝擊性約束力（impulsive constraint force），在大學一年級課程中會與碰撞及恢復係數（coefficient of restitution）一併討論。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對圓周運動和衝量都有細緻的闡述。

詳細解答

STEP III 2018，第 12 題

概率與統計 • 順序統計量

STEP III 2018，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s3-q12

關鍵思路

事件「第 k 小的數不大於 y」與事件「n 個數之中至少有 k 個不大於 y」是同一回事，而不大於 y 的數的個數服從二項分佈（binomial distribution）。由此可以立即得出分佈函數（distribution function）。將它求導會得到兩個和式，而 (ii) 中的兩條二項式恆等式正好令它們相消（telescope）。一旦知道了密度函數（density），由於密度函數的積分等於 1，便可以順手求出一個積分；而同一個積分（把 n 和 k 各自平移）就給出期望值。

解答

把這 n 個數記為 $X_1, \ldots, X_n$。它們互相獨立（independent），每個都在 $[0,1]$ 上服從均勻分佈（uniform distribution）。

第 (i) 部分

固定 y，其中 $0 \le y \le 1$，並設 N 為滿足 $X_i \le y$ 的 X_i 的個數。每個 X_i 滿足 $X_i \le y$ 的概率為 y，且與其他各數獨立，所以 $N \sim \mathrm{B}(n, y)$。

$Y_k \le y$ 成立，當且僅當這些數之中至少有 k 個不大於 y。若 $Y_k \le y$，則 Y_k 以及比它小的 $k-1$ 個數都不大於 y，所以 $N \ge k$。反過來，若 $N \ge k$，則最小的 k 個數都不大於 y，特別地 $Y_k \le y$。因此

$$\mathrm{P}(Y_k \le y) = \mathrm{P}(N \ge k) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} y^m (1-y)^{n-m},$$

這就是 $(*)$。

第 (ii) 部分

把階乘寫出來，對 $1 \le m \le n$，

$$m\binom{n}{m} = \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,\big((n-1)-(m-1)\big)!} = n\binom{n-1}{m-1},$$

同理，對 $0 \le m \le n-1$，

$$(n-m)\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m-1)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{m!\,\big((n-1)-m\big)!} = n\binom{n-1}{m}.$$

（當 $m = n$ 時，左邊為 0；若把 $\binom{n-1}{n}$ 理解為 0，右邊亦為 0。）

密度函數。 Y_k 的密度函數 $f(y)$ 是 $(*)$ 的導數。用乘積法則（product rule）逐項求導，

$$f(y) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m}\Big[m\,y^{m-1}(1-y)^{n-m} - (n-m)\,y^{m}(1-y)^{n-m-1}\Big].$$

在第二部分中，由於因子 $n-m$，$m=n$ 的項等於零，所以該和式實際上只到 $m = n-1$。利用上述兩條恆等式，

$$f(y) = n\sum_{m=k}^{n}\binom{n-1}{m-1}y^{m-1}(1-y)^{n-m} \;-\; n\sum_{m=k}^{n-1}\binom{n-1}{m}y^{m}(1-y)^{n-1-m}.$$

想一想 這兩個和式看起來幾乎一樣。怎樣才能把它們對齊？

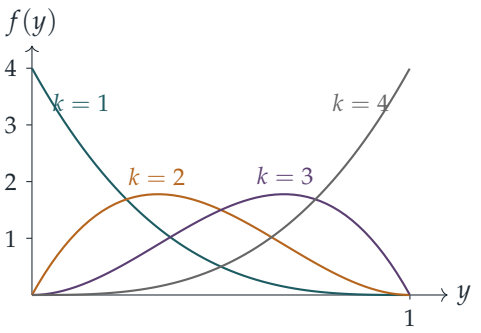
在第二個和式中令 $j = m+1$。它變成

$$n\sum_{j=k+1}^{n}\binom{n-1}{j-1}y^{j-1}(1-y)^{n-j},$$

這與第一個和式逐項相同，只是從 $k+1$ 而不是從 k 開始。除了第一個和式中 $m=k$ 的項之外，其餘全部抵消：

$$f(y) = n\binom{n-1}{k-1}y^{k-1}(1-y)^{n-k},$$

正如所求。（若 $k = n$，第二個和式是空和，第一個和式只有 $m=n$ 一項，所以結果依然成立。）



$n = 4$ 時的密度函數：四個數之中第 k 小的數集中在 $k/5$ 附近。

積分。 密度函數在其取值範圍上的積分等於 1，這裏的範圍是 $[0,1]$。因此

$$n\binom{n-1}{k-1}\int_0^1 y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,\mathrm{d}y = 1,$$

所以

$$\int_0^1 y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}} = \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!}.$$

此式對所有整數 $1 \le k \le n$ 都成立。

第 (iii) 部分

按定義，

$$\mathrm{E}(Y_k) = \int_0^1 y\,f(y)\,\mathrm{d}y = n\binom{n-1}{k-1}\int_0^1 y^k(1-y)^{n-k}\,\mathrm{d}y.$$

> ? **想一想** 這個積分與剛才求得的並不完全一樣。取哪些 n 和 k 的值，才能把它化成那個形式？

被積函數 (integrand) 是 $y^{K-1}(1-y)^{N-K}$，其中 $K = k+1$、$N = n+1$，且 $1 \le K \le N$，所以 (ii) 的公式適用：

$$\int_0^1 y^k(1-y)^{n-k}\,\mathrm{d}y = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!}.$$

由於 $n\binom{n-1}{k-1} = \dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$，

$$\mathrm{E}(Y_k) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\cdot\frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1}.$$

驗算

- 當 $n = 1$、$k = 1$ 時，只有一個均勻分佈的數，而 $\mathrm{E}(Y_1) = \frac{1}{2}$，理應如此。
- 對稱性（symmetry）：把每個 X_i 換成 $1 - X_i$，第 k 小的數就變成第 k 大的數，所以 $\mathrm{E}(Y_k) + \mathrm{E}(Y_{n+1-k}) = 1$。確實 $\frac{k}{n+1} + \frac{n+1-k}{n+1} = 1$。
- 這 n 個數把 $[0,1]$ 分成 $n+1$ 段間隔，而答案表明每段間隔的平均長度都是 $\frac{1}{n+1}$，從對稱性看來非常合理。
- 當 $n = 5$、$k = 2$ 時：$(*)$ 在 $y = 0.3$ 處的值為 0.47178；用電腦模擬 200 000 個樣本，得到 0.4726，而 Y_2 的樣本平均值為 0.33333，理論值為 $\frac{1}{3}$。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{P}(Y_k \leq y) = \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k}$，即恰好有 k 個值小於 y 的概率，而不是至少有 k 個。
- 忘記第二個和式中 $m = n$ 的項等於零，以致相消看似差了一項而不成立。
- 在 (iii) 中重用積分時只平移 k（而沒有平移 n）。

STEP 之外

這些 Y_k 是樣本的順序統計量（order statistics），而 Y_k 服從參數為 k 和 $n-k+1$ 的貝塔分佈（Beta distribution）。(ii) 中的積分就是貝塔函數 $B(a,b) = \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$，你日後會與伽瑪函數（Gamma function）一併再遇見它。順序統計量是樣本中位數和無母數統計（non-parametric statistics）的基礎。Blitzstein 和 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）對順序統計量和貝塔分佈有十分精彩的論述，其中包括貝塔積分的一個「故事式」證明，與這裏的論證非常相似。

詳細解答

STEP III 2018，第 13 題

概率與統計 • 泊松分佈

> **STEP III 2018，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q13

關鍵思路

把 $t = -1$ 代入概率母函數（probability generating function），會令每個概率帶上符號 $(-1)^r$，所以把 $G(1)$ 和 $G(-1)$ 取平均，奇數項便互相抵消，只留下偶數項。用四次單位根（fourth roots of unity）$1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$ 作同樣的篩選，就能抽出 4 的倍數。每個新的母函數一旦寫成閉合形式（closed form），平均值（mean）就只是它在 $t = 1$ 的導數，問題便化為比較幾個初等函數。

解答

記 $p_r = \mathrm{P}(X = r)$，於是 $G(t) = \sum_{r \geq 0} p_r t^r$。

偶數值。 把級數在 $t = 1$ 和 $t = -1$ 的值相加，

$$G(1) + G(-1) = \sum_{r \geq 0} p_r \left(1 + (-1)^r\right) = 2 \sum_{r \text{ 為偶數}} p_r,$$

因為當 r 為偶數時 $1 + (-1)^r$ 等於 2，當 r 為奇數時等於 0。兩邊除以 2 即得所求結果。（由於 $\sum p_r = 1$，兩個級數都絕對收斂（converge absolutely）。）

泊松（Poisson）分佈的母函數。 當 $p_r = \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^r / r!$ 時，

$$G(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{r \geq 0} \frac{(\lambda t)^r}{r!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda(1-t)},$$

這裏用了指數級數（exponential series），它對所有 t 都收斂。

第 (i) 部分

Y 的概率總和必須為 1，所以 k 是 $\mathrm{P}(X \text{ 為偶數})$ 的倒數。由第一個結果，

$$\mathrm{P}(X \text{ 為偶數}) = \tfrac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cosh\lambda, \qquad \text{所以} \qquad k = \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}.$$

Y 的母函數只保留 G 的偶數項：

$$\begin{aligned} G_Y(t) = k\sum_{r\text{ 為偶數}} p_r t^r &= k\cdot\tfrac{1}{2}\left(G(t)+G(-t)\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = \frac{\cosh\lambda t}{\cosh\lambda}, \end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{2}\left(G(t)+G(-t)\right)$ 是 G 的偶部（even part），與第一個結果完全一樣，只是以 t 代替 1。這正是所求的形式。

平均值為 $G_Y'(1)$：

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{\lambda\sinh\lambda}{\cosh\lambda} = \lambda\tanh\lambda.$$

當 $\lambda > 0$ 時有 $\mathrm{e}^{-\lambda} > 0$，所以 $\sinh\lambda = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}) < \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}) = \cosh\lambda$，從而 $0 < \tanh\lambda < 1$。因此 $\mathrm{E}(Y) < \lambda$，得證。

第 (ii) 部分

現在我們只需保留 r 為 4 的倍數的項。

> **想一想** 當我們想按 4（而非 2）的倍數篩選時，甚麼擔當 $t=-1$ 的角色？

用全部四個四次單位根。對整數 r，

$$1+(-1)^r+\mathrm{i}^r+(-\mathrm{i})^r = \begin{cases} 4 & \text{若} 4 \mid r, \\ 0 & \text{其他情況.} \end{cases}$$

若 $4 \mid r$，每一項都是 1。若 r 為奇數，各項兩兩抵消：$(-1)^r = -1$ 且 $(-\mathrm{i})^r = -\mathrm{i}^r$。若 $r \equiv 2 \pmod 4$，各項為 $1+1-1-1=0$。所以

$$\sum_{4\mid r}\frac{x^r}{r!} = \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\cosh x+\cos x\right).$$

（也可以直接看出：$\cosh x = \sum_{r\text{ 為偶數}} x^r/r!$，而 $\cos x$ 的項相同，只是符號依次為 $+,-,+,\ldots$，所以兩者相加時，$4 \mid r$ 的項加倍，其餘的項抵消。）

取 $x = \lambda t$ 並乘以 $\mathrm{e}^{-\lambda}$，再以 $G_Z(1) = 1$ 這個要求定出 c，得

$$G_Z(t) = \frac{\cosh\lambda t+\cos\lambda t}{\cosh\lambda+\cos\lambda}.$$

當 $\lambda > 0$ 時分母為正，因為 $\cosh\lambda > 1 \geq -\cos\lambda$。求導後令 $t = 1$，

$$\mathrm{E}(Z) = G_Z'(1) = \frac{\lambda(\sinh\lambda - \sin\lambda)}{\cosh\lambda + \cos\lambda}.$$

由於 $\lambda > 0$ 且分母為正，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z) < \lambda &\iff \sinh\lambda - \sin\lambda < \cosh\lambda + \cos\lambda \\ &\iff \sin\lambda + \cos\lambda > \sinh\lambda - \cosh\lambda = -\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &\iff \sin\lambda + \cos\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} > 0.\end{aligned}$$

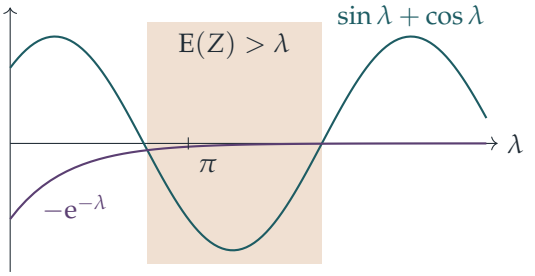
這在 $\lambda = \pi$ 時不成立：此時 $\sin\pi + \cos\pi + \mathrm{e}^{-\pi} = -1 + \mathrm{e}^{-\pi} < 0$，因為 $\mathrm{e}^{-\pi} < 1$。事實上

$$\mathrm{E}(Z)\big|_{\lambda=\pi} = \frac{\pi\sinh\pi}{\cosh\pi - 1} > \pi,$$

因為 $\sinh\pi > \cosh\pi - 1$（等價於 $1 > \mathrm{e}^{-\pi}$）。

所以答案是**否**：$\mathrm{E}(Z) < \lambda$ 並非對所有正數 λ 都成立。

若要看得更全面，可寫 $\sin\lambda + \cos\lambda = \sqrt{2}\sin(\lambda + \frac{\pi}{4})$。每當這條曲線跌到 $-\mathrm{e}^{-\lambda}$ 以下，條件便不成立。第一個這樣的區間大約由 $\lambda \approx 2.42$ 至 $\lambda \approx 5.49$，而隨着 $\mathrm{e}^{-\lambda} \to 0$，之後的區間愈來愈接近 $\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ \frac{7\pi}{4} + 2n\pi\right)$。



驗算

- 當 $\lambda \to 0$ 時，$\mathrm{E}(Y) = \lambda\tanh\lambda \approx \lambda^2$。這是合理的：$Y$ 幾乎總是 0，而 $\mathrm{P}(Y = 2) \approx \lambda^2/2$。
- 當 $\lambda \to \infty$ 時，$\tanh\lambda \to 1$，所以 $\mathrm{E}(Y)$ 略小於 λ。當 λ 很大時，泊松分佈很分散，所以捨棄奇數值幾乎不會改變平均值。
- 電腦直接對泊松級數求和，核實了每個母函數和兩個平均值。例如在 $\lambda = \pi$ 時，得到 $\mathrm{E}(Y) \approx 3.1299 < \pi$ 及 $\mathrm{E}(Z) \approx 3.4254 > \pi$。它亦找到 $\sin\lambda + \cos\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda}$ 的變號點位於 $\lambda \approx 2.419$ 和 5.495。

常見錯誤

- 忘記歸一化常數（normalising constant）：單獨的 $\cosh \lambda t$ 並不是母函數，因為它在 $t = 1$ 的值不是 1。
- 以為 (ii) 的答案既然與 (i) 類似，就必定是「是」。只保留 4 的倍數，可能在 λ 以下移除的概率質量比以上的多，例如 $\lambda = \pi$ 時：最接近的容許值 4 在 π 之上，而且其概率遠大於 0 的概率。
- 把不等式除以 $\cosh \lambda + \cos \lambda$ 時，沒有先檢查它是否為正。

STEP 之外

把母函數在單位根上取平均，以抽出某一同餘類（residue class）中的項，這方法稱為單位根濾波（roots-of-unity filter），又稱級數的多重分割（multisection）。它是組合數學（combinatorics）的基本工具，也是離散傅立葉變換（discrete Fourier transform）最簡單的情形。像本題這樣，把分佈以某事件為條件，再重新計算平均值，在概率論中隨處可見。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）深入講解了母函數。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2018 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。