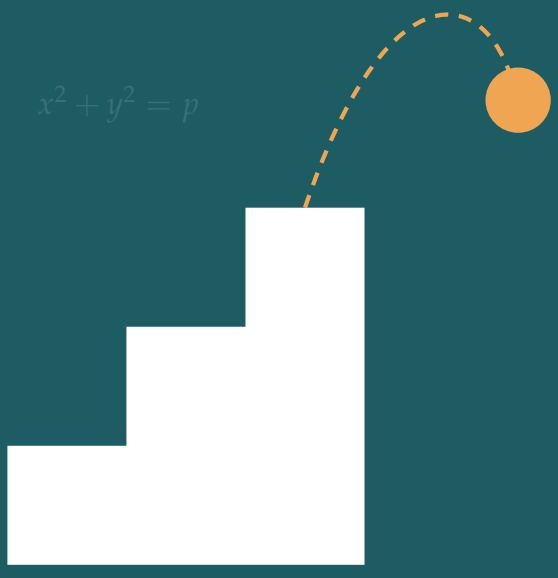
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

2017 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP I, II 及 III

2017 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2017 年詳細解答

2017 年 STEP 試卷（STEP I, II 及 III）全部 39 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP I

第 1 題 代換積分法 純數學 . . . 3

第 2 題 對不等式積分 純數學 . . . 6

第 3 題 拋物線的切線 純數學 . . . 10

第 4 題 二次方程與等比級數 純數學 . . . 14

第 5 題 以微分法求最優值 純數學 . . . 18

第 6 題 積分與符號變化 純數學 . . . 22

第 7 題 拿破崙定理 純數學 . . . 26

第 8 題 遞推關係與數學歸納法 純數學 . . . 30

第 9 題 拋體運動 力學 . . . 33

第 10 題 連鎖碰撞 力學 . . . 37

第 11 題 涉及摩擦力的剛體靜力學 力學 . . . 41

第 12 題 期望值與條件化 概率與統計 . . . 45

第 13 題 概率的遞推關係 概率與統計 . . . 48

STEP II

第 1 題 歸約公式 純數學 . . . 52

第 2 題 周期數列 純數學 . . . 55

第 3 題 曲線描繪 純數學 . . . 59

第 4 題 柯西–施瓦茲積分不等式 純數學 . . . 64

第 5 題 拋物線的法線與圓 純數學 . . . 67

第 6 題 不等式與數學歸納法 純數學 . . . 71

第 7 題 對數微分法 純數學 . . . 75

第 8 題 向量與垂心 純數學 . . . 79

第 9 題 摩擦力與剛體 力學 . . . 82

第 10 題 克服阻力所作的功 力學 86
第 11 題 拋體與能量 力學 90
第 12 題 放鬆過程 概率與統計 94
第 13 題 期望值與無窮級數 概率與統計 98

STEP III

第 1 題 裂項相消級數的界限 純數學 102
第 2 題 複平面上的旋轉 純數學 105
第 3 題 多項式的根 純數學 109
第 4 題 函數的幾何平均 純數學 112
第 5 題 極坐標曲線 純數學 116
第 6 題 代換積分法 純數學 120
第 7 題 橢圓的切線 純數學 124
第 8 題 分部求和法 純數學 128
第 9 題 連接質點與能量 力學 131
第 10 題 轉動的剛體 力學 135
第 11 題 動量守恆 力學 139
第 12 題 離散聯合分佈 概率與統計 143
第 13 題 期望值與方差 概率與統計 146

詳細解答

STEP I 2017，第 1 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 2017，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q1

關鍵思路

只要把三角函數的分式化簡，這幾個被積函數（integrand）其實都暗藏 $f'(x)/f(x)$ 的形式（最後一題則是 $f'(x)/f(x)^2$）。$x\sin x+\cos x$ 的導數（derivative）特別簡潔，因為兩個 $\sin x$ 項互相抵消，而其餘的代換（substitution）都建基於同樣的抵消。所以策略是：把每個被積函數改寫成以 sin 和 cos（或 sec 和 tan）表示，找出導數與分子（numerator）吻合的分母（denominator），然後代換。

解答

第 (i) 部分

設 $u=x\sin x+\cos x$，由乘積法則（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x.$$

接着把被積函數的分子和分母同乘以 $\cos x$：

$$\frac{x}{x\tan x+1}=\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}.$$

分子恰好是 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$，所以 $x\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，從而

$$\int\frac{x}{x\tan x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln|u|+C=\ln|x\sin x+\cos x|+C.$$

第二個積分的做法相同，只是以 $\sin x$ 代替 $\cos x$。把分子和分母同乘以 $\sin x$，

$$\frac{x}{x\cot x-1}=\frac{x\sin x}{x\cos x-\sin x}.$$

設 $v = x\cos x - \sin x$，則

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x,$$

所以分子是 $-\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，從而

$$\int \frac{x}{x\cot x - 1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = -\ln|x\cos x - \sin x| + C.$$

不要漏掉負號：它來自對 $\cos x$ 求導。

第 (ii) 部分

第一個被積函數的分母已經值得一試。設 $w = x\sec^2 x - \tan x$。利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x\tan x$，

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x - \sec^2 x = 2x\sec^2 x\tan x.$$

多餘的項再一次互相抵消，而分子是 $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$。因此

$$\int \frac{x\sec^2 x\,\tan x}{x\sec^2 x - \tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \tfrac{1}{2}\ln|x\sec^2 x - \tan x| + C.$$

? **想一想** 最後一個積分裏沒有 sec 或 tan。它怎樣才能與 $w = x\sec^2 x - \tan x$ 拉上關係？

從分母的括號中提取因子 $\cos^2 x$：

$$x - \sin x\cos x = \cos^2 x\left(x\sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \cos^2 x\,(x\sec^2 x - \tan x) = w\cos^2 x.$$

所以 $(x - \sin x\cos x)^2 = w^2\cos^4 x$，而

$$\frac{x\sin x\cos x}{(x - \sin x\cos x)^2} = \frac{x\sin x\cos x}{w^2\cos^4 x} = \frac{x\sec^2 x\tan x}{w^2},$$

因為 $\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^4 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$。分子同樣是 $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$，所以用同一個代換，

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sin x\cos x}{(x - \sin x\cos x)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{w^2}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2w} + C\\ &= -\frac{1}{2(x\sec^2 x - \tan x)} + C = -\frac{\cos^2 x}{2(x - \sin x\cos x)} + C,\end{aligned}$$

其中最後一步是把分子和分母同乘以 $\cos^2 x$。如果你喜歡用倍角（double angles），答案可寫成 $-\dfrac{\cos^2 x}{2x - \sin 2x} + C$。

驗算

- 把每個答案求導，確認能得回被積函數。對最後一題，用商法則（quotient rule）處理 $-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$ 時要用到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-\sin x\cos x)=1-\cos 2x=2\sin^2 x$，而各個 $\sin^2 x\cos^2 x$ 項會整齊地合併。
- 數值計算：在 $[0.3, 1.2]$ 上，第一個積分的值是 $0.34953\ldots$，而 $\ln|x\sin x+\cos x|$ 的改變量相同；最後一個積分在同一區間上的值是 $25.7364\ldots$，與 $-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$ 吻合。四個答案都已用電腦這樣核實過。

常見錯誤

- 未先消去 $\tan x$ 或 $\cot x$ 就代換：只有在整式乘以 $\cos x$ 或 $\sin x$ 之後，分子才會與 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 吻合。
- 漏掉第 (i) 部分第二個積分中的負號，或第 (ii) 部分中的因子 $\frac{1}{2}$。
- 在最後一個積分中出於習慣就用對數：$1/w^2$ 的積分是 $-1/w$。

STEP 之外

這裏的技巧是逆向設計：選取代換，使分母的導數在抵消之後恰好等於分子。背後的道理是 $\int f'/f = \ln|f|$，即對數導數（logarithmic derivative）；它在複分析（complex analysis）中再次出現（用來數函數的零點），在微分方程（differential equations）中則以積分因子（integrating factor）的形式出現。不少 STEP 積分題都是先對一個精心挑選的函數求導，再把答案藏起來而設計出來的；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）有大量練習，助你學會識破它們。

詳細解答

STEP I 2017，第 2 題

純數學 • 對不等式積分

> **STEP I 2017，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q2

關鍵思路

積分（integration）保持不等式（inequality）：若在區間 $[a,b]$（其中 $a<b$）上 $f(t)\le g(t)$，則 $\int_a^b f \le \int_a^b g$。唯一要小心的是積分的方向：當 $x<1$ 時，區間 $[1,x]$ 是倒過來走的，不等式便會反轉。最後一部分再次用到同一個想法：把一個非負（non-negative）函數由 1 積分到 y，所得結果與 $y-1$ 同號，而這個符號正是我們安全地除去該因子所需要的。

解答

第 (i) 部分

情況 $x\ge 1$。當 $1\le t\le x$ 時，有 $\frac{1}{t}\le 1$，而且區間是正向的，所以

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \le \int_1^x 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{即} \qquad \ln x \le x-1.$$

情況 $0<x\le 1$。現在我們在 $x\le t\le 1$ 上積分，此時 $t\le 1$，故 $\frac{1}{t}\ge 1$。於是

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \ge \int_x^1 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{即} \qquad -\ln x \ge 1-x.$$

乘以 -1 會令不等式反轉，再次得到 $\ln x\le x-1$。所以 $(*)$ 對所有 $x>0$ 成立。

第 (ii) 部分

情況 $x\ge 1$。當 $t\ge 1$ 時，有 $\frac{1}{t^2}\le\frac{1}{t}$，所以

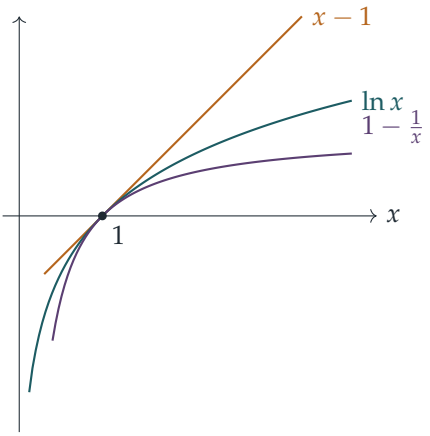
$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{即} \qquad 1-\frac{1}{x}\le \ln x.$$

情況 $0 < x \leq 1$。當 $x \leq t \leq 1$ 時，不等式反轉為 $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{t}$（把 $t \leq 1$ 乘以正數 $\frac{1}{t^2}$）。在 $[x, 1]$ 上積分，

$$\frac{1}{x} - 1 \geq -\ln x,$$

再乘以 -1 便得 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$。所以 $(**)$ 對所有 $x > 0$ 成立。

（另一方法：$(**)$ 可由 $(*)$ 直接推出：在 $(*)$ 中以 $1/x$ 代替 x，即得 $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$。）



三條曲線在 $x = 1$ 處相切，每條在該點的斜率（gradient）都是 1；$\ln x$ 被夾在另外兩條曲線之間。

第 (iii) 部分

$(*)$ 和 $(**)$ 都是說某個函數在 $x > 0$ 上非負：

$$f(x) = x - 1 - \ln x \geq 0, \qquad g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x} \geq 0.$$

我們需要一個關於積分這類函數的簡單事實。

> **想一想** 若對所有 $x > 0$ 都有 $h(x) \geq 0$，那麼當 $y < 1$ 時，$\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x$ 的符號是甚麼？

若 $y > 1$，積分是在正向區間上進行，所以結果 ≥ 0。若 $0 < y < 1$，則 $\int_1^y h = -\int_y^1 h \leq 0$。無論哪種情況，都有

$$(y - 1)\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; 0.$$

這讓我們可以把 $y > 1$ 和 $0 < y < 1$ 兩種情況一併處理。

我們需要 $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$（以 $u = \ln x$ 用分部積分法（integration by parts）求得），所以

$$\int_1^y \ln x\,\mathrm{d}x = y\ln y - y + 1.$$

右邊的不等式。對 f 積分，

$$\int_1^y f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(y-1)^2}{2} - (y\ln y - y + 1) = \frac{(y-1)^2}{2} + (y-1) - y\ln y$$
$$= \frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y.$$

由上述事實，

$$(y-1)\left[\frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y\right] \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(y-1)^2(y+1)}{2} \geq y(y-1)\ln y.$$

由於 $y > 0$ 且 $y \neq 1$，$y(y-1)^2$ 是正數，除以它不會改變不等式的方向：

$$\frac{y+1}{2y} \geq \frac{\ln y}{y-1}.$$

左邊的不等式。對 g 積分，

$$\int_1^y g(x)\,\mathrm{d}x = (y\ln y - y + 1) - (y-1) + \ln y = (y+1)\ln y - 2(y-1).$$

由上述事實，

$$(y-1)\left[(y+1)\ln y - 2(y-1)\right] \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad (y+1)(y-1)\ln y \geq 2(y-1)^2.$$

現在除以 $(y+1)(y-1)^2 > 0$：

$$\frac{\ln y}{y-1} \geq \frac{2}{y+1}.$$

把兩者合起來，

$$\frac{2}{y+1} \leq \frac{\ln y}{y-1} \leq \frac{y+1}{2y} \qquad \text{對} y > 0,\ y \neq 1,$$

得證。

? **想一想** 為甚麼要先乘以 $y-1$ 再除，而不是直接除？

把不等式除以 $y-1$，在 $y < 1$ 時會令不等式反轉，迫使我們分開兩種情況處理。先乘以 $y-1$，所得的式子含有 $(y-1)^2$，無論我們在 1 的哪一邊它都是正數，因此一個論證便可涵蓋兩種情況。

驗算

- 當 $y = 2$：$\frac{2}{3} \approx 0.667 \leq \ln 2 \approx 0.693 \leq \frac{3}{4} = 0.75$。
- 當 $y = \frac{1}{2}$：$\frac{4}{3} \approx 1.333 \leq 2\ln 2 \approx 1.386 \leq \frac{3}{2}$。

- 當 $y \to 1$ 時，三個式子都趨向 1（中間那個是 ln 在 1 處的斜率），與圖中曲線相切的情況一致。
- 以 $1/y$ 代替 y，再全式除以 y，會得回完全相同的一對不等式，所以 $0 < y < 1$ 的結果與 $y > 1$ 的結果是等價的。

常見錯誤

- 當 $x < 1$ 時在 $[1, x]$ 上積分，卻沒有留意到不等式會反轉。
- 除以 $y - 1$ 時沒有考慮它的符號，結果只證明了 $y > 1$ 時的第 (iii) 部分。

STEP 之外

中間的量 $\dfrac{\ln y}{y-1}$ 是 1 與 y 的**對數平均**（logarithmic mean）的倒數，所以左邊的不等式是說對數平均不大於算術平均（arithmetic mean）$\frac{1+y}{2}$。事實上，對數平均亦不小於幾何平均（geometric mean）$\sqrt{y}$，由此得 $\frac{\ln y}{y-1} \leq \frac{1}{\sqrt{y}}$，這是比 $\frac{y+1}{2y}$ 更精確的上界。對不等式積分這個技巧，以及支持它的積分單調性（monotonicity），都是大學第一門數學分析（analysis）課程的基本工具。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對積分有細緻的處理。

詳細解答

STEP I 2017，第 3 題

純數學 • 拋物線的切線

> **STEP I 2017，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q3

關鍵思路

這裏的一切都可以用參數（parameter）p 和 q 表示，所以計劃是先求出 R、S、T 的坐標，然後直接計算兩個面積。三角形 RST 特別容易處理，因為它的邊 ST 落在 y 軸上：它的高就是 R 到該軸的距離。至於三角形 OPQ，由於它有一個頂點在原點，公式 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ 一行就能完成計算。

解答

P 處的切線

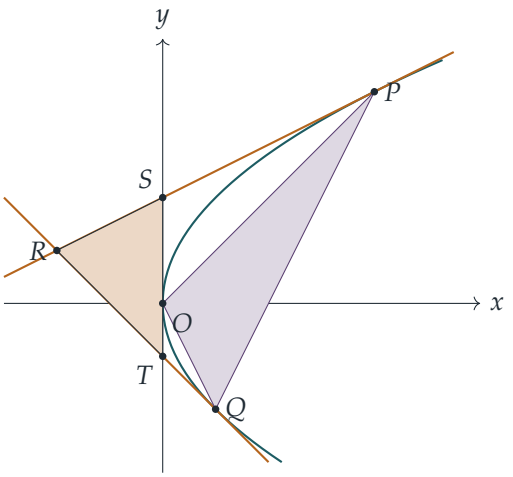
對 $y^2 = 4ax$ 作隱函數微分（implicit differentiation），得 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{y}$。在 P 點，$y = 2ap \neq 0$（因為 $a, p > 0$），斜率（gradient）為

$$\frac{2a}{2ap} = \frac{1}{p}.$$

因此通過 $P(ap^2, 2ap)$ 的切線（tangent）是

$$y - 2ap = \frac{1}{p}\left(x - ap^2\right) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{p}x - ap + 2ap = \frac{1}{p}x + ap,$$

正如所求。同理，由於 Q 的形式相同，只是以 q 代替 p（且 $q \neq 0$），Q 處的切線是 $y = \dfrac{1}{q}x + aq$。



草圖展示的是 $a=1$、$p=2$、$q=-1$ 的情況：R 位於 y 軸左方，高度介乎 S 與 T 之間。

點 R、S 和 T

在每條切線中代入 $x=0$，得

$$S=(0,\,ap),\qquad T=(0,\,aq).$$

兩條切線在 R 相交，所以

$$\frac{x}{p}+ap=\frac{x}{q}+aq\quad\Longrightarrow\quad x\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=a(q-p)\quad\Longrightarrow\quad x\cdot\frac{q-p}{pq}=a(q-p).$$

由於 $p>0>q$，有 $q-p\neq 0$，因此可以除以它（這也說明了兩條切線並不平行，R 確實存在）。於是 $x=apq$，再得 $y=\dfrac{apq}{p}+ap=a(p+q)$：

$$R=\big(apq,\ a(p+q)\big).$$

想一想 R 在 y 軸的哪一邊？為甚麼這對計算面積很重要？

因為 $p>0$ 而 $q<0$，乘積 pq 是負數，所以 R 的 x 坐標 apq 是負的：R 在軸的左方，與軸的距離為 $a|pq|=-apq$。面積必須是正數，所以我們要留意正負號，而不是把 apq 寫成「高」。

三角形 RST 的面積

以 ST 為底。它落在 y 軸上，長度為 $ap-aq=a(p-q)$，由於 $p>q$，這是正數。由 R 到 y 軸的垂直高度是 $-apq$。所以

$$[RST]=\tfrac{1}{2}\cdot a(p-q)\cdot(-apq)=-\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q).$$

三角形 OPQ 的面積

對於頂點為 O、(x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的三角形，面積是 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$。取 $P(ap^2, 2ap)$ 和 $Q(aq^2, 2aq)$，

$$x_1y_2 - x_2y_1 = ap^2 \cdot 2aq - aq^2 \cdot 2ap = 2a^2pq(p-q).$$

這裏 $a^2 > 0$、$pq < 0$ 且 $p - q > 0$，所以這個值是負的，因此

$$[OPQ] = \tfrac{1}{2} \cdot \left(-2a^2pq(p-q)\right) = -a^2pq(p-q).$$

結論

比較兩個結果，

$$[OPQ] = -a^2pq(p-q) = 2\left(-\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q)\right) = 2\,[RST],$$

所以三角形 OPQ 的面積是三角形 RST 面積的兩倍，正如所求。

驗算

在草圖的情況 $a = 1$、$p = 2$、$q = -1$ 中，得 $P(4,4)$、$Q(1,-2)$、$R(-2,1)$、$S(0,2)$ 和 $T(0,-1)$。於是 $[RST] = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$，而 $[OPQ] = \frac{1}{2}|4 \cdot (-2) - 1 \cdot 4| = 6$，正好是兩倍。你也可以驗證 R 同時滿足兩條切線方程：$1 = \frac{-2}{2} + 2$ 及 $1 = \frac{-2}{-1} - 1$。這個恆等式亦已用電腦以精確算術，對 2000 組隨機選取的 a、p、q 驗證過。

常見錯誤

- 把三角形 RST 的高寫成 apq：這是負數，因為 R 位於 y 軸上與曲線相反的一側。
- 在 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ 中漏掉絕對值（modulus），結果得出 OPQ 的面積為負數。
- 除以 $q - p$ 時沒有說明它為何不等於零。

STEP 之外

參數化（parametrisation）$(at^2, 2at)$ 使拋物線（parabola）上每一點都對應一個數 t，而 $t = p$ 和 $t = q$ 處的切線總是相交於 $(apq, a(p+q))$：即兩個參數的「積」與「和」。這類結果，連同本題的 2 : 1 面積比，都屬於圓錐曲線（conics）的古典射影幾何（projective geometry），在這門學問中，切線和弦都是借助參數和行列式（determinant）來研究的。三角形面積的行列式公式，是把面積看成一種有向（signed）、線性的量的起點，這方面的發展可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）；Siklos 的

Advanced Problems in Mathematics（《數學進階問題》）則有更多關於參數曲線的 STEP 式練習。

詳細解答

STEP I 2017，第 4 題

純數學 • 二次方程與等比級數

> **STEP I 2017，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q4

關鍵思路

一切取決於開區間（open interval）$(-1,1)$ 內有多少個 r 值會給出某個特定的 p（或 q）值。這其實是關於一條限制在 $-1 < r < 1$ 上的拋物線（parabola）的問題：一條水平直線與它相交一次、兩次或完全不相交，而草圖會告訴我們是哪一種情況。一旦知道 r，和便隨之確定；又因為和是 r 的一一對應（one-to-one）函數，兩個不同的 r 值必定給出兩個不同的和。要找出這些和所滿足的方程，我們把 r 用和來表示，然後代入。

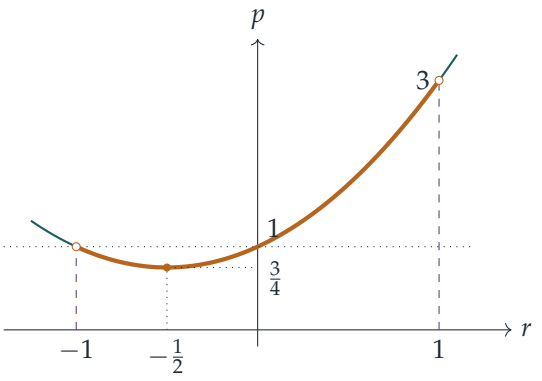
解答

第 (i) 部分

配方（completing the square），

$$1 + r + r^2 = \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4},$$

因此圖像是一條拋物線，其最小點（minimum point）為 $\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right)$。它經過 $(-1,1)$、$(0,1)$ 和 $(1,3)$。



在 $-1 < r < 1$ 上（粗線那段弧），函數由 1（取不到，因為 $r = -1$ 被排除）遞減至 $r = -\frac{1}{2}$ 處的最小值 $\frac{3}{4}$，然後遞增趨向 3（同樣取不到，因為 $r = 1$ 被排除）。因此

$$\tfrac{3}{4} \le p < 3.$$

當 $1 < p < 3$ 時。給出這個 p 的 r 值是以下方程的根（roots）：

$$r^2 + r + (1 - p) = 0.$$

兩根之積為 $1 - p < 0$，所以有一個正根和一個負根。兩根之和為 -1，所以負根等於 -1 減去正根，即小於 -1，因此不容許。正根為

$$r = \frac{-1 + \sqrt{4p - 3}}{2},$$

又因為 $1 < 4p - 3 < 9$，我們有 $0 < r < 1$，所以這個根是容許的。（從圖像看：高度為 $p \in (1, 3)$ 的直線只在上升部分 $0 < r < 1$ 與粗線弧相交。）所以 p 唯一確定 r，從而唯一確定 $S = 1/(1 - r)$。

當 $\frac{3}{4} < p < 1$ 時。此時判別式（discriminant）$1 - 4(1 - p) = 4p - 3$ 為正，所以這個二次方程（quadratic）有兩個相異實根。兩根之積 $1 - p$ 為正，兩根之和為 -1，所以兩根皆為負。每個根都等於 -1 減去另一個根，而另一個根是負數，所以每個根都大於 -1。因此兩根都位於 $(-1, 0)$ 內，兩者皆容許。

? **想一想** 有兩個 r 值，沒問題；但為甚麼它們一定給出兩個不同的 S 值？

因為 $S = \dfrac{1}{1 - r}$ 可以反過來寫成 $r = 1 - \dfrac{1}{S}$。因此不同的 r 值給出不同的 S 值，所以 S 恰好有兩個可能值。

要找出它們滿足的方程，把 $r = 1 - u$（其中 $u = 1/S$）代入 $r^2 + r + 1 - p = 0$：

$$(1 - u)^2 + (1 - u) + 1 - p = 0$$
$$u^2 - 3u + (3 - p) = 0.$$

代入 $u = 1/S$ 並乘以 S^2（它不為零），得

$$(3-p)S^2 - 3S + 1 = 0,$$

正如所求。由於兩個 S 值都來自容許的根 r，它們都滿足這個方程。

第 (ii) 部分

再次配方，

$$q = 1 + 2r + 3r^2 = 3\left(r + \tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{3}.$$

最小值為 $r = -\frac{1}{3}$ 處的 $\frac{2}{3}$；在 $r = -1$ 處的值為 2，在 $r = 1$ 處的值為 6。所以在 $-1 < r < 1$ 上：

- 在下降部分 $-1 < r \le -\frac{1}{3}$ 上，q 取 $\left[\frac{2}{3}, 2\right)$ 中每個值恰好一次；
- 在上升部分 $-\frac{1}{3} \le r < 1$ 上，q 取 $\left[\frac{2}{3}, 6\right)$ 中每個值恰好一次。

兩部分只共有 $r = -\frac{1}{3}$ 這一點。因此一個 q 值來自

- 恰好一個 r：若 $q = \frac{2}{3}$（即 $r = -\frac{1}{3}$）或 $2 \le q < 6$（只在上升部分）；
- 恰好兩個 r 值：若 $\frac{2}{3} < q < 2$（每部分各一個）；
- 其他情況下沒有任何 r。

例如在 $q = 2$ 時，方程 $3r^2 + 2r - 1 = 0$ 可因式分解為 $(3r-1)(r+1) = 0$，而根 $r = -1$ 被排除，只剩下 $r = \frac{1}{3}$。

和之前一樣，T 確定 r：由於 $1 - r > 0$，我們有 $1 - r = 1/\sqrt{T}$。所以不同的 r 給出不同的 T。因此

$$T \text{ 唯一確定，當} q = \tfrac{2}{3} \text{ 或} 2 \le q < 6,$$

以及

$$T \text{ 有兩個可能值，當} \tfrac{2}{3} < q < 2.$$

二次方程。設 $r = 1 - u$，其中 $u = 1 - r = 1/\sqrt{T} > 0$。則

$$q = 1 + 2(1-u) + 3(1-u)^2 = 3u^2 - 8u + 6.$$

由於 $u^2 = 1/T$，上式即 $\dfrac{3}{T} + 6 - q = \dfrac{8}{\sqrt{T}}$。乘以 T，

$$(6-q)T + 3 = 8\sqrt{T}.$$

這已經是一個關於 $\sqrt{T}$ 的二次方程。要得到關於 T 本身的方程，把兩邊平方：

$$(6-q)^2T^2 + 6(6-q)T + 9 = 64T,$$

即

$$(6-q)^2\,T^2 - 2(3q+14)\,T + 9 = 0.$$

T 的兩個可能值都滿足這個方程。這裏平方不可能引入多餘的根。由於 $q<6$ 且 $T>0$，左邊 $(6-q)T+3$ 為正，所以另一種可能 $(6-q)T+3 = -8\sqrt{T}$ 沒有 $T>0$ 的解。此外，關於 T 的二次方程兩根之積 $9/(6-q)^2$ 為正，兩根之和亦為正，所以兩根皆為正。因此它的兩個根正好就是 T 的兩個值。

驗算

- 取 $p = \frac{7}{8}$。則 $r^2 + r + \frac{1}{8} = 0$ 給出 $r = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{4}$，兩者皆在 $(-1,0)$ 內。相應的和 $S \approx 0.873$ 及 $S \approx 0.540$ 滿足 $\frac{17}{8}S^2 - 3S + 1 = 0$，其兩根之和為 $\frac{24}{17} \approx 1.412$，積為 $\frac{8}{17}$。
- 取 $q=1$。則 $3r^2+2r=0$ 給出 $r=0$ 或 $r=-\frac{2}{3}$，所以 $T=1$ 或 $T=\frac{9}{25}$。二次方程變成 $25T^2 - 34T + 9 = (T-1)(25T-9)$，與預期相符。
- 在邊界 $q=\frac{2}{3}$ 處，二次方程為 $\frac{256}{9}T^2 - 32T + 9 = 0$，判別式為 $1024 - 1024 = 0$。它有重根 $T = \frac{9}{16} = 1/(1+\frac{1}{3})^2$，與唯一的值 $r=-\frac{1}{3}$ 吻合。
- 我們用電腦檢驗了各範圍內數以千計的隨機 p 和 q 值：根的個數及兩條二次方程都一致。

常見錯誤

- 忘記 $r=\pm1$ 被排除，以致錯誤地把 $p=1$ 歸入「兩個值」的情況，並把 $q=2$ 排除在「唯一」的集合之外。
- 遺漏孤立的值 $q=\frac{2}{3}$（頂點（vertex）），在該處 T 同樣唯一。
- 平方後沒有檢查是否引入了多餘的根。

STEP 之外

這道題其實是在問函數何時可逆（invertible）：映射 $r \mapsto p$ 在定義域（domain）的一部分上是一一對應的，在其餘部分上則是二對一的，而答案取決於定義域，不只取決於公式。級數 $\sum r^n$ 和 $\sum nr^{n-1}$ 分別是一個冪級數（power series）及其逐項求導所得的導數（term-by-term derivative）。為甚麼在收斂半徑（radius of convergence）之內可以逐項求導，是大學一年級分析（analysis）課程的標準結果。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對冪級數和一致收斂（uniform convergence）的處理既嚴謹又易讀。

詳細解答

STEP I 2017，第 5 題

純數學 • 以微分法求最優值

STEP I 2017，第 5 題

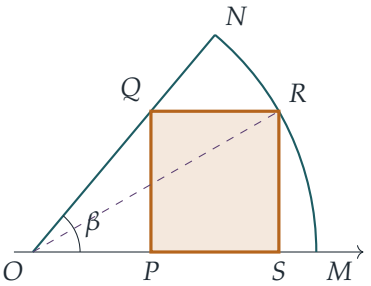
繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s1-q5

關鍵思路

頂點的位置一旦定下來，一切就只由單一變量 x 決定：Q 位於 P 的正上方，在直線 $y = x\tan\beta$ 上；R 與 Q 同高，位於圓上。利用畢氏定理（Pythagoras' theorem）可把 s 以 x 表示，於是面積變成一個普通的單變量函數，可以直接求導。最後的角度條件則可由 tan 的半角公式（half-angle formula）直接得出。

解答



面積

由於 $PQRS$ 是長方形，且 P 和 S 都在 x 軸上，所以邊 PQ 和 SR 都是鉛垂的。因此 Q 的 x 坐標是 x。它位於 ON 上，即直線 $y = x\tan\beta$ 上，所以 $Q = (x, x\tan\beta)$，而 $R = (s, x\tan\beta)$。長方形的闊為 $PS = s - x$（這是正數，因為 S 比 P 離 O 更遠），高為 $PQ = x\tan\beta$，所以

$$A = x(s - x)\tan\beta,$$

正如所求。

求 s 及 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$

由於 R 在圓上，$OR = a$，所以 $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$。因為 $s > 0$，

$$s = \sqrt{a^2 - x^2\tan^2\beta}.$$

對 $s^2 = a^2 - x^2\tan^2\beta$ 作隱函數求導（implicit differentiation），得 $2s\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -2x\tan^2\beta$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x\tan^2\beta}{s}$。現在把面積寫成 $A = (xs - x^2)\tan\beta$，並對 xs 使用乘積法則（product rule）：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= \left(s + x\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} - 2x\right)\tan\beta \\ &= (s - 2x)\tan\beta - \frac{x^2}{s}\tan^3\beta,\end{aligned}$$

這就是所求的結果。

最大面積

首先考慮 x 的範圍。當 x 從 0 開始增加時，Q 沿 ON 向上移動，R 則沿圓弧向 N 移動；當 R 到達 N 時，長方形收縮成一條鉛垂線段，即 $x = a\cos\beta$ 時（此時 $s = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\beta} = a\cos\beta = x$）。所以 $0 < x < a\cos\beta$，而 A 是 $[0, a\cos\beta]$ 上的連續函數，兩端的值都是 $A = 0$，中間則 $A > 0$。因此它的最大值必定出現在區間內部的一個駐點（stationary point）。

設 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$，除以 $\tan\beta > 0$ 再乘以 $s > 0$：

$$\begin{aligned}s^2 - 2xs &= x^2\tan^2\beta \\ s^2 - 2xs + x^2 &= x^2(1 + \tan^2\beta) = x^2\sec^2\beta \\ (s - x)^2 &= x^2\sec^2\beta.\end{aligned}$$

想一想 應該取哪一個平方根？我們又怎樣知道這是最大值？

$s - x$ 和 $x\sec\beta$ 都是正數（因為 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$），所以 $s - x = x\sec\beta$；另一個根會令 $s - x$ 為負數。因此在 $0 < x < a\cos\beta$ 內恰好只有一個駐點，由

$$s = x(1 + \sec\beta),$$

給出，而根據上一段，它必定給出最大面積。

要求出該面積，把它代入 $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$。利用 $\tan^2\beta = \sec^2\beta - 1$，

$$(1 + \sec\beta)^2 + \tan^2\beta = 2\sec\beta + 2\sec^2\beta = 2\sec\beta\,(1 + \sec\beta),$$

所以

$$x^2 = \frac{a^2}{2\sec\beta\,(1+\sec\beta)} = \frac{a^2\cos^2\beta}{2(1+\cos\beta)}.$$

在這一點，$s - x = x\sec\beta$，所以

$$A = x\cdot x\sec\beta\cdot\tan\beta = x^2\,\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} = \frac{a^2\sin\beta}{2(1+\cos\beta)}$$
$$= \frac{a^2\cdot 2\sin\frac12\beta\cos\frac12\beta}{2\cdot 2\cos^2\frac12\beta} = \tfrac12 a^2\tan\tfrac12\beta,$$

這裏用了 $\sin\beta = 2\sin\frac12\beta\cos\frac12\beta$ 及 $1+\cos\beta = 2\cos^2\frac12\beta$。

角 ROS

在直角三角形 ORS 中，$\tan\angle ROS = \dfrac{SR}{OS} = \dfrac{x\tan\beta}{s}$。在最大值處，

$$\tan\angle ROS = \frac{\tan\beta}{1+\sec\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta+1} = \tan\tfrac12\beta,$$

用的是同樣的兩條半角恆等式。$\angle ROS$ 和 $\frac12\beta$ 都位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內，而 tan 在此區間上是一一對應（one-to-one）的，所以 $\angle ROS = \frac12\beta$：在最佳的長方形中，$OR$ 平分扇形。

驗算

- 取 $a = 1$、$\beta = \frac{\pi}{3}$。則 $x^2 = \frac{1/4}{3} = \frac{1}{12}$，$s = 3x$，而 $A = x\cdot 2x\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.2887$，正好等於 $\frac12\tan\frac{\pi}{6}$。以電腦對大量隨機的 a 和 β，在 x 的細密網格上搜尋，得到相同的最大值和相同的最佳 x。
- 當 $\beta\to 0$ 時，扇形收縮，而 $\frac12 a^2\tan\frac12\beta\to 0$，理應如此。
- 單位：A 是 a^2 乘以一個純數，所以它確實是面積。

常見錯誤

- 忘記 s 依賴於 x，把 s 當作常數去對 $x(s-x)\tan\beta$ 求導。
- 把 $s - x = -x\sec\beta$ 也一併接受，或沒有說明為何該駐點是最大值。

STEP 之外

答案如此整齊——OR 正好沿扇形的角平分線——背後有一個漂亮的解釋：若 $R = (a\cos\theta, a\sin\theta)$，簡短計算可得 $A = \frac12 a^2\big(\cos(2\theta-\beta) - \cos\beta\big)/\sin\beta$，顯然在 $\theta = \frac12\beta$ 時

取得最大值。選對變量，可以令最優化（optimisation）問題幾乎變得輕而易舉。在大學裏，你會學到多變量的約束最優化（constrained optimisation），屆時不必消去 s，而可以用拉格朗日（Lagrange）乘數法（Lagrange multipliers），在 $s^2 + x^2 \tan^2 \beta = a^2$ 的約束下求 $x(s - x)$ 的最大值。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了更多同類題目。

詳細解答

STEP I 2017，第 6 題

純數學 • 積分與符號變化

STEP I 2017，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s1-q6

關鍵思路

一個從不變號、又不恆等於零的連續函數（continuous function），其積分（integral）必定不為零：它在某個小區間上與零保持距離，單是這個區間的貢獻已經不為零。第 (i) 部分把這個想法嚴格化，而第 (ii) 及 (iii) 部分則把它應用到一些巧妙選取的函數上。在 (ii) 中，被積函數（integrand）$(x-\alpha)^2 g(x)$ 與 g 同號；在 (iii) 中，分部積分（integration by parts）把關於 h 的資料轉化為 h' 滿足 (ii) 的條件。

解答

第 (i) 部分

用反證法（proof by contradiction），假設 f 在 $[0,1]$ 上並非同時取正值和負值。那麼，要麼對 $[0,1]$ 中所有 x 都有 $f(x) \geq 0$，要麼對所有這些 x 都有 $f(x) \leq 0$。如有需要，以 $-f$ 代替 f（這既不改變假設 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，也不改變結論），我們可假設 $f(x) \geq 0$ 處處成立。

題目告訴我們，對某個 $c \in [0,1]$ 有 $f(c) \neq 0$，因此 $f(c) > 0$。由於 f 在 c 處連續，存在 $\delta > 0$，使得對 $[0,1]$ 中所有滿足 $|x-c| < \delta$ 的 x，都有 $f(x) > \frac{1}{2} f(c)$。這個集合包含一個長度 $q-p$ 為正的區間 $[p,q] \subseteq [0,1]$（若 $c \leq \frac{1}{2}$，取 $[c,\, c+\eta]$；若 $c > \frac{1}{2}$，取 $[c-\eta,\, c]$，其中 $0 < \eta < \delta$ 且 $\eta \leq \frac{1}{2}$）。由於 $f \geq 0$ 處處成立，

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2} f(c)\,(q-p) \;>\; 0,$$

這與 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 矛盾。因此 f 在 $[0,1]$ 上同時取正值和負值。

想一想 為甚麼單憑「$f \geq 0$ 且 $f(c) > 0$，所以積分是正數」並不足夠？

一個函數可以只在單一點上為正，而積分完全察覺不到；單一點是沒有寬度的。正是連續性把 c 處的正值擴展到一個長度為正的區間上，這才迫使積分為正。

第 (ii) 部分

展開平方並利用三個條件 $(*)$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-\alpha)^2 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2 g(x)\,\mathrm{d}x - 2\alpha\int_0^1 x g(x)\,\mathrm{d}x + \alpha^2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\cdot\alpha + \alpha^2\cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

現在用反證法，假設對每個 $x \in [0,1]$ 都有 $g(x) \neq 0$。那麼 g 不可能在 $[0,1]$ 上同時取兩種符號（否則根據題目開首的假設，它會在某處等於零），所以 g 要麼處處嚴格為正，要麼處處嚴格為負。

設 $f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$，它是連續的。由於 $(x-\alpha)^2 \geq 0$，凡 f 不為零之處，它都與 g 同號，所以 f 不會同時取兩種符號。但 f 在 $[0,1]$ 中某處不為零：$(x-\alpha)^2$ 只在 $x=\alpha$ 處等於零，所以除了(可能的)α 之外，對每個 $x \in [0,1]$ 都有 $f(x) \neq 0$。而且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$。根據第 (i) 部分，$f$ 必須同時取兩種符號，矛盾。因此對 $[0,1]$ 中某個 x，有 $g(x) = 0$。

一個線性例子。設 $g(x) = a + bx$，則條件 $(*)$ 變為

$$a + \tfrac{1}{2}b = 1, \qquad \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}b = \alpha, \qquad \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{4}b = \alpha^2.$$

由第一式得 $a = 1 - \frac{1}{2}b$；代入第二式得 $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}b = \alpha$，所以

$$b = 12\alpha - 6, \qquad a = 4 - 6\alpha.$$

於是第三個條件變為

$$\tfrac{1}{3}(4-6\alpha) + \tfrac{1}{4}(12\alpha - 6) = \alpha - \tfrac{1}{6} = \alpha^2,$$

即 $6\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$，所以

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

留意 α 並非可以隨意選取：線性的 g 只在這兩個值下才成立。取 $\alpha = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$，得 $b = 2\sqrt{3}$ 及 $a = 1 - \sqrt{3}$，所以

$$g(x) = 1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,x,$$

它在

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.211,$$

處等於零，而這點位於 $[0,1]$ 內，正如第 (ii) 部分所說必然如此。(另一個選擇 $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ 給出 $g(x) = 1 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\,x$，它在 $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.789$ 處等於零，同樣位於 $[0,1]$ 內。)

第 (iii) 部分

我們證明 $g = h'$ 滿足 $(*)$，其中 $\alpha = 1 - \beta$。這裏 h' 是連續的，符合第 (ii) 部分的要求。首先，

$$\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x = h(1) - h(0) = 1.$$

以 $u = x$、$\mathrm{d}v = h'(x)\,\mathrm{d}x$ 進行分部積分，

$$\int_0^1 xh'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[xh(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \beta.$$

再進行一次分部積分，這次取 $u = x^2$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2h'(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[x^2h(x)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \beta(2-\beta) = 1 - 2\beta + \beta^2 = (1-\beta)^2.\end{aligned}$$

想一想 那個古怪的值 $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$ 是從哪裏來的？

它正是為了令第三個積分等於第二個積分的平方而特意選取的。經過兩次分部積分後，第二個積分是 $1 - \beta$，所以我們需要第三個積分等於 $(1-\beta)^2$，而 $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$ 恰好做到這一點。

所以 h' 是連續的，並且滿足 $(*)$，其中 $\alpha = 1 - \beta$。根據第 (ii) 部分，對 $[0,1]$ 中某個 x，有 $h'(x) = 0$。

驗算

- 對於 $g(x) = 1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,x$，直接積分得 $\int_0^1 g = 1$、$\int_0^1 xg = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.7887$ 及 $\int_0^1 x^2 g \approx 0.6220 = (0.7887)^2$。
- 第 (iii) 部分可用 $h(x) = (1-\sqrt{3})x + \sqrt{3}\,x^2$ 來測試，它的導數（derivative）正是上面的 g。那麼 $h(0) = 0$、$h(1) = 1$、$\beta = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.2113$，以及 $\int_0^1 xh = \frac{1}{2}\beta(2-\beta) \approx 0.1890$。它的導數在 $x \approx 0.211$ 處等於零，所以 h 在 $[0,1]$ 內有一個轉向點（turning point），與預測相符。

常見錯誤

- 在 (i) 中，不用連續性便論證「$f \geq 0$，所以 $\int f > 0$」。一個非負函數可以積分為零而又不處處為零（例如只在一點上不為零），所以連續性是不可或缺的。
- 在 (ii) 中，把 (i) 應用到 g 本身。我們對 $\int g$ 除了知道它等於 1 之外一無所知；第 (i) 部分必須應用到 $(x-\alpha)^2 g$ 上，而且我們必須驗證這個函數在某處不為零。

- 在 (iii) 中，忘記了 h' 必須連續，(ii) 才可應用。正因如此，題目才說 h 有連續的導數。

STEP 之外

條件 $(*)$ 表示：如果 g 是一個概率密度（probability density），它的平均值（mean）便是 α，而它的方差（variance）$\int (x-\alpha)^2 g = 0$。真正的概率密度不可能有零方差，這就是為甚麼 g 必須在某處跌至零以下。第 (i) 部分是實分析（real analysis）中的一條標準引理（lemma）：一個連續、非負且積分為零的函數必定恆等於零。它經常被使用，例如在變分法（calculus of variations）中。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對連續性和黎曼積分（Riemann integral）的發展足夠嚴謹，既可證明這條引理，也可證明題目容許你假設的介值定理（intermediate value theorem）。

詳細解答

STEP I 2017，第 7 題

純數學 • 拿破崙定理

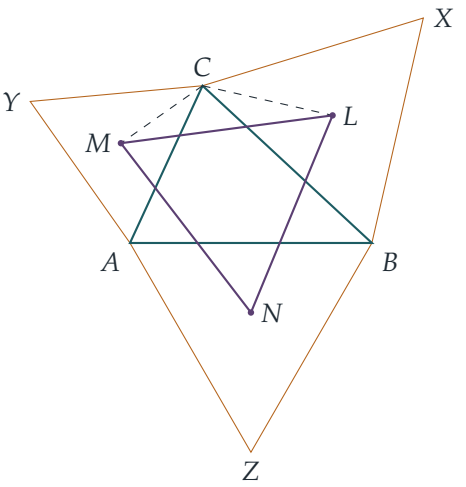
STEP I 2017，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s1-q7

關鍵思路

一切都發生在 ABC 的頂點上。等邊三角形（equilateral triangle）的中心（centre）位於其每個角的角平分線（angle bisector）上，所以由 C 到 L 及由 C 到 M 的直線，各自與 ABC 的一條邊成 30°。由此可以用 C 表示角 LCM。再在三角形 LCM 中應用餘弦公式（cosine rule），便得到 $|LM|$。結果原來是關於 a、b、c 對稱（symmetric）的，而正是這種對稱性令 LMN 成為等邊三角形。



解答

第 (i) 部分

在邊長為 b 的等邊三角形 CYA 中，中心 M 位於全部三條中線（median）上，而這些中線同時也是高（altitude）和角平分線。由 C 出發的中線長度為 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$，而中心位於由頂點起沿中線三分之二的位置。所以

$$|CM| = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, b = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

同理，三角形 BXC 的邊長為 a，所以

$$|CL| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

第 (ii) 部分

由於 CM 平分 60° 的角 YCA，直線 CM 與 CA 成 30°，且位於遠離 B 的一側。同樣地，CL 與 CB 成 30°，且位於遠離 A 的一側。繞 C 由 L 轉到 M，先經過 30°，再經過三角形的角 C，然後再經過 30°。所以

$$\angle LCM = C + 60^\circ.$$

想一想 如果 $C > 120^\circ$，以致 $C + 60^\circ$ 大於 180°，那又怎樣？

這時三角形 LCM 在 C 的角是另一邊的角，即 $360^\circ - (C + 60^\circ)$。但 $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$，所以下面的餘弦公式在所有情況下都給出相同結果。

在三角形 LCM 中應用餘弦公式，並代入第 (i) 部分的長度：

$$\begin{aligned} |LM|^2 &= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\cos(C + 60^\circ) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\left(\tfrac{1}{2}\cos C - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{ab\cos C}{3} + \frac{\sqrt{3}\,ab\sin C}{3}. \end{aligned}$$

現在我們運用關於三角形 ABC 的兩個事實。餘弦公式給出 $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$，而面積為 $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$，所以 $ab\sin C = 2\Delta$。兩邊乘以 6，

$$\begin{aligned} 6|LM|^2 &= 2(a^2 + b^2) - 2ab\cos C + 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ &= 2a^2 + 2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2) + 4\sqrt{3}\,\Delta \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,\Delta, \end{aligned}$$

得證。

若把 a、b、c 置換（permute），右方保持不變，而 Δ 也與三角形頂點的標記方式無關。在頂點 A（求 $|MN|$）及頂點 B（求 $|NL|$）重複同樣的論證，會得到相同的式子。所以

$$|LM| = |MN| = |NL|,$$

因此 LMN 是等邊三角形。

面積相等。邊長為 s 的等邊三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$。設 $S = a^2 + b^2 + c^2$。那麼

$$[LMN] = \frac{\sqrt{3}}{4}|LM|^2 = \frac{\sqrt{3}}{24}\big(S + 4\sqrt{3}\,\Delta\big) = \frac{\sqrt{3}}{24}S + \frac{\Delta}{2}.$$

因此

$$[LMN] = \Delta \iff \frac{\sqrt{3}}{24}S = \frac{\Delta}{2} \iff S = \frac{12\Delta}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\,\Delta.$$

每一步都可逆，所以這正是所要求的「當且僅當」。

第 (iii) 部分

利用 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 及 $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$，把所有量都用 a、b 和 C 表示。下面每一行都與上一行等價：

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \\ \iff \quad & 2a^2 + 2b^2 - 2ab\cos C = 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = ab\big(\cos C + \sqrt{3}\sin C\big) \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ), \end{aligned}$$

因為 $\cos C + \sqrt{3}\sin C = 2\big(\cos C\cos 60^\circ + \sin C\sin 60^\circ\big) = 2\cos(C - 60^\circ)$。兩邊減去 $2ab$，

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ) - 2ab \iff (a-b)^2 = -2ab\big(1 - \cos(C - 60^\circ)\big).$$

所以兩個條件等價。

> ? **想一想** 一個平方怎麼可能等於一個前面帶負號的量？

只有兩邊都是零時才可以。左方 $(a-b)^2$ 至少是 0。右方則有 $ab > 0$ 及 $1 - \cos(C - 60^\circ) \geq 0$，所以右方至多是 0。因此等式成立若且僅若

$$a = b \quad \text{及} \quad \cos(C - 60^\circ) = 1.$$

由於 $0^\circ < C < 180^\circ$，我們有 $-60^\circ < C - 60^\circ < 120^\circ$，而在這範圍內餘弦等於 1 的角只有 0°。所以 $C = 60^\circ$。一個 $a = b$ 而頂角為 60° 的三角形，其餘兩角相等，且總和為 120°，所以三個角都是 60°，三角形是等邊三角形。反之，等邊三角形滿足 $a = b$ 及 $C = 60^\circ$，所以它符合該條件。

結合第 (ii) 部分：$[LMN] = [ABC] \iff a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \iff ABC$ 是等邊三角形。

驗算

- 邊長為 1 的等邊三角形 ABC：此時 $\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}$，而 $6|LM|^2 = 3+3 = 6$，所以 $|LM| = 1$，兩個面積相等，與第 (iii) 部分的預測一致。
- 邊長為 3–4–5 的直角三角形：$S = 50$ 及 $\Delta = 6$，所以 $|LM|^2 = (50+24\sqrt{3})/6 \approx 15.26$。於是 $[LMN] \approx 6.61$，大於 $[ABC] = 6$。用電腦以坐標計算點 L、M、N，得到相同的數值，並在數以千計的隨機三角形（包括鈍角三角形）上驗證了 $6|LM|^2$ 的公式。
- 第 (iii) 部分亦顯示對所有三角形都有 $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$，所以 $[LMN] \geq [ABC]$ 恆成立。

常見錯誤

- 把 $|CM|$ 當作整條中線 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$，或其三分之一，而不是三分之二。
- 用了 $\angle LCM = C + 30°$ 或 C，忘記了兩側各有一個 30°。
- 在第 (iii) 部分只得出「$a = b$」便停下來。你還需要 $C = 60°$，並且要利用 C 的範圍來排除其他餘弦為 1 的角。

STEP 之外

這就是拿破崙定理（Napoleon's theorem）：在任意三角形的各邊上向外作等邊三角形，這些等邊三角形的中心構成一個等邊三角形。第 (iii) 部分得到的不等式 $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$ 是 Weitzenböck 不等式（Weitzenböck's inequality）。複數（complex numbers）可以給出拿破崙定理一個非常簡潔的證明：旋轉 60° 就是乘以 $e^{i\pi/3}$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）把這種處理幾何的方法發展得十分優美。

詳細解答

STEP I 2017，第 8 題

純數學 • 遞推關係與數學歸納法

> **STEP I 2017，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q8

關鍵思路

表達式 $a_n^2 + 2a_nb_n - b_n^2$ 在遞推關係（recurrence）的每一步下都保持不變，因此它永遠等於初始值。把它除以 b_n^2，便得到一條關於比值 c_n 的精確方程，其中帶有一個很小的誤差項 $1/b_n^2$。對這條方程配方（completing the square）幾乎完成了所有工作：它給出極限、比值位於 $\sqrt{2}-1$ 的哪一側，以及 $\sqrt{2}$ 的有理數上下界。

解答

歸納法

當 $n = 1$ 時，$a_1^2 + 2a_1b_1 - b_1^2 = 1 + 4 - 4 = 1$，所以 $(*)$ 成立。

假設 $(*)$ 對某個 $n \geq 1$ 成立。記 $a = a_n$，$b = b_n$，

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= a^2 + 4ab + 4b^2, \\ 2a_{n+1}b_{n+1} &= 2(a+2b)(2a+5b) = 4a^2 + 18ab + 20b^2, \\ b_{n+1}^2 &= 4a^2 + 20ab + 25b^2. \end{aligned}$$

把前兩式相加再減去第三式，得

$$a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} - b_{n+1}^2 = a^2 + 2ab - b^2 = 1.$$

因此 $(*)$ 對 $n+1$ 成立，由歸納法（induction）可知它對所有 $n \geq 1$ 成立。

第 (i) 部分

首先，每個 a_n 和 b_n 都是正數：這在 $n=1$ 時成立，而遞推關係以正係數由 a_n 和 b_n 構成 a_{n+1} 和 b_{n+1}。因此

$$b_{n+1} = 2a_n + 5b_n > 5b_n,$$

因為 $a_n > 0$。由 $b_1 = 2 = 2\times 5^0$ 開始，每一步至少乘以 5，便得到對所有 $n \geq 1$ 有 $b_n \geq 2\times 5^{n-1}$（一行歸納即可）。

現在把 $(*)$ 除以非零的 b_n^2：

$$c_n^2 + 2c_n - 1 = \frac{1}{b_n^2}, \qquad \text{即} \qquad (c_n+1)^2 = 2 + \frac{1}{b_n^2}. \tag{†}$$

> **想一想** 應該取哪一個平方根？

由於 $c_n > 0$，數 $c_n + 1$ 是正數，所以我們取正平方根：

$$c_n + 1 = \sqrt{2 + \frac{1}{b_n^2}}.$$

當 $n \to \infty$ 時，$0 < 1/b_n^2 \leq \frac{1}{4}25^{-(n-1)} \to 0$，所以 $c_n + 1 \to \sqrt{2}$（平方根函數是連續（continuous）的）。因此 $c_n \to \sqrt{2} - 1$，得證。

第 (ii) 部分

由 (†)，$(c_n+1)^2 = 2 + 1/b_n^2 > 2$。由於 $c_n + 1 > 0$ 且 $\sqrt{2} > 0$，這給出 $c_n + 1 > \sqrt{2}$，即 $c_n > \sqrt{2} - 1$。

至於另一個界，以 2 分別除以 $c_n + 1 > \sqrt{2}$ 的兩邊；兩邊都是正數，所以不等號反轉：

$$\frac{2}{c_n+1} < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

合起來，

$$\frac{2}{c_n+1} < \sqrt{2} < c_n + 1.$$

> **想一想** 哪一個 n 值會給出 99/70？

我們需要 $c_n + 1 = (a_n + b_n)/b_n$ 等於 99/70，所以要找 $b_n = 70$。逐步計算遞推關係：

$$(a_1, b_1) = (1,2), \quad (a_2, b_2) = (5,12), \quad (a_3, b_3) = (29,70).$$

所以 $c_3 = \frac{29}{70}$，$c_3 + 1 = \frac{99}{70}$，而

$$\frac{2}{c_3+1} = \frac{140}{99}.$$

把 $n = 3$ 代入這個雙向不等式，得

$$\frac{140}{99} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}.$$

驗算

- $(a_3, b_3) = (29, 70)$ 滿足 $(*)$：$841 + 4060 - 4900 = 1$。
- $\frac{140}{99} \approx 1.414141$，$\frac{99}{70} \approx 1.414286$，而 $\sqrt{2} \approx 1.414214$ 位於兩者之間。這個區間的寬度是 $\frac{1}{6930}$。
- 下一項 $(a_4, b_4) = (169, 408)$ 給出 $c_4 \approx 0.4142157$，與 $\sqrt{2} - 1$ 的差已在 2.2×10^{-6} 以內，這與誤差大約按 $1/b_n^2$ 下降的情況吻合。
- 平方驗證：$140^2 = 19600 < 2 \times 99^2 = 19602$，而 $99^2 = 9801 > 2 \times 70^2 = 9800$。

常見錯誤

- 展開 $n+1$ 時的 $(*)$ 而沒有仔細合併同類項：ab 和 b^2 的係數只是剛好抵消（$4 + 18 - 20 = 2$ 及 $4 + 20 - 25 = -1$）。
- 聲稱 $b_{n+1} \geq 5b_n$，卻沒有指出 $a_n > 0$。
- 忘記說明為何取正平方根，或在取倒數時反轉不等號，卻沒有說明兩邊都是正數。

STEP 之外

這個遞推關係就是乘以矩陣（matrix）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，其行列式（determinant）為 1，並保持二次型（quadratic form）$x^2 + 2xy - y^2$ 不變；尋找這類不變二次型正是佩爾方程（Pell's equation）理論的核心。數 $c_n + 1$，即 $\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \ldots$，是 $\sqrt{2}$ 的連分數漸近分數（continued-fraction convergent）中每隔一個所取的項；漸近分數是在其分母大小範圍內最佳的有理逼近。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）對連分數和佩爾方程有精彩的闡述。

詳細解答

STEP I 2017，第 9 題

力學 • 拋體運動

STEP I 2017，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

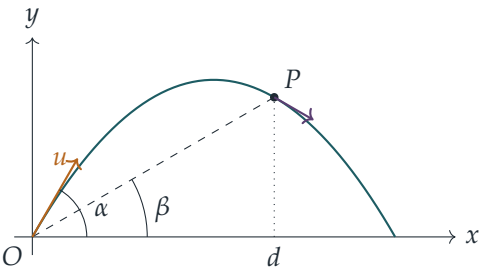
step.maths.org/questions/17-s1-q9

關鍵思路

先寫出軌跡方程（trajectory equation），並令它通過 P。這樣便得到只以投射角為變數的 u^2 表達式。最方便處理的變數是 $T = \tan\alpha$，因為 $\sec^2\alpha = 1 + T^2$ 能把一切化成 T 的有理函數（rational function）。求這個函數的最小值只是普通的微積分，而駐點（stationary point）方程原來是一條經過偽裝的倍角公式（double-angle formula）。

解答

把質點視為只受重力作用而自由運動（不計空氣阻力），以 O 為原點，x 軸水平指向 P，y 軸鉛直向上。設 $T = \tan\alpha$ 及 $k = \tan\beta > 0$。



第 (i) 部分

水平速度為 $u\cos\alpha$，因此質點在時間 $t = x/(u\cos\alpha)$ 到達水平距離 x，此時其高度為

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = xT - \frac{gx^2(1+T^2)}{2u^2}.$$

通過 $P = (d, dk)$ 即表示

$$dk = dT - \frac{gd^2(1+T^2)}{2u^2} \quad \Longrightarrow \quad u^2 = \frac{gd}{2} \cdot \frac{1+T^2}{T-k}.$$

右方必須為正，所以只有 $T > k$，即 $\alpha > \beta$ 的角度才可行。這很合理：我們必須瞄準 P 的上方。因此我們要求以下函數的最小值：

$$f(T) = \frac{1+T^2}{T-k} \qquad (T > k).$$

由商法則（quotient rule），

$$f'(T) = \frac{2T(T-k) - (1+T^2)}{(T-k)^2} = \frac{T^2 - 2kT - 1}{(T-k)^2}.$$

分子在 $T = k \pm \sqrt{k^2+1}$ 時為零，其中只有取 $+$ 號的根大於 k。由於當 $T \to k^+$ 及 $T \to \infty$ 時都有 $f(T) \to \infty$，而兩者之間只有一個駐點，所以該點給出最小值。因此最佳的 α 滿足

$$T^2 - 2kT - 1 = 0. \qquad (*)$$

想一想 不代入根式的話，怎樣在最小值處化簡 $f(T)$？

利用 $(*)$ 改寫各式。由它得 $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$，故

$$T - k = \frac{2T^2 - T^2 + 1}{2T} = \frac{1+T^2}{2T}, \qquad \text{因此} \qquad f(T) = \frac{1+T^2}{(1+T^2)/(2T)} = 2T.$$

所以

$$u^2 = \frac{gd}{2} \cdot 2T = gd\tan\alpha,$$

正如所求。

至於角度，把 $(*)$ 寫成 $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$ 的形式，即為

$$\tan\beta = -\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = -\cot 2\alpha = \tan(2\alpha - 90^\circ),$$

這裏用了 $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 及 $-\cot\theta = \tan(\theta - 90^\circ)$。（若 $\alpha = 45^\circ$，則 $(*)$ 給出 $k = 0$，但由於 $\beta > 0$，這情況已被排除，所以 $\cot 2\alpha$ 有定義。）由於 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$，角 $2\alpha - 90^\circ$ 位於 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 內，β 亦然，而 tan 在該區間上是一一對應（one-to-one）的。所以 $\beta = 2\alpha - 90^\circ$，即

$$2\alpha = \beta + 90^\circ.$$

換言之，最佳投射方向平分直線 OP 與鉛直向上方向之間的夾角。

第 (ii) 部分

在 P 點，水平速度仍為 $u\cos\alpha$。所需時間為 $d/(u\cos\alpha)$，因此鉛直速度為

$$v_y = u\sin\alpha - \frac{gd}{u\cos\alpha}.$$

若質點在 P 點的運動方向與水平成仰角 θ，則

$$\tan\theta = \frac{v_y}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gd}{u^2\cos^2\alpha} = T - \frac{gd(1+T^2)}{gdT} = T - \frac{1+T^2}{T} = -\frac{1}{T} = -\cot\alpha,$$

這裏用了第 (i) 部分的 $u^2 = gdT$。所以 $\tan\theta = \tan(\alpha - 90^\circ)$，又由於 θ 介乎 -90° 與 90° 之間，故 $\theta = \alpha - 90^\circ$。

質點通過 P 時正在向下運動，方向與水平成俯角 $90^\circ - \alpha$。它在 P 點的方向與投射方向互相垂直。

驗算

- 取 $\beta = 30^\circ$。則 $\alpha = 60^\circ$ 及 $u^2 = \sqrt{3}\,gd$。直接計算，$f(T)$ 在 $T = \sqrt{3}$ 的值為 $4/(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3}$，與 $2T$ 吻合。最終方向為水平以下 30°，與圖中一致。
- 令 $\beta \to 0$，得 $\alpha \to 45^\circ$ 及 $u^2 \to gd$。這正是熟悉的事實：在水平地面上，以 45° 投射可得最大射程 u^2/g。此時質點以水平以下 45° 著地，同樣與發射方向垂直。
- 對 200 組隨機選取的 d 和 β，在 α 上作數值搜索，每次所得的最小化角度都是 $\frac{1}{2}(\beta + 90^\circ)$，最小值都是 $gd\tan\alpha$。

常見錯誤

- 忽略條件 $T > k$，保留了根 $k - \sqrt{k^2+1}$。該根是負數，意味着向下投射。
- 由正切值相等推出 $\beta = 2\alpha - 90^\circ$，卻沒有說明為何兩個角都位於 tan 為一一對應的區間內。
- 在 (ii) 中給出角度 $90^\circ - \alpha$，卻沒有說明質點正在下降。

STEP 之外

對於固定的速率 u，能到達的點都位於一條拋物線之內，這條拋物線就是該族軌跡的包絡線（envelope），又稱「安全拋物線」（parabola of safety）。到達 P 的最小速率軌跡，正是使 P 落在該包絡線上的那一條，而 (ii) 中的垂直關係是這條曲線的幾何性質之一。

曲線族的包絡線以及帶約束的最優化（constrained optimisation），都會在大學一年級課程中進一步發展。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是一本好書，可以看到如何以這種嚴謹態度處理拋射體問題。

詳細解答

STEP I 2017，第 10 題

力學 • 連鎖碰撞

STEP I 2017，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s1-q10

關鍵思路

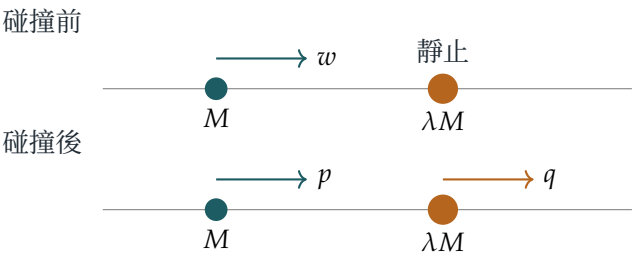
鏈中每一次碰撞的情況都一樣：一粒質量為 M、以速率 w 運動的質點，撞向一粒質量為 λM 的靜止質點。因此我們只需以比值 λ 表示，把這一次碰撞解一遍，整條碰撞鏈便可以重複套用這個結果得出，並得到等比數列（geometric sequence）。之後每一部分的關鍵，就是比較各質點碰撞後的速度，看看有沒有質點追上前面的質點。

解答

把所有質點視為沿 x 軸運動的點，速度以 x 正方向為正。

一次典型的碰撞

質量為 M、以速率 w 運動的質點 A，撞向質量為 λM 的靜止質點 B。設碰撞後兩者的速度分別為 p 和 q。



由動量守恆（conservation of momentum）及牛頓（Newton）碰撞實驗定律（Newton's

experimental law），得

$$Mw = Mp + \lambda Mq, \qquad q - p = ew.$$

把 $p = q - ew$ 代入第一條方程，得 $w = q - ew + \lambda q$，因此

$$q = \frac{1+e}{1+\lambda}\, w, \qquad p = q - ew = \frac{1-\lambda e}{1+\lambda}\, w.$$

記 $r = \dfrac{1+e}{1+\lambda}$ 及 $s = \dfrac{1-\lambda e}{1+\lambda}$。留意

$$q - p = ew > 0,$$

所以每次這樣的碰撞剛完結時，兩粒質點都會分開。

第 (i) 部分

第一次碰撞是 P（質量 m，速率 u）撞向 P_1（質量 λm）。取 $w = u$ 及 $M = m$，得

$$u_1 = \frac{1+e}{1+\lambda}\, u,$$

即所求結果，而 P 碰撞後的速度為 su。

接着 P_1 向前運動，撞向質量為 $\lambda^2 m = \lambda \cdot (\lambda m)$ 的 P_2。質量比同樣是 λ，所以這是同一類碰撞，只是 $w = u_1$。一般而言，P_n（質量 $\lambda^n m$）以速率 u_n 撞向 P_{n+1}（質量 $\lambda^{n+1} m$），所以 $u_{n+1} = ru_n$，而 P_n 碰撞後的速度為 su_n。因此

$$u_n = \left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u.$$

這裏 P_n 的第一次碰撞是被 P_{n-1} 撞擊，第二次則是它撞向 P_{n+1}。（第一次碰撞剛完結時，P_n 正遠離 P_{n-1}，所以接下來它會遇上的事，就是到達 P_{n+1}，前提是後面沒有質點先追上它。這正是題目所設想的事件次序，而在第 (ii)–(iv) 部分中，我們會驗證情況確實如此。）所以

$$v_n = su_n = \frac{(1-\lambda e)(1+e)^n}{(1+\lambda)^{n+1}}\, u,$$

這是以 x 正方向為正的速度。作為速率，它是上式的絕對值；只有當 $\lambda e > 1$，即 P_n 反彈時，這一點才有影響。

第 (ii) 部分

設 $e > \lambda$。那麼 $\lambda < e < 1$，所以 $\lambda e < 1$ 及 $s > 0$；此外 $r > 1$。

碰撞依次發生：先是 P 與 P_1，然後 P_1 與 P_2，再然後 P_2 與 P_3，如此類推。當 P_n 撞向 P_{n+1} 之後，由隊尾起計，$P, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots$ 的速度為

$$su,\ su_1,\ su_2,\ \ldots,\ su_n,\ u_{n+1},\ 0,\ 0,\ \ldots$$

由於 $u_k = r^k u$，其中 $r > 1$ 及 $s > 0$，

$$0 < su < su_1 < su_2 < \cdots < su_n,$$

而且 $u_{n+1} > su_n$，因為 $u_{n+1} - su_n = (r-s)u_n = eu_n > 0$。所以在 $P, P_1, \ldots, P_{n+1}$ 之中，每粒質點都嚴格地比後面那粒快，任何兩粒都不可能再相遇。唯一尚未發生的碰撞，是 P_{n+1} 到達靜止的 P_{n+2}；之後把 n 換成 $n+1$，同樣的論證便再次適用。

所以每粒 P_n（$n \geq 1$）先被 P_{n-1} 撞擊一次，然後撞向 P_{n+1} 一次，此後再不參與任何碰撞：每粒恰好經歷兩次碰撞。（這也證實了第 (i) 部分所假設的事件次序。）

第 (iii) 部分

若 $e = \lambda$，則 $r = 1$ 及 $s = \dfrac{1-e^2}{1+e} = 1 - e$。所以

$$u_n = u \quad \text{且} \quad v_n = (1-e)u \text{ 對每個} n,$$

而 P 碰撞後的速度也是 $(1-e)u$。整個運動就像一個沿直線傳播的脈衝（pulse）：最前面的質點總是以速率 u 運動，撞上下一粒質點時，把速率 u 傳下去，自己則降至 $(1-e)u$。後面所有質點都以 $(1-e)u$ 一起運動，所以它們之間不會再有碰撞，而前面以速率 u 運動的質點則離它們愈來愈遠。每粒 P_n 恰好經歷兩次碰撞。

經過 N 次碰撞後，$P, P_1, \ldots, P_{N-1}$ 以 $(1-e)u$ 運動，而 P_N（質量 $\lambda^N m = e^N m$）則以 u 運動。動能（kinetic energy）為

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}m(1-e)^2u^2\left(1 + e + \cdots + e^{N-1}\right) + \tfrac{1}{2}e^N m u^2 &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[(1-e)^2\,\frac{1-e^N}{1-e} + e^N\right] \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[(1-e)(1-e^N) + e^N\right] \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[1 - e + e^{N+1}\right].\end{aligned}$$

除以初始能量 $\frac{1}{2}mu^2$，經過 N 次碰撞後損失的比例為

$$1 - \left(1 - e + e^{N+1}\right) = e\left(1 - e^N\right) \to e \quad \text{當} N \to \infty,$$

因為 $0 < e < 1$。這就是所求結果。

第 (iv) 部分

若 $\lambda e = 1$，則 $s = 0$ 且

$$r = \frac{1+e}{1+1/e} = \frac{e(1+e)}{e+1} = e.$$

所以每次碰撞都令運動中的質點完全停下：P 停下，然後 P_1 以 eu 向前運動，撞向 P_2 後停下，如此類推，其中 $u_n = e^n u$ 及 $v_n = 0$。每粒 P_n 恰好經歷兩次碰撞，最終各質點都靜止，而且每粒都緊貼下一粒，同時只有單獨一粒質點把運動帶向前，而且愈來愈慢。由於 P_n 需要時間 $1/(e^n u)$ 才到達 P_{n+1}，相鄰兩次碰撞之間的時間間隔會無限增大。

想一想 動量守恆，那麼能量又怎會流失？

經過 N 次碰撞後，只有 P_N 在運動，其質量為 $\lambda^N m = e^{-N}m$，速率為 $e^N u$。它的動量是 $e^{-N}m \cdot e^N u = mu$，理應如此；但它的動能是

$$\tfrac{1}{2}\, e^{-N} m\, (e^N u)^2 = e^N \cdot \tfrac{1}{2} m u^2.$$

動量由愈來愈重、愈來愈慢的質點承載；在動量 p 固定時，動能 $p^2/(2M)$ 會隨質量 M 增大而趨於零。剩餘的比例 e^N 趨於 0，所以最終初始動能會全部損失。

驗算

- 取 $e = 1$ 及 $\lambda = 1$（質量相等、完全彈性），得 $u_1 = u$ 且 P 停下：這正是大家熟悉的牛頓擺（Newton's cradle）交換速度現象。
- 在第 (iii) 部分中，單次碰撞（$N = 1$）損失的比例為 $e(1-e)$。直接計算：P 最終以 $(1-e)u$ 運動，而質量為 em 的 P_1 則以 u 運動，所以剩餘能量是原來的 $(1-e)^2 + e = 1 - e + e^2$，兩者吻合。
- 以精確分數逐步進行碰撞的電腦模擬，證實了 u_n 和 v_n 的公式、$e > \lambda$ 時每粒質點各經歷兩次碰撞的規律、損失比例 $e(1-e^N)$（當 $e = \frac{1}{2}$，經過 25 次碰撞後為 0.49999998），以及 $\lambda e = 1$ 時的剩餘比例 e^N。

常見錯誤

- 把牛頓定律寫成 $q - p = -ew$，或把次序倒轉：分離速率等於接近速率的 e 倍，而這裏兩者都是正數。
- 忘記每一次碰撞的質量比都是 λ，而正是這一點令答案成為等比數列。
- 未經驗證便假設事件的次序。當 $e < \lambda$ 且 $\lambda e < 1$ 時，落在後面的質點可能在前面那粒到達下一粒質點之前就追上它，簡單的規律便不再成立。

STEP 之外

第 (iv) 部分顯示動量和能量的表現截然不同：動量完全守恆，但能量卻因為由愈來愈重的質點承載而完全流失。互相碰撞的質點鏈，是脈衝在密度變化的介質中傳播的一個簡單模型，並可引伸至離散晶格（discrete lattice）中的波動傳播。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）就以同樣嚴謹的態度討論碰撞及質心參考系（centre-of-mass frame）。

詳細解答

STEP I 2017，第 11 題

力學 • 涉及摩擦力的剛體靜力學

> **STEP I 2017，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q11

關鍵思路

一切都發生在箱子的一個鉛垂截面內，而這個截面是一個傾斜了 α 的正方形。因此自然的坐標軸應沿箱底和沿箱側向上，而不是水平和鉛垂方向：這樣兩個法向反作用力（normal reaction）都沿坐標軸，只有重量需要分解。兩次分解力給出法向反作用力之間的一條關係，對中點取力矩（moment）的方程（重量在此不產生力矩）給出第二條關係，再利用 tan 的複角公式（compound-angle formula）比較兩者，便得出答案。

解答

模型與受力

把桿視為均勻剛性桿（uniform rigid rod），並在包含它的鉛垂平面內討論。在這個平面內，箱底沿最大斜率線（line of greatest slope）放置，與水平成角 α，而經過 O 的箱側與箱底垂直。在 O 取坐標軸：

- x 沿箱底，指向斜面上方（朝向 A）；
- y 沿箱側，垂直於斜面（朝向 B）。

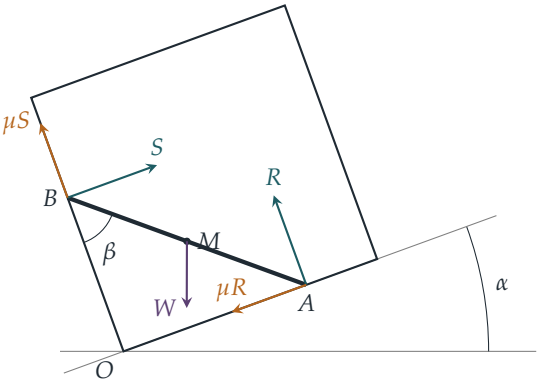
箱側與箱底垂直，所以三角形 OAB 在 O 處為直角，而 B 處的角為 β。因此

$$OA = 2L\sin\beta, \qquad OB = 2L\cos\beta.$$

設 $\mu = \tan\gamma$。桿所受的力為：

- 在 A：沿 $+y$ 方向的法向反作用力 R，以及朝向 O（即 $-x$ 方向）的摩擦力 μR，因為 A 即將向遠離 O 的方向滑動，而摩擦力處於極限狀態（limiting）；

- 在 B：沿 $+x$ 方向的法向反作用力 S，以及遠離 O（即 $+y$ 方向）的摩擦力 μS，因為 B 即將朝 O 滑動；
- 作用於中點 M、鉛垂向下的重量 W。y 軸與向上的鉛垂方向成角 α，所以重量沿 x 的分量為 $-W\sin\alpha$，沿 y 的分量為 $-W\cos\alpha$。



分解力

沿箱底（x）及沿箱側向上（y）：

$$S-\mu R-W\sin\alpha=0, \tag{1}$$

$$R+\mu S-W\cos\alpha=0. \tag{2}$$

由於 $R+\mu S=W\cos\alpha\neq 0$，把 (1) 除以 (2) 得

$$\frac{S-\mu R}{R+\mu S}=\tan\alpha. \tag{3}$$

對中點取力矩

重量作用於 M，所以它對 M 沒有力矩。相對於 M，點 A 位於 $(L\sin\beta,\,-L\cos\beta)$，而 B 位於 $(-L\sin\beta,\,L\cos\beta)$。按圖中逆時針方向取力矩（作用於相對位置 (p,q) 的力 (F_x,F_y) 的力矩為 pF_y-qF_x）：

$$\begin{aligned}\text{在}A:&\quad L\sin\beta\cdot R-(-L\cos\beta)(-\mu R)=LR(\sin\beta-\mu\cos\beta),\\ \text{在}B:&\quad -L\sin\beta\cdot\mu S-L\cos\beta\cdot S=-LS(\cos\beta+\mu\sin\beta).\end{aligned}$$

兩者之和必須為零，所以

$$R(\sin\beta-\mu\cos\beta)=S(\cos\beta+\mu\sin\beta).$$

現在代入 $\mu = \tan\gamma$，並把整條式乘以 $\cos\gamma$（它是正數）：

$$R(\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma) = S(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma),$$
$$\text{即}\quad R\sin(\beta-\gamma) = S\cos(\beta-\gamma).$$

想一想 我們可以除以 R 和 $\cos(\beta-\gamma)$ 嗎？

兩個法向反作用力都是推力，所以 $R > 0$ 且 $S > 0$。於是 $\sin(\beta-\gamma)$ 與 $\cos(\beta-\gamma)$ 不可能同時為零；又因為 $S\cos(\beta-\gamma) = R\sin(\beta-\gamma)$ 且 $R, S > 0$，兩者同號，所以兩者都不為零，並且 $\tan(\beta-\gamma) > 0$。由於 β 和 γ 都在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 內，$\beta-\gamma$ 在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 內，因此事實上

$$\frac{S}{R} = \tan(\beta-\gamma), \qquad 0 < \beta-\gamma < \tfrac{1}{2}\pi. \tag{4}$$

綜合起來

把 (3) 左邊的分子和分母都除以 R，並記 $k = S/R = \tan(\beta-\gamma)$ 及 $\mu = \tan\gamma$：

$$\tan\alpha = \frac{k-\mu}{1+k\mu} = \frac{\tan(\beta-\gamma)-\tan\gamma}{1+\tan(\beta-\gamma)\tan\gamma} = \tan\big((\beta-\gamma)-\gamma\big) = \tan(\beta-2\gamma),$$

這裏用了複角公式（分母 $1+k\mu$ 是正數，所以沒有任何無定義的情況）。由 (4) 及 $0 < \gamma < \frac{1}{2}\pi$，

$$\beta - 2\gamma = (\beta-\gamma) - \gamma \in \left(-\tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{1}{2}\pi\right),$$

而且 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ 亦成立。正切函數在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上是一對一（one-to-one）的，所以 $\tan\alpha = \tan(\beta-2\gamma)$ 迫使

$$\beta = \alpha + 2\gamma,$$

得證。這與題目所給的條件 $\alpha < \beta$ 相符；它亦告訴我們，這種狀態只有在 $\alpha + 2\gamma < \frac{1}{2}\pi$ 時才可能出現。

驗算

- 光滑箱子：當 $\gamma = 0$ 時，結果表示 $\beta = \alpha$。可以直接驗證：沒有摩擦時，兩個法向反作用力相交於 P，即以 AB 為對角線、邊沿箱子方向的長方形的第四個頂點。三個力處於平衡時必須共點（concurrent），所以重量經過 M 的作用線必須經過 P，即 MP 是鉛垂的。對角線 MP 平行於把 OB 向遠離 O 的方向轉過 β 後的方向，而 OB 本身朝 O 的一側與鉛垂成 α 傾斜；所以 MP 與鉛垂成 $\beta-\alpha$，並且恰好在 $\beta = \alpha$ 時是鉛垂的。

- 數值例子：取 $\alpha = 20°$、$\gamma = 15°$，所以 $\beta = 50°$。於是 (1) 和 (2) 給出 $R \approx 0.791W$ 及 $S \approx 0.554W$（兩者皆為正），$S/R \approx 0.700 \approx \tan 35°$，而對 M 的總力矩算出來為零。

常見錯誤

- 沿水平和鉛垂方向分解力：這樣做可行，但四個接觸力每一個都需要分解，代數運算會繁重得多。
- 弄錯摩擦力的方向。摩擦力與即將發生的運動方向相反：在 A 朝向 O，在 B 遠離 O（沿箱側向上）。
- 由 $\tan\alpha = \tan(\beta - 2\gamma)$ 直接下結論，卻沒有說明為何兩個角都位於 tan 為一對一的區間內。

STEP 之外

把摩擦力寫成 μR 並令 $\mu = \tan\gamma$，正是*摩擦角*（angle of friction）的概念：在極限平衡（limiting equilibrium）時，總接觸力位於一個以法線為軸、半頂角為 γ 的「摩擦錐」（friction cone）的邊緣上。關於剛體倚靠粗糙表面的問題，於是變成關於這些錐體以及三力共點的幾何問題；同一幅圖像亦是楔子、梯子以及疊放物體穩定性等問題的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）從基本原理出發，細緻地發展了剛體靜力學和力矩。

詳細解答

STEP I 2017，第 12 題

概率與統計 • 期望值與條件化

> **STEP I 2017，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q12

關鍵思路

主辦者收取的款項永遠相同，都是 Nc；唯一的不確定之處，在於究竟需不需要派發獎金。因此期望利潤（expected profit）等於收入減去 J 乘以「有人選中中獎號碼」的概率，而整個問題最終歸結為其互補事件（complementary event），即沒有人選中。這個概率是一個冪 $(1-p)^N$，而近似式 $(*)$ 正是為處理這類式子而設的。

解答

第 (i) 部分

設 W 為中獎號碼，並設 E 為沒有參加者選中 W 的事件。無論 W 結果是甚麼，每位參加者都獨立（independently）地以概率 $1-\frac{1}{N}$ 避開它，所以

$$\mathrm{P}(E) = \left(1-\frac{1}{N}\right)^N.$$

在任何情況下，主辦者都收到 Nc。若 E 發生，則無人中獎，利潤為 Nc；否則獎金由中獎者瓜分，但不論中獎者有多少人，派出的總額都是 J，所以利潤為 $Nc-J$。因此

$$\text{期望利潤} = Nc - J\,\mathrm{P}(E^c) = Nc - J\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^N\right].$$

在 $(*)$ 中取 $a=1$，得 $(1-\frac{1}{N})^N \approx \mathrm{e}^{-1}$，所以期望利潤約為 $Nc - J(1-\mathrm{e}^{-1})$。若 $J = 2Nc$，則變為

$$Nc - 2Nc\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) = Nc\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-1\right).$$

由於 $\mathrm{e} > 2$，我們有 $2/\mathrm{e} < 1$，所以此值為負：主辦者預期會虧蝕。

第 (ii) 部分

共有 γN 個熱門號碼和 $(1-\gamma)N$ 個冷門號碼。每位參加者恰好選一個號碼，所以全部 N 個號碼的概率之和為 1：

$$\gamma N \cdot \frac{a}{N} + (1-\gamma)N \cdot \frac{b}{N} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \gamma a + (1-\gamma)b = 1.$$

主辦者仍然均勻地（uniformly）選取 W，所以 W 是熱門號碼的概率為 γ，是冷門號碼的概率為 $1-\gamma$。

? **想一想** 參加者不再均勻地選號。這會否改變我們求 $\mathrm{P}(E)$ 的方法？

只會透過避開 W 的概率產生影響，而這個概率現在取決於 W 屬於哪一類號碼。因此我們以此作條件（condition）。若 W 是熱門號碼，每位參加者獨立地以概率 $1-\frac{a}{N}$ 避開它；若是冷門號碼，則以概率 $1-\frac{b}{N}$ 避開。由全概率定律（law of total probability）及 $(*)$，

$$\mathrm{P}(E) = \gamma\left(1-\frac{a}{N}\right)^N + (1-\gamma)\left(1-\frac{b}{N}\right)^N \approx \gamma\,\mathrm{e}^{-a} + (1-\gamma)\,\mathrm{e}^{-b}.$$

與第 (i) 部分一樣，期望利潤為 $Nc - J\big(1-\mathrm{P}(E)\big)$，所以

$$\text{期望利潤} \approx \gamma J\,\mathrm{e}^{-a} + (1-\gamma)J\,\mathrm{e}^{-b} + (Nc - J),$$

這正是所要求的形式，其中

$$A = \gamma J, \qquad B = (1-\gamma)J, \qquad C = Nc - J.$$

情況 $\gamma = \frac{1}{8}$，$a = 9b$。 由上述關係得 $\frac{1}{8}\cdot 9b + \frac{7}{8}b = 1$，即 $2b = 1$，所以

$$b = \tfrac{1}{2}, \qquad a = \tfrac{9}{2}.$$

當 $J = 2Nc$ 時，我們有 $A = \frac{1}{4}Nc$、$B = \frac{7}{4}Nc$ 及 $C = -Nc$，所以期望利潤約為

$$Nc\left(\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-9/2} + \tfrac{7}{4}\mathrm{e}^{-1/2} - 1\right).$$

括號內第一項為正，所以只需證明 $\frac{7}{4}\mathrm{e}^{-1/2} > 1$，即 $\sqrt{\mathrm{e}} < \frac{7}{4}$。由於 $\mathrm{e} < 3$，

$$\sqrt{\mathrm{e}} < \sqrt{3} < \tfrac{7}{4},$$

其中最後一步成立，是因為兩邊皆為正，且 $3 < \frac{49}{16}$（即 $48 < 49$）。因此括號內的值為正，主辦者預期會獲利。獎金與第 (i) 部分相同，但由於中獎號碼往往是冷門號碼，獎金無人認領的情況更為常見。

驗算

- 當 $J = 2Nc$ 時，第 (i) 部分給出的期望利潤約為 $(2/\mathrm{e} - 1)Nc \approx -0.264\,Nc$，而最後一部分給出 $\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4.5} + \frac{7}{4}\mathrm{e}^{-0.5} - 1\right)Nc \approx 0.064\,Nc$。正如所述，是一筆小額利潤。
- 當 $N = 800$ 時，用精確的冪 $(1 - a/N)^N$ 計算得 $0.0640\,Nc$，可見近似式 $(*)$ 在此非常準確。
- 若 $\gamma = 1$（每個號碼都是「熱門」的），上述關係迫使 $a = 1$，而第 (ii) 部分的公式便化為第 (i) 部分的 $J\mathrm{e}^{-1} + Nc - J$。
- 以電腦對 $N = 4$ 作完全枚舉（參加者選號的全部 4^4 種方式），結果與兩條未經近似的公式皆吻合。

常見錯誤

- 糾結於獎金如何分配。只要至少有一人中獎，不論中獎人數多少，主辦者派出的總額都是 J。
- 誤以為中獎號碼是熱門號碼的概率取決於 a 或 b。主辦者是均勻選號的，所以它是熱門號碼的概率為 γ。
- 把關係式寫成 $a + b = 1$ 或 $\gamma a + b = 1$，忘記計算每類號碼各有多少個。

STEP 之外

選中中獎號碼的參加者人數服從參數為 N 和 p 的二項分佈（binomial distribution），而 $(*)$ 正是理解以下事實的第一步：當 N 很大而 Np 固定時，它近似於泊松分佈（Poisson distribution）——$(1-p)^N \to \mathrm{e}^{-Np}$ 不過就是泊松分佈取值為零的概率。現實中設有獎金累積（roll-over）的彩票正是以這種方式分析的，而選擇冷門號碼的玩家確實有較高的期望回報。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）一書，詳細發展了泊松極限，以及類似本題所用的條件論證。

詳細解答

STEP I 2017，第 13 題

概率與統計 • 概率的遞推關係

> **STEP I 2017，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q13

關鍵思路

逐片麵包去看，問它是怎樣被用掉的：它可以做多士，可以是三文治的第一片，也可以是三文治的第二片。三者恰好發生其一，而前一片麵包的情況決定了哪幾種是可能的。若第 $r-1$ 片完成了一份小食，第 r 片便開始一份新的小食；若沒有完成，第 r 片必然是某份三文治的後半。這樣便得到一個一階遞推關係（first-order recurrence），我們用慣常的技巧——減去不動點（fixed point）——來求解。

解答

設定

按使用次序把麵包編號為 $1, 2, \ldots, n$。對每一片麵包 r，以下情況恰好發生其一：

- T_r：第 r 片用來做多士；
- A_r：第 r 片是某份三文治兩片麵包中的第一片；
- S_r：第 r 片是某份三文治兩片麵包中的第二片。

因此 $t_r = \mathrm{P}(T_r)$、$s_r = \mathrm{P}(S_r)$，而 $\mathrm{P}(A_r) = 1 - s_r - t_r$。若 T_r 或 S_r 發生，我們說第 r 片完成一份小食；其概率為 $s_r + t_r$。

第一片麵包開始第一份小食，所以它不可能是三文治的第二片：

$$s_1 = 0.$$

（此外，若 $n \geq 2$ 則 $t_1 = p$；若 $n = 1$ 則 $t_1 = 1$。）

兩條方程

關於 t_r 的方程。第 r 片開始一份新小食，當且僅當第 $r-1$ 片完成一份小食，其概率為 $s_{r-1}+t_{r-1}$。已知第 r 片開始一份小食，餘下的是第 $r, r+1, \ldots, n$ 片；當 $r \le n-1$ 時至少有兩片，所以無論之前發生了甚麼，我選擇多士的概率都是 p。若第 $r-1$ 片沒有完成小食，第 r 片便完成一份三文治，不是多士。因此

$$t_r = (s_{r-1} + t_{r-1})\, p \qquad (2 \le r \le n-1).$$

這條式在 $r = n$ 時不成立，因為從最後一片開始的小食必定是多士。

關於 s_r 的方程。第 r 片是三文治的第二片，當且僅當第 $r-1$ 片是三文治的第一片，即第 $r-1$ 片沒有完成小食。所以

$$s_r = 1 - (s_{r-1} + t_{r-1}) \qquad (2 \le r \le n).$$

這裏不需要對餘下片數加任何條件，所以此式一直成立至 $r = n$。

s_r 的遞推關係

把第二條方程中的 r 換成 $r+1$，得 $s_r + t_r = 1 - s_{r+1}$，所以第一條方程可寫成

$$t_r = p\,(1 - s_r) \qquad (2 \le r \le n-1).$$

當 $n \ge 2$ 時，此式對 $r = 1$ 亦成立，因為 $t_1 = p$ 且 $s_1 = 0$。把 $t_{r-1} = p(1 - s_{r-1})$（在 $1 \le r-1 \le n-1$ 時成立）代入 s_r 的方程：

$$\begin{aligned} s_r &= 1 - s_{r-1} - p(1 - s_{r-1}) \\ &= (1-p)(1 - s_{r-1}) \\ &= q\,(1 - s_{r-1}), \end{aligned}$$

此式對 $2 \le r \le n$ 成立，特別地對 $2 \le r \le n-1$ 成立，正如所求。

解遞推關係

想一想 怎樣解 $s_r = q - qs_{r-1}$？哪個常數數列滿足它？

常數解 $s_r = c$ 需要 $c = q - qc$，所以 $c = \dfrac{q}{1+q}$。從遞推關係減去 $c = q - qc$，

$$s_r - \frac{q}{1+q} = -q\left(s_{r-1} - \frac{q}{1+q}\right),$$

所以 $s_r - \frac{q}{1+q}$ 每一步都乘以 $-q$。由 $s_1 - \frac{q}{1+q} = -\frac{q}{1+q}$ 開始，

$$s_r - \frac{q}{1+q} = (-q)^{r-1}\left(-\frac{q}{1+q}\right) = \frac{(-q)^r}{1+q},$$

從而得到

$$s_r = \frac{q + (-q)^r}{1+q} \qquad (1 \le r \le n-1).$$

（由於遞推關係一直成立至 $r = n$，同一公式其實對 $r = n$ 亦成立。）

至於 t_r，我們利用 $t_r = p(1 - s_r)$ 及

$$1 - s_r = \frac{1 + q - q - (-q)^r}{1+q} = \frac{1 - (-q)^r}{1+q},$$

所以

$$t_r = \frac{p\big(1 - (-q)^r\big)}{1+q} \qquad (1 \le r \le n-1).$$

最後一片

如上所述，s_r 的方程及遞推關係 $s_r = q(1 - s_{r-1})$ 對 $r = n$ 亦成立，所以公式延續下去：

$$s_n = \frac{q + (-q)^n}{1+q}.$$

最後一片不可能是三文治的第一片，因為之後再沒有麵包。所以它要麼是多士，要麼是三文治的第二片，故 $t_n = 1 - s_n$：

$$t_n = \frac{1 - (-q)^n}{1+q}.$$

與 $r < n$ 時的 t_r 相比，因子 p 消失了：一份小食若從最後一片開始，必定是多士。（這些公式在 $n = 1$ 時亦成立：它們給出 $s_1 = 0$ 及 $t_1 = 1$。）

驗算

- 取 $n = 3$ 及 $p = q = \frac{1}{2}$。可能的次序有：多士—多士—多士（概率 $\frac{1}{4}$）、先多士後三文治（概率 $\frac{1}{4}$）、先三文治後多士（概率 $\frac{1}{2}$）。所以 $s_3 = \frac{1}{4}$ 而 $t_3 = \frac{3}{4}$。公式給出 $s_3 = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$ 及 $t_3 = \dfrac{1 + \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$。
- 當 $q = 0$（永遠做多士）時，對每個 r 都得 $s_r = 0$ 及 $t_r = 1$，理應如此。
- 當 r 增大時，$s_r \to \frac{q}{1+q}$。這是合理的：長遠而言，有比例 q 的小食是三文治，每份有一片「第二片」，而每份小食平均用 $1 + q$ 片麵包，所以有比例 $\frac{q}{1+q}$ 的麵包是第二片。
- 我們用電腦對 $n \le 12$ 及若干 p 值，精確列舉所有小食序列，驗證了全部公式。

常見錯誤

- 使用 $t_n = p(s_{n-1} + t_{n-1})$：當一份小食從最後一片開始時，它是多士的概率是 1，而不是 p。
- 以為事件「第 $r-1$ 片是多士」與「第 r 片是多士」互相獨立（independent）。其實並不獨立：關鍵在於第 r 片是否開始一份小食，而這取決於之前的歷史。
- 解遞推關係時丟失負號：公比是 $-q$，所以答案圍繞 $\frac{q}{1+q}$ 交替擺動。

STEP 之外

第 r 片是否開始一份新小食，構成一個簡單的*更新過程*（renewal process）：各份小食的長度互相獨立，每份是 1 或 2，而極限 $\frac{q}{1+q}$ 正是更新定理（renewal theorem）的一個例子（長遠的更新率等於平均間隔的倒數）。等價地，每片麵包的類型構成一條馬可夫鏈（Markov chain），而 $(-q)^r$ 顯示它遺忘起始狀態的速度。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）同時涵蓋馬可夫鏈及這類遞推關係。

詳細解答

STEP II 2017，第 1 題

純數學 • 歸約公式

> **STEP II 2017，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q1

關鍵思路

被積函數（integrand）中難處理的部分是 $\arctan x$，但它的導數（derivative）是一個有理函數（rational function），所以用分部積分法（integration by parts），取 $u = \arctan x$，就能把它換成 $\frac{1}{1+x^2}$。接着，(ii) 的竅門是把兩個積分配對，使分子合併成 $x^{n+1}(1+x^2)$，從而消去麻煩的分母。這樣便得到一條令 n 每次增加 2 的遞推公式（reduction formula）；用兩次就令 n 增加 4，而這正是 (iii) 的歸納法（induction）所需要的。

解答

第 (i) 部分

用分部積分法，取 $u = \arctan x$ 及 $\mathrm{d}v = x^n\,\mathrm{d}x$，於是 $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$（由於 $n \geq 0$，這沒有問題）：

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

這裏用了 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$，以及邊界項（boundary term）在 $x = 0$ 處為零這一事實。兩邊乘以 $n+1$，便得到所需結果：

$$(n+1)I_n = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

當 $n = 0$ 時，餘下的積分是 $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$，所以

$$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

第 (ii) 部分

把 (i) 中的 n 換成 $n+2$，再與原本的 (i) 相加：

$$\begin{aligned}(n+3)I_{n+2}+(n+1)I_n &= \frac{\pi}{2}-\int_0^1 \frac{x^{n+3}+x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}-\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n+2},\end{aligned}$$

因為 $x^{n+3}+x^{n+1}=x^{n+1}(1+x^2)$。

> **想一想** 這條公式把 I_4 與 I_2 聯繫起來，又把 I_2 與 I_0 聯繫起來。我們需要哪些 n 值？

我們需要 $n=0$ 及 $n=2$：

$$\begin{aligned}n=0:&\quad 3I_2+I_0=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2},\\ n=2:&\quad 5I_4+3I_2=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

以第二式減去第一式，消去 I_2：

$$5I_4=I_0+\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2,\qquad \text{所以}\qquad I_4=\frac{\pi+1-2\ln 2}{20}.$$

第 (iii) 部分

為簡便起見，記 $S_n=\sum_{r=1}^{2n}\frac{(-1)^r}{r}$。

求 A。當 $n=1$ 時，$S_1=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，所以命題變成 $5I_4=A+\frac{1}{4}$。由 (ii) 得 $5I_4=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$，因此必須取

$$A=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\ (=I_0),$$

而取這個值時，命題對 $n=1$ 成立。

歸納步驟。假設對某個 $k\geq 1$，有 $(4k+1)I_{4k}=A-\frac{1}{2}S_k$。我們要推到 I_{4k+4}，即用 (ii) 的公式走兩步。分別取 $n=4k+2$ 及 $n=4k$，得

$$\begin{aligned}(4k+5)I_{4k+4}+(4k+3)I_{4k+2}&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4k+4},\\ (4k+3)I_{4k+2}+(4k+1)I_{4k}&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4k+2}.\end{aligned}$$

> **想一想** 怎樣才能消去多餘的 I_{4k+2}？

它在兩條方程中的係數相同，所以以第一式減去第二式便可把它消去：

$$(4k+5)I_{4k+4} = (4k+1)I_{4k} + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

另一方面，S_{k+1} 比 S_k 多出兩項，即 $r = 2k+1$（奇數，所以是負的）和 $r = 2k+2$（偶數，所以是正的）：

$$-\frac{1}{2}S_{k+1} = -\frac{1}{2}S_k - \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\Big) = -\frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

利用歸納假設（inductive hypothesis），

$$(4k+5)I_{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_{k+1},$$

這正是 $n = k+1$ 時的命題。由於命題對 $n = 1$ 成立，由歸納法可知它對所有 $n \geq 1$ 均成立，其中 $A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$。

驗算

- 數值上，$I_0 \approx 0.438825$，$I_4 \approx 0.137765$；對原來的積分使用辛普森法則（Simpson's rule），結果在小數點後十位都吻合。
- A 等於 I_0，所以 (iii) 的公式對 $n = 0$ 也成立（此時和式是空和），這是個好兆頭。
- 當 $n \to \infty$ 時，(i) 中的積分趨向 0（被積函數不超過 x^{n+1}），所以 $(4n+1)I_{4n} \to \frac{\pi}{4}$。同時 $S_n \to -\ln 2$，所以右方趨向 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4}$。兩邊在極限下吻合。

常見錯誤

- 寫了 $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$，卻忘了把第二個積分也除以 $n+1$。
- 弄錯交錯和中兩個新項的正負號：$r = 2k+1$ 是奇數，所以 $(-1)^r = -1$。
- 未先由基本情況（base case）確定 A，就去證明歸納步驟。

STEP 之外

最後一項驗算用到了交錯調和級數（alternating harmonic series）$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$，而這道題實際上就證明了它：(iii) 的恆等式，加上 $(4n+1)I_{4n} \to \frac{\pi}{4}$ 這一事實，迫使部分和（partial sums）收斂（converge）到 $\ln 2$。利用像 $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 這類趨向零的積分來控制級數的誤差，是一種標準方法，你在第一個數學分析（analysis）課程中便會遇到。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解數學分析》）淺白易讀，是了解如何嚴格處理這類極限的好起點。

詳細解答

STEP II 2017，第 2 題

純數學 • 周期數列

> **STEP II 2017，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q2

關鍵思路

把映射與自身複合並化簡：遞推關係（recurrence relation）走兩步，得到的是另一個形狀完全相同的「一次式除以一次式」映射，所以走四步其實就是把「走兩步」再做兩次。每當我們問 $x_{n+k} = x_n$ 是否成立時，消去分母都會得到一條關於 x_n 的二次方程，而這條二次式可以因式分解（factorise）。其中一個因式總是 $x^2 + (b-a)x + 1$，它的根正好就是遞推關係的不動點（fixed points），即令數列成為常數數列的那些值。看出這一點，兩部分便都迎刃而解。

解答

記 $f(x) = \dfrac{ax-1}{x+b}$，使得 $x_{n+1} = f(x_n)$。於是

$$x_{n+2} = \frac{a\dfrac{ax_n-1}{x_n+b} - 1}{\dfrac{ax_n-1}{x_n+b} + b}.$$

分子分母同乘以 $x_n + b$（按假設不為零），得

$$x_{n+2} = \frac{a(ax_n-1) - (x_n+b)}{(ax_n-1) + b(x_n+b)} = \boxed{\frac{(a^2-1)x_n - (a+b)}{(a+b)x_n + b^2 - 1}}$$

現在值得多記下一個事實。一個值 x 是不動點（$f(x) = x$）當且僅當 $ax - 1 = x^2 + bx$，即

$$q(x) \equiv x^2 + (b-a)x + 1 = 0. \qquad (*)$$

若 x_0 是 q 的根，則 $x_1 = x_0$，如此類推：數列是常數數列，週期（period）為 1。

第 (i) 部分

假設數列的週期為 2。那麼特別地 $x_2 = x_0$。在 x_{n+2} 的公式中代入 $x = x_0$ 並消去分母，

$$\begin{aligned} 0 &= (a^2-1)x - (a+b) - x\big[(a+b)x + b^2 - 1\big] \\ &= -(a+b)x^2 + (a^2-b^2)x - (a+b) \\ &= -(a+b)\big[x^2 + (b-a)x + 1\big], \end{aligned}$$

這裏用了 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$。所以 $(a+b)\,q(x_0) = 0$。

想一想 為甚麼不能以「$q(x_0) = 0$ 只對應 x_0 的一個值」作結？

因為 x_0 只是一個數，沒有任何東西阻止它是 q 的根。真正排除這種情況的是 $(*)$ 的含義：若 $q(x_0) = 0$，則 x_0 是不動點，所以 $x_1 = x_0$，並且對所有 n 都有 $x_{n+1} = x_n$。這是週期 1，而週期 2 的定義不容許這種情況（取 $m = 1$）。因此 $q(x_0) \neq 0$，從而

$$a + b = 0$$

是週期 2 的必要條件。

（反過來，若 $b = -a$，兩步公式便簡化為 $x_{n+2} = \dfrac{(a^2-1)x_n}{a^2-1} = x_n$。這裏不可能出現 $a^2 = 1$ 的情況，因為當 $a = 1$、$b = -1$ 時 $x_1 = 1$，當 $a = -1$、$b = 1$ 時 $x_1 = -1$；無論哪種情況都有 $x_1 + b = 0$，而這是被排除的。）

第 (ii) 部分

記 $A = a^2 - 1$、$B = b^2 - 1$ 及 $c = a + b$，使得 $x_{n+2} = g(x_n)$，其中 $g(x) = \dfrac{Ax - c}{cx + B}$。把 g 作用兩次，並再次將分子分母同乘以 $cx + B$，

$$x_{n+4} = \frac{A(Ax_n - c) - c(cx_n + B)}{c(Ax_n - c) + B(cx_n + B)} = \frac{(A^2 - c^2)x_n - c(A+B)}{c(A+B)x_n + B^2 - c^2}.$$

那麼 $x_{n+4} = x_n$ 成立當且僅當

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2-c^2)x_n - c(A+B) - x_n\big[c(A+B)x_n + B^2 - c^2\big] \\ &= -c(A+B)x_n^2 + (A^2 - B^2)x_n - c(A+B) \\ &= -(A+B)\big[c\,x_n^2 + (B-A)x_n + c\big]. \end{aligned}$$

由於 $B - A = b^2 - a^2 = (b-a)(a+b) = (b-a)c$，方括號內的式子等於 $c\,q(x_n)$，所以

$$x_{n+4} = x_n \iff (a^2 + b^2 - 2)\,(a+b)\,q(x_n) = 0.$$

必要性。假設週期為 4。數列不是常數數列，所以 x_0 不是不動點，$q(x_0) \neq 0$。若 $a + b = 0$，則由第 (i) 部分的逆命題得 $x_2 = x_0$，而且實際上對所有 n 都有 $x_{n+2} = x_n$，與週

期 4 矛盾。所以 $a+b\neq 0$，於是取 $n=0$ 時的因式分解迫使

$$a^2+b^2=2.$$

充分性。假設 $a^2+b^2=2$。那麼 $A+B=0$，所以對每個 n 都有 $x_{n+4}=x_n$。我們必須驗證沒有更小的 m 能成立。

- $a+b\neq 0$：否則 $a^2=b^2=1$，並如第 (i) 部分所述，$x_1+b=0$，而這是被排除的。
- 沒有實數不動點：q 的判別式（discriminant）是 $(b-a)^2-4=(a^2+b^2)-2ab-4=-2(1+ab)$，而 $|ab|\leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)=1$，且只有當 $(a,b)=\pm(1,-1)$ 時才有 $ab=-1$，這情況我們剛剛已經排除。所以 $ab>-1$，判別式為負，對每個實數 x_n 都有 $q(x_n)\neq 0$。因此 $m=1$ 不成立。
- $m=2$：由第 (i) 部分，$x_2=x_0$ 需要 $(a+b)q(x_0)=0$，但這是錯的。所以 $m=2$ 不成立。
- $m=3$：若對所有 n 都有 $x_{n+3}=x_n$，則對所有 n 都有 $x_{n+1}=x_{(n+1)+3}=x_{n+4}=x_n$，得出週期 1，而這我們剛剛已經排除。

因此，對實數 a、b 及 x_0（分母均不為零，如題目所容許），數列的週期為 4 當且僅當

$$\boxed{a^2+b^2=2.}$$

起始值 x_0 在這個條件中不起任何作用。

驗算

取 $a=\sqrt{2}$、$b=0$ 及 $x_0=1$。數列依次為

$$1,\quad \sqrt{2}-1,\quad -1,\quad \sqrt{2}+1,\quad 1,\ \ldots$$

其週期恰好為 4。例如 $f(-1)=(-\sqrt{2}-1)/(-1)=\sqrt{2}+1$。電腦驗算以數以千計的隨機有理數 a、b、x_0 確認了兩步及四步公式完全正確。它亦對圓 $a^2+b^2=2$ 上約二千個隨機點確認了週期為 4，而對不在該圓上的隨機 (a,b)，則發現四步之後都沒有回到起點。

常見錯誤

- 由 $(a+b)q(x_0)=0$ 推出 $a+b=0$，卻沒有解釋為甚麼 $q(x_0)\neq 0$。不動點的詮釋正是箇中原因。
- 給出 $a^2+b^2=2$ 作為週期 4 的答案，卻沒有驗證週期其實不是 1 或 2。

- 在第 (ii) 部分的方括號中遺漏了因式 $a+b$，以致週期 2 的情況 $a+b=0$ 被錯誤地看成給出週期 4。

STEP 之外

形如 $x \mapsto \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ 的映射是一個莫比烏斯變換（Möbius transformation）。複合兩個這樣的映射，相當於把它們對應的 2×2 矩陣相乘，在這裏該矩陣為 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$。映射的週期為 k 當且僅當矩陣的 k 次冪是單位矩陣（identity matrix）的倍數，而這由比值 $(\text{跡})^2/\det = (a+b)^2/(ab+1)$ 決定。週期 4 對應於值 2，其實是一個喬裝了的「旋轉 $\pi/4$」。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）有精彩的一章講述莫比烏斯變換，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）則涵蓋了其背後的特徵值（eigenvalue）概念。

詳細解答

STEP II 2017，第 3 題

純數學 • 曲線描繪

> **STEP II 2017，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q3

關鍵思路

方程 $\sin y = k$ 從來不會只有一個解：若 y_0 是一個解，則 $\pi - y_0$ 也是，而與這兩者相差 2π 的任何值亦是。因此這裏每一幅草圖，都是同一條基本曲線的幾個複本，按正弦函數的對稱性（symmetry）擺放而成。第 (i) 部分用直線展示這個規律；在 (ii) 中，微積分確定了基本部分 $y = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$ 的形狀，其餘的交由對稱性完成。第 (iii) 部分則是把 $\cos y$ 寫成正弦之後，再做一次 (ii)。

解答

第 (i) 部分

$\sin y = \sin x$ 成立，當且僅當

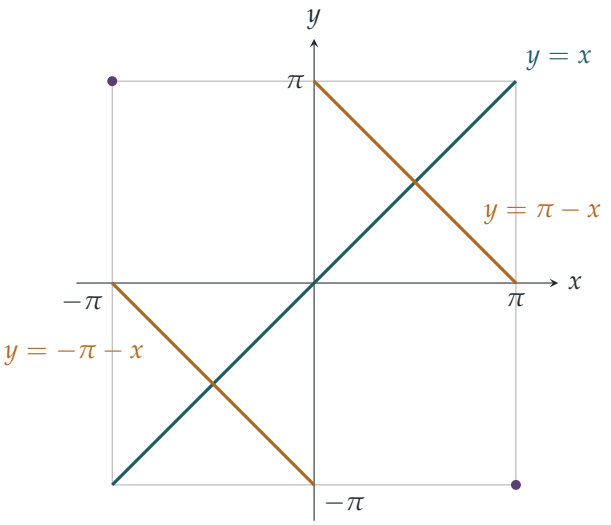
$$y = x + 2k\pi \qquad 或 \qquad y = \pi - x + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

現在看看這些直線中哪些與正方形 $-\pi \le x, y \le \pi$ 相交。

- $y = x$ 貫穿整條對角線，由 $(-\pi, -\pi)$ 至 (π, π)。
- $y = x \pm 2\pi$ 要求 $y - x = \pm 2\pi$。在正方形內，$|y - x| \le 2\pi$，且等號只在角點成立，所以這兩條直線只給出兩個孤立點 $(-\pi, \pi)$ 和 $(\pi, -\pi)$。
- $x + y = \pi$ 是由 $(0, \pi)$ 至 $(\pi, 0)$ 的線段，而 $x + y = -\pi$（即 $k = -1$ 的情況）是由 $(-\pi, 0)$ 至 $(0, -\pi)$ 的線段。
- $x + y = 3\pi$ 或 -3π 都不可能，因為 $|x + y| \le 2\pi$。

所以這個集合由對角線 $y = x$、$x + y = \pm\pi$ 的兩條線段，以及兩個角點 $(-\pi, \pi)$ 和

$(\pi, -\pi)$ 組成。



孤立的角點很容易被遺漏。它們確實是解，因為 $\sin(\pm\pi) = 0$。

第 (ii) 部分

對 $\sin y = \frac{1}{2}\sin x$ 進行隱函數微分（implicit differentiation），得 $y' \cos y = \frac{1}{2}\cos x$。當 $0 \le y \le \frac{1}{2}\pi$ 時，$\cos y \ge 0$，所以

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x},$$

它永遠不為零。因此

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}.$$

設 $s = \sin x$。利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{4 - s^2} = \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}$，由商法則（quotient rule）得

$$y'' = \frac{-\sin x\sqrt{4 - s^2} - \cos x \cdot \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}}{4 - s^2} = \frac{-s(4 - s^2) + s\cos^2 x}{(4 - s^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{s\left(-4 + s^2 + 1 - s^2\right)}{(4 - s^2)^{3/2}} = -\frac{3\sin x}{(4 - \sin^2 x)^{3/2}},$$

其中用了 $\cos^2 x = 1 - s^2$。這就是所求的結果。

基本部分。在這個四分之一正方形內，曲線是 $y = f(x)$，其中 $f(x) = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$。它由 $(0, 0)$ 出發，終於 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$，因為 $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$，所以它從不接近上邊 $y = \frac{1}{2}\pi$。它在原點的斜率是 $\frac{1}{2}$，到 $x = \frac{1}{2}\pi$ 時降至 0。此外，當 $0 < x \le \frac{1}{2}\pi$ 時 $y'' < 0$，而在

$x = 0$ 時 $y'' = 0$，所以曲線是上凸（concave）且遞增的，並在原點有一個拐點（point of inflection）。

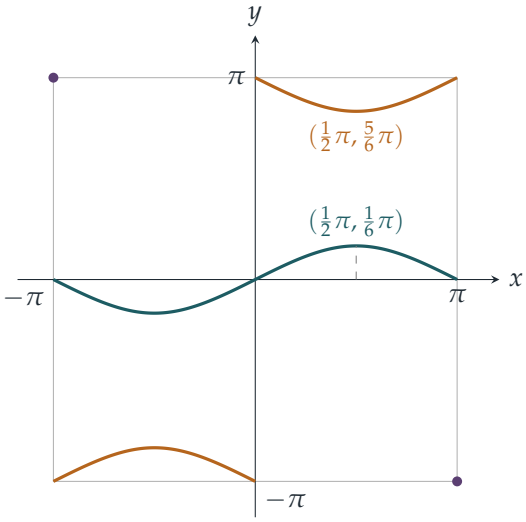
想一想 不再做任何微積分，怎樣由這一小段弧得出整個正方形內的圖像？

我們利用對稱性。由於 $\sin(\pi - x) = \sin x$，而且 f 是奇函數（odd function），$y = f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的圖像關於 $x = \frac{1}{2}\pi$ 對稱，並且關於原點有旋轉對稱（rotational symmetry）。它是一條平緩的波，經過 $(-\pi, 0)$、$(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$，最大點為 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$，最小點為 $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$。它在原點的斜率是 $\frac{1}{2}$，在 $x = \pm\pi$ 的斜率是 $-\frac{1}{2}$。

與 (i) 一樣，完整的解集由 $y = f(x) + 2k\pi$ 或 $y = \pi - f(x) + 2k\pi$ 給出。在正方形內剩下：

- 對所有 $-\pi \le x \le \pi$ 的波 $y = f(x)$；
- $y = \pi - f(x)$，它只在 $f(x) \ge 0$ 之處，即 $0 \le x \le \pi$ 時，位於正方形內。這是一條由 $(0, \pi)$ 垂到 (π, π) 的拱形，最低點為 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$；
- $y = -\pi - f(x)$，它只在 $f(x) \le 0$ 之處，即 $-\pi \le x \le 0$ 時，位於正方形內。這是一條由 $(-\pi, -\pi)$ 拱起至 $(0, -\pi)$ 的拱形，最高點為 $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{5}{6}\pi)$；
- 孤立的角點 $(-\pi, \pi)$ 和 $(\pi, -\pi)$，分別來自 $x = -\pi$ 時的 $y = \pi - f(x)$ 和 $x = \pi$ 時的 $y = -\pi - f(x)$。

k 的其他值都給出 $|y| > \pi$。拱形以斜率 $\pm\frac{1}{2}$ 與直線 $y = \pm\pi$ 相交，它們是那條波旋轉半周後再向上或向下平移所得。與 (i) 比較：對角線被壓平成波，兩條線段則彎成了拱形。



第 (iii) 部分

想一想 怎樣把 $\cos y$ 變成我們已經畫過的東西？

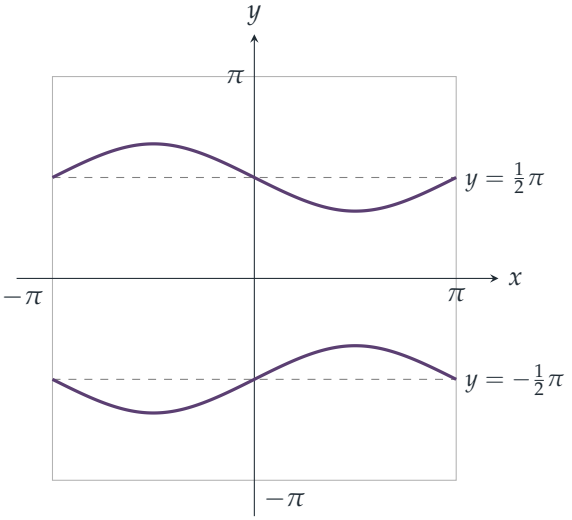
寫 $\cos y = \sin(\frac{1}{2}\pi - y)$。於是 $\cos y = \frac{1}{2}\sin x$ 表示 $u = \frac{1}{2}\pi - y$ 滿足 $\sin u = \frac{1}{2}\sin x$，所以 $u = f(x) + 2k\pi$ 或 $u = \pi - f(x) + 2k\pi$。即是

$$y = \tfrac{1}{2}\pi - f(x) - 2k\pi \qquad 或 \qquad y = f(x) - \tfrac{1}{2}\pi - 2k\pi.$$

由於 $|f(x)| \le \frac{1}{6}\pi$，只有 $k = 0$ 給出在 $[-\pi, \pi]$ 內的值，而且對每一個 x 都如此。所以這個集合恰好由兩條完整的波組成：

- $y = f(x) - \frac{1}{2}\pi$：把 (ii) 的波向下平移 $\frac{1}{2}\pi$，在 $-\frac{2}{3}\pi$ 與 $-\frac{1}{3}\pi$ 之間振盪；
- $y = \frac{1}{2}\pi - f(x)$：它在 x 軸中的鏡像（這是必然的，因為 $\cos y$ 是 y 的偶函數）。它的最小點為 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$，最大點為 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi)$。

這次沒有孤立點。



驗算

- 取樣點：$(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ 給出 $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\pi$，而 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ 亦成立。在 (iii) 中，$(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ 給出 $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$。
- 在 $x = 0$，公式給出 $y' = \frac{1}{2}$，與小角近似（small-angle approximation）$y \approx \frac{1}{2}x$ 吻合。在 $x = \frac{1}{2}\pi$，公式給出 $y' = 0$，在最大點理應如此。

- 我們用電腦以有限差分（finite differences）在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 內的隨機點驗證了 y' 和 y'' 的公式。電腦亦對許多隨機的 x 求出所有解 $y \in [-\pi, \pi]$，結果與上述各分支（branches）相符：在 (ii) 中當 $x \neq 0, \pm\pi$ 時有兩個解，在 (iii) 中則總是有兩個解。

常見錯誤

- 在 (i) 和 (ii) 中遺漏角點 $(-\pi, \pi)$ 和 $(\pi, -\pi)$。
- 在 (ii) 中把拱形畫滿整個 $[-\pi, \pi]$：一旦 $f(x) < 0$，$y = \pi - f(x)$ 便離開正方形。
- 取 $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x}$：符號已由 $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$ 確定。

STEP 之外

形如 $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ 的集合稱為水平集（level set）。隱函數定理（implicit function theorem）指出，凡 $\partial F/\partial y \neq 0$ 之處，它在局部都是一個光滑的函數圖像。在這裏，這條件恰好在 $\cos y = 0$ 之處失效；而由於當 $|\sin y| \leq \frac{1}{2}$ 時這永遠不會發生，(ii) 中的曲線都是關於 x 的光滑圖像。在 (i) 中，交叉點正是 $\sin y - \sin x$ 的兩個偏導數（partial derivatives）同時為零之處，而水平集亦正是在這些點上不再是一條曲線。Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）建立了單變量的基礎；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）則是一本生動的輔助讀物。

詳細解答

STEP II 2017，第 4 題

純數學 • 柯西–施瓦茲積分不等式

> **STEP II 2017，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q4

關鍵思路

施瓦茨不等式（Schwarz inequality）以平方的積分 $\int f^2$ 和 $\int g^2$ 為乘積的積分 $\int fg$ 提供一個上界（upper bound）。因此，整個技巧在於選取 f 和 g，使得每一個積分都能算出來，唯一可能例外的就是我們想估計的那一個。如果想估計的積分是 $\int fg$，我們得到的是上界；如果它是 $\int f^2$ 或 $\int g^2$，兩邊相除後得到的便是下界（lower bound）。

解答

以下一律把 $(*)$ 寫成 $\left(\int fg\right)^2 \le \int f^2 \cdot \int g^2$。

第 (i) 部分

目標式中含有 e^t，所以取 $f(x) = 1$、$g(x) = \mathrm{e}^x$、$a = 0$ 及 $b = t$。於是

$$\int_0^t \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t - 1, \qquad \int_0^t 1 \,\mathrm{d}x = t, \qquad \int_0^t \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t} - 1),$$

因此 $(*)$ 給出

$$(\mathrm{e}^t - 1)^2 \le \frac{t}{2}(\mathrm{e}^{2t} - 1) = \frac{t}{2}(\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^t + 1).$$

由於 $t > 0$，有 $\mathrm{e}^t - 1 > 0$，而且 $\mathrm{e}^t + 1 > 0$。除以正數 $(\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^t + 1)$ 不會改變不等號的方向：

$$\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1} \le \frac{t}{2},$$

得證。

第 (ii) 部分

我們希望 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$ 以 $\int g^2$ 的形式出現，所以在 $[0,1]$ 上取 $g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$ 及 $f(x)=x$。乘積 $x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$ 正是我們能夠積分的那一類（指數外面的 x 冪，在相差一個常數的意義下，正是指數的導數）：

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\right]_0^1=2\bigl(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\bigr),\qquad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

因此 $(*)$ 給出

$$4\bigl(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\bigr)^2\le\frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x,$$

兩邊乘以 3，得

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x\ge 12\bigl(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\bigr)^2.$$

第 (iii) 部分

記 $J=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$。這裏所有積分都在 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上進行，該區間內 $\sin x\ge 0$ 且 $\cos x\ge 0$，所以所有根式都是實數。

上界。這裏 J 應當是 $\int fg$。取 $f(x)=1$ 及 $g(x)=\sqrt{\sin x}$，使得 $g^2=\sin x$ 容易積分：

$$J^2\le\int_0^{\frac{1}{2}\pi}1\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot 1.$$

由於 $J>0$，取正平方根得 $J\le\sqrt{\pi/2}$。

下界。現在 J 必須是其中一個平方的積分，所以取 $f(x)=(\sin x)^{1/4}$，使得 $f^2=\sqrt{\sin x}$。

> **想一想** 哪一個 g 能使 $\int fg$ 和 $\int g^2$ 都可以算出來？

我們需要 g^2 容易積分，同時 $(\sin x)^{1/4}g(x)$ 也容易積分。選取 $g(x)=\cos x$ 兩者兼顧：$(\sin x)^{1/4}\cos x$ 是 $\sin x$ 的冪乘以它的導數。答案的形式也是一條線索：分母中的 π 暗示 $\int g^2=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$。事實上

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{1/4}\cos x\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{4}{5}(\sin x)^{5/4}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{4}{5}$$

以及

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

因此 $(*)$ 給出

$$\frac{16}{25}\le J\cdot\frac{\pi}{4},\qquad \text{即}\qquad J\ge\frac{64}{25\pi}.$$

把兩部分合起來，

$$\frac{64}{25\pi} \le \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

附註。其他選取方法也行得通，有些效果更好。取 $f = (\sin x)^{1/4}$、$g = (\sin x)^{3/4}$，得 $1 \le J\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$；再以 $f = \sin x$、$g = \sqrt{\sin x}$ 第二次應用 $(*)$，可證 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\pi/4}$。兩者結合，得到更精確的下界 $J \ge 2/\sqrt{\pi} \approx 1.128$。

驗算

- (i)：當 $t \to 0$ 時，左邊是 $\tanh(t/2) \approx t/2$，所以對於細小的 t，這個界是緊的。當 t 很大時，左邊趨於 1，而 $t/2$ 則無限增大。
- (ii)：$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0.8556$，而 $12(1-\mathrm{e}^{-1/4})^2 \approx 0.5871$。
- (iii)：數值上 $J \approx 1.1981$，介乎 $64/(25\pi) \approx 0.8149$ 與 $\sqrt{\pi/2} \approx 1.2533$ 之間。上界相當接近，因為 $\sqrt{\sin x}$ 在區間的大部分範圍內都頗為平坦（接近 1），而取 $f = 1$ 時，施瓦茨不等式取等號當且僅當 g 是常數。

常見錯誤

- 弄錯界的方向。若未知積分是 $\int fg$，施瓦茨不等式只能給出它的上界，所以要得到下界，未知積分必須是 $\int f^2$ 或 $\int g^2$。
- 在 (i) 中除以 $\mathrm{e}^t - 1$ 時沒有說明它是正數。
- 在 (iii) 的上界中，忘記利用 $J > 0$ 取正平方根。

STEP 之外

施瓦茨（柯西－施瓦茨，Cauchy–Schwarz）不等式指出，內積（inner product）$\langle f, g\rangle = \int fg$ 滿足 $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$，且等號成立當且僅當 f 與 g 成比例。它在每一個內積空間（inner product space）中都成立，由 $\mathbb{R}^n$ 中的向量到函數空間皆然；正是它使「兩個函數之間的夾角」這個概念有意義。這個想法是傅里葉級數（Fourier series）和最小二乘逼近（least-squares approximation）的基礎。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）闡述了內積與正交性（orthogonality），而 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）則展示了如何運用這類不等式來控制積分。

詳細解答

STEP II 2017，第 5 題

純數學 • 拋物線的法線與圓

STEP II 2017，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s2-q5

關鍵思路

一切都建基於拋物線（parabola）$x = at^2, y = 2at$ 的一個事實：連接參數（parameter）為 t_1 和 t_2 兩點的弦（chord），其斜率（gradient）為 $\dfrac{2}{t_1 + t_2}$。有了這個事實，「法線與曲線再次相交」和「半圓上的圓周角是直角」都變成參數之間的簡單方程，幾何問題便化為簡短的代數運算。

解答

一個有用的事實：弦的斜率

對於相異參數 $t_1 \neq t_2$，連接 $(at_1^2, 2at_1)$ 與 $(at_2^2, 2at_2)$ 的弦的斜率為

$$\frac{2a(t_1 - t_2)}{a(t_1^2 - t_2^2)} = \frac{2}{t_1 + t_2},$$

這裏約去了 $t_1 - t_2 \neq 0$。（若 $t_1 + t_2 = 0$，則該弦是鉛垂的。）令 $t_2 \to t_1$，可知在 t 處的切線（tangent）斜率為 $\frac{1}{t}$；直接計算亦得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$。

第 (i) 部分

在 P 處切線斜率為 $\frac{1}{p}$，故法線（normal）斜率為 $-p$（這裏用到 $p \neq 0$）。點 N（其中 $n \neq p$）在這條法線上，當且僅當弦 PN 的斜率為 $-p$：

$$\frac{2}{p+n} = -p \iff p + n = -\frac{2}{p} \iff n = -\left(p + \frac{2}{p}\right).$$

（弦 PN 不可能是鉛垂的，因為 P 處的法線斜率 $-p$ 是有限的。）注意 $n \neq p$，因為 $n-p=-2\left(p+\frac{1}{p}\right)$，而對實數 p 而言 $p+\frac{1}{p}\neq 0$，所以這的確是另一個點。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

利用 $p+n=-\frac{2}{p}$ 及 $p-n=2p+\frac{2}{p}=\dfrac{2(p^2+1)}{p}$，

$$\begin{aligned}|PN|^2 &= a^2(p^2-n^2)^2+4a^2(p-n)^2\\ &= a^2(p-n)^2\left[(p+n)^2+4\right]\\ &= a^2\cdot\frac{4(p^2+1)^2}{p^2}\cdot\left(\frac{4}{p^2}+4\right)=a^2\cdot\frac{4(p^2+1)^2}{p^2}\cdot\frac{4(p^2+1)}{p^2}\\ &= 16a^2\,\frac{(p^2+1)^3}{p^4},\end{aligned}$$

正如所求。

為求最小值，設 $u=p^2>0$ 及 $f(u)=\dfrac{(u+1)^3}{u^2}$。由商法則（quotient rule），

$$f'(u)=\frac{3(u+1)^2u^2-2u(u+1)^3}{u^4}=\frac{(u+1)^2(3u-2u-2)}{u^3}=\frac{(u+1)^2(u-2)}{u^3}.$$

當 $u>0$ 時，因子 $\frac{(u+1)^2}{u^3}$ 為正，所以當 $0<u<2$ 時 $f'(u)<0$，當 $u>2$ 時 $f'(u)>0$。因此 f 先遞減後遞增，其在 $u>0$ 上的最小值出現在 $u=2$，即 $p^2=2$。由於 $|PN|^2=16a^2f(p^2)$，這亦使 $|PN|$ 取得最小值。（最小值為 $|PN|^2=16a^2\cdot\frac{27}{4}=108a^2$，故 $|PN|=6\sqrt{3}\,a$。）

第 (iii) 部分

由於 PN 是直徑（diameter），而 Q 是圓上異於 P 和 N 的點，所以角 PQN 是直角（半圓上的圓周角（angle in a semicircle））。因此 $QP\perp QN$。

想一想 QP 或 QN 會否是鉛垂的，以致我們不能把斜率相乘？

若 QP 是鉛垂的，則 QN 是水平的，於是 Q 和 N 的 y 坐標相同，得 $q=n$，但由於 $Q\neq N$，這是不可能的。同理，若 QN 是鉛垂的，則 QP 必為水平，得 $q=p$。所以兩個斜率都是有限且非零的，而它們的乘積為 -1：

$$\frac{2}{q+p}\cdot\frac{2}{q+n}=-1\iff(q+p)(q+n)=-4.$$

展開，並利用第 (i) 部分的 $p+n=-\frac{2}{p}$ 及 $pn=-p^2-2$，

$$q^2+(p+n)q+pn=q^2-\frac{2q}{p}-p^2-2=-4,$$

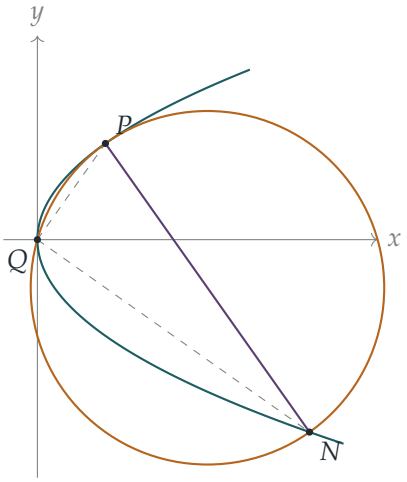
整理後得

$$2 = p^2 - q^2 + \frac{2q}{p},$$

正如所求。

推論。代入 $q = 0$：關係式變成 $2 = p^2$。反之，若 $p^2 = 2$，關係式給出 $q^2 - \frac{2q}{p} = 0$，即 $q = 0$ 或 $q = \frac{2}{p}$；但 $\frac{2}{p} = \frac{p^2}{p} = p$，這就是點 P 本身，所以 Q 必有 $q = 0$。因此 Q 位於原點當且僅當 $p^2 = 2$，而由第 (ii) 部分，這恰好就是 $|PN|$ 取最小值的情況。

一般而言，該關係式是一條二次方程 $q^2 - \frac{2}{p}q + (2 - p^2) = 0$，其兩根之和為 $\frac{2}{p}$；其中一根必定是 $q = p$，所以另一根為 $q = \dfrac{2 - p^2}{p}$，它為零當且僅當 $p^2 = 2$。



上圖顯示取最小值的情況 $a = 1$, $p = \sqrt{2}$：法線 PN（梅紫色）、以 PN 為直徑的圓（琥珀色），以及在 $Q = O$ 處的直角。

驗算

- 取 $a = 1$, $p = 1$：$n = -3$，所以 $P = (1, 2)$ 及 $N = (9, -6)$。於是 $|PN|^2 = 64 + 64 = 128$，而公式給出 $16 \cdot 8/1 = 128$。
- 取 $p = \sqrt{2}$, $a = 1$：$P = (2, 2\sqrt{2})$，$N = (8, -4\sqrt{2})$，且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{ON} = 16 - 16 = 0$，所以原點確實在以 PN 為直徑的圓上。此時 $|PN| = 6\sqrt{3} \approx 10.392$。
- 對多個 p 值以數值方法找出圓與拋物線的交點，除 P 外，所得的參數恰好就是 n 和 $\frac{2-p^2}{p}$。

常見錯誤

- 忘記 $q = p$ 亦滿足最後的關係式，因而錯誤地斷定當 $p^2 = 2$ 時 Q 有兩個可能位置。
- 把法線斜率寫成 $-\frac{1}{p}$：切線斜率是 $\frac{1}{p}$，所以法線斜率是 $-p$。

STEP 之外

一個圓與一條拋物線一般相交於四點；把 $x = at^2, y = 2at$ 代入圓的方程，會得到一條關於 t 且沒有 t^3 項的四次方程（quartic），所以四個參數之和為零。這裏 $n + q = -\frac{2}{p} - p + \frac{2}{p} = -p$，所以第四個參數又是 p：圓在 P 處與拋物線相切。這是必然的，因為圓在該處的半徑正沿着法線方向。像這樣按重數（multiplicity）計算交點數目，正是代數幾何（algebraic geometry）的起點（貝祖定理（Bézout's theorem））。如想做更多這類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）。

詳細解答

STEP II 2017，第 6 題

純數學 • 不等式與數學歸納法

STEP II 2017，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s2-q6

關鍵思路

兩部分都是把和 S_n 與 $2\sqrt{n}$ 比較，而 $2\sqrt{n}$ 大約等於 $\int_0^n x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$。在第 (i) 部分的歸納法（induction）中，由 n 推到 $n+1$ 的一步，歸結為比較 $1/\sqrt{n+1}$ 與 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，而把這個差有理化（rationalising）便可解決。在第 (ii) 部分，最小的 C 就是右方（不計 C）與 S_n 之間差距的最大值。因此我們研究這個差距由 n 到 $n+1$ 如何變化，而題目給出的不等式（inequality）正好告訴我們這個差距總是在縮小。

解答

第 (i) 部分

設 $P(n)$ 為命題 $S_n \le 2\sqrt{n}-1$。

基本情況。$S_1 = 1$ 而 $2\sqrt{1}-1=1$，所以 $P(1)$ 成立（等號成立）。

歸納步驟。假設對某個 $k \ge 1$，$P(k)$ 成立。那麼

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

所以只需證明

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k+1}, \qquad \text{即是} \qquad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right).$$

有理化後，

$$2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \ge \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

因為 $\sqrt{k} \le \sqrt{k+1}$ 使分母不大於 $2\sqrt{k+1}$。因此 $S_{k+1} \le 2\sqrt{k+1} - 1$，這正是 $P(k+1)$。由於 $P(1)$ 為真，而且對每個 $k \ge 1$ 都有 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$，所以對所有正整數 n，$S_n \le 2\sqrt{n} - 1$。

第 (ii) 部分：不等式

當 $k \ge 0$ 時，$(4k+1)\sqrt{k+1} > (4k+3)\sqrt{k}$ 的兩邊都是非負的，而且左方是正數，所以這個不等式等價於兩邊平方後的不等式。現在

$$\begin{aligned}(4k+1)^2(k+1) - (4k+3)^2 k &= (16k^2+8k+1)(k+1) - (16k^2+24k+9)k \\ &= (16k^3+24k^2+9k+1) - (16k^3+24k^2+9k) \\ &= 1 > 0.\end{aligned}$$

所以 $(4k+1)^2(k+1) > (4k+3)^2 k$，取正平方根便得對所有 $k \ge 0$，$(4k+1)\sqrt{k+1} > (4k+3)\sqrt{k}$，得證。

第 (ii) 部分：最小的 C

定義

$$T_n = 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - S_n.$$

不等式 $S_n \ge 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - C$ 與 $C \ge T_n$ 相同。所以它對每個 n 都成立，當且僅當 C 不小於每一個 T_n；而最小的這樣的 C 就是 T_n 的最大值（如果存在的話）。

? **想一想** 在不知道 S_n 的公式的情況下，怎樣找出最大的 T_n？

我們考慮變化量 $T_{n+1} - T_n$，在其中 S_n 會消去。由於 $S_{n+1} - S_n = 1/\sqrt{n+1}$，

$$\begin{aligned}T_{n+1} - T_n &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

兩邊乘以正數 $2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$：

$$\begin{aligned}2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(T_{n+1} - T_n\right) &= 4(n+1)\sqrt{n} - 4n\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \\ &= (4n+3)\sqrt{n} - (4n+1)\sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

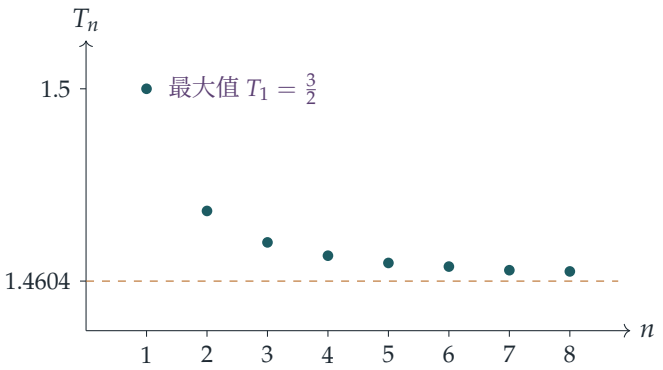
根據剛才證明的不等式（取 $k = n$），這是負數。因此對每個 $n \ge 1$ 都有 $T_{n+1} < T_n$：數列（sequence）T_n 嚴格遞減（strictly decreasing），其最大值就是第一項，

$$T_1 = 2 + \tfrac{1}{2} - 1 = \tfrac{3}{2}.$$

所以對所有 $n \geq 1$，$S_n \geq 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{3}{2}$。任何更小的 C 都不行，因為在 $n = 1$ 時不等式變成 $1 \geq \frac{5}{2} - C$，這要求 $C \geq \frac{3}{2}$。所求的最小數是

$$C = \tfrac{3}{2}.$$

T_n 的首幾個值顯示它穩定下來的速度有多快：



（縱軸經過拉伸：它的範圍大約由 1.45 至 1.51。）

驗算

- 當 $n = 4$：$S_4 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \approx 2.7845$，它介乎 $2\sqrt{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = 2.75$ 與 $2\sqrt{4} - 1 = 3$ 之間，符合兩個結果的要求。
- 用電腦檢查首 200 000 個值，確認了兩個界都成立，而且 T_n 遞減；T_n 由 1.5 下降，趨向大約 1.46035，並且永不回到 1.5。
- 恆等式 $(4k+1)^2(k+1) - (4k+3)^2 k = 1$ 很容易在 $k = 1$ 時驗證：$25 \cdot 2 - 49 = 1$。

常見錯誤

- 以 T_n 的極限（大約 1.46）作答，而不是它的最大值。小於 $\frac{3}{2}$ 的 C 在 $n = 1$ 時不成立。
- 把不等式平方之前，沒有先指出兩邊都是非負的。
- 忘記證明 $C = \frac{3}{2}$ 確實是最小的，即沒有指出等號成立的情況。

STEP 之外

數列 T_n 遞減至一個極限，而這個極限是 $-\zeta(\frac{1}{2}) \approx 1.46035$，其中 ζ 是黎曼 zeta 函數（Riemann zeta function），並已延拓至其定義級數收斂的區域以外。把和與積分比較，

再以像 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 這樣的項作修正，正是歐拉－麥克勞林公式（Euler–Maclaurin formula）的起點。背後的基本事實——有界的單調數列必定收斂——就是大學一年級分析課中的單調收斂定理（monotone convergence theorem）；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對此有仔細的論述。

詳細解答

STEP II 2017，第 7 題

純數學 • 對數微分法

STEP II 2017，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s2-q7

關鍵思路

這裏每一個冪都是透過對數（logarithm）來定義的，即 $a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$，所以比較 x 的兩個冪，就等於比較它們的對數；由於 exp 是遞增（increasing）函數，兩種比較是等價的。唯一要留意的是 $\ln x$ 的正負號：當 $0 < x < 1$ 時它是負數，而除以負數會令不等式反向。取對數亦令求導數（derivative）變得直截了當。

解答

全文中，$\ln \mathrm{f}(x) = x\ln x$ 及 $\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x)\ln x$。

第 (i) 部分

設 $0 < x < 1$，則 $\ln x < 0$ 且 $x - 1 < 0$。於是

$$\ln \mathrm{f}(x) - \ln x = x\ln x - \ln x = (x-1)\ln x > 0,$$

因為這是兩個負數的乘積。由於 exp 是遞增的，所以 $\mathrm{f}(x) > x$。

此外 $x\ln x < 0$，所以 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x\ln x} < 1$。現在再比較對數：

$$\ln \mathrm{g}(x) - \ln x = \big(\mathrm{f}(x) - 1\big)\ln x > 0, \qquad \text{因為} \mathrm{f}(x) < 1 \text{ 且 } \ln x < 0,$$
$$\ln \mathrm{f}(x) - \ln \mathrm{g}(x) = \big(x - \mathrm{f}(x)\big)\ln x > 0, \qquad \text{因為} \mathrm{f}(x) > x \text{ 且 } \ln x < 0.$$

所以 $\ln x < \ln \mathrm{g}(x) < \ln \mathrm{f}(x)$，由此得出當 $0 < x < 1$ 時 $x < \mathrm{g}(x) < \mathrm{f}(x)$，正如所求。

當 $x > 1$ 時，同樣的差仍然適用，但此時 $\ln x > 0$、$x - 1 > 0$ 及 $x\ln x > 0$，所以 $\mathrm{f}(x) > 1$。於是由 $(x-1)\ln x > 0$ 得 $\mathrm{f}(x) > x$，而由 $(x - \mathrm{f}(x))\ln x < 0$ 得 $\mathrm{g}(x) > \mathrm{f}(x)$。

所以

$$x < \mathrm{f}(x) < \mathrm{g}(x) \qquad \text{當} x > 1,$$

而在 $x = 1$ 時三者皆等於 1。

第 (ii) 部分

對 $\ln \mathrm{f}(x) = x \ln x$ 求導，得 $\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x) = \ln x + 1$，所以

$$\mathrm{f}'(x) = x^x(\ln x + 1).$$

由於 $x^x > 0$，$\mathrm{f}'(x) = 0$ 當且僅當 $\ln x = -1$，即 $x = \mathrm{e}^{-1}$。（f′ 在該處由負變正，所以這是極小值（minimum），其值為 $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} \approx 0.692$。）

第 (iii) 部分

當 $x \to 0$ 時，$x \ln x \to 0$，而 exp 是連續（continuous）的，所以

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x \ln x} \to \mathrm{e}^0 = 1.$$

接着 $\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x) \ln x$，其中 $\mathrm{f}(x) \to 1$ 而 $\ln x \to -\infty$，所以 $\ln \mathrm{g}(x) \to -\infty$，因此

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{g}(x) = 0.$$

第 (iv) 部分

對 $x > 0$，設 $h(x) = x^{-1} + \ln x$。則

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2},$$

它在 $0 < x < 1$ 時為負，在 $x > 1$ 時為正。所以 h 先遞減後遞增，其最小值為 $h(1) = 1$。因此對所有 $x > 0$，$x^{-1} + \ln x \geq 1$。

現在用積法則（product rule）對 $\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x) \ln x$ 求導，並利用第 (ii) 部分：

$$\frac{\mathrm{g}'(x)}{\mathrm{g}(x)} = \mathrm{f}'(x) \ln x + \frac{\mathrm{f}(x)}{x} = x^x \left[(\ln x + 1) \ln x + \frac{1}{x} \right] = x^x \left[(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \right].$$

? **想一想** 剛證明的不等式怎樣幫助處理這個括號？

括號內正好包含 $\frac{1}{x} + \ln x$，而它至少是 1。所以

$$(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \;\geq\; (\ln x)^2 + 1 \;>\; 0.$$

由於 $\mathrm{g}(x) > 0$ 及 $x^x > 0$，我們得到

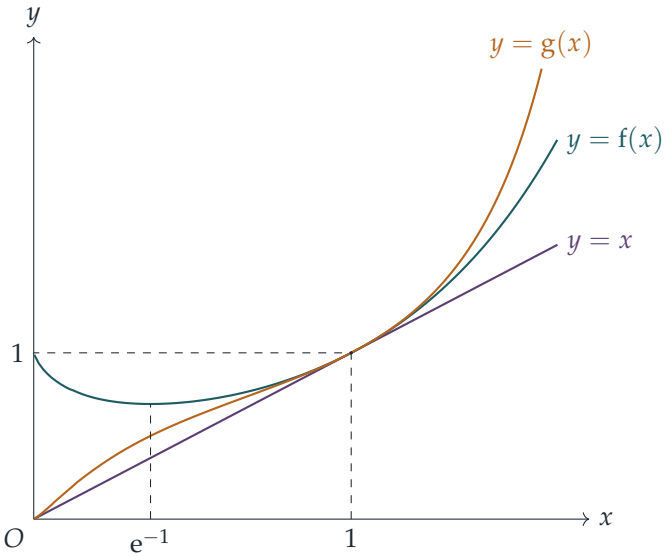
$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{g}(x)\, x^x \left[(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \right] > 0 \qquad \text{對所有} x > 0,$$

正如所求。

草圖

把各項事實匯集起來：

- 當 $x \to 0$ 時，$y = \mathrm{f}(x)$ 從 1 開始，下降至 $x = \mathrm{e}^{-1}$ 處的極小值 $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$，然後上升經過 $(1,1)$，並增長得非常快。在 0 附近它非常陡峭，因為 $\mathrm{f}'(x) = x^x(\ln x + 1) \to -\infty$。
- $y = \mathrm{g}(x)$ 從原點開始，並一直遞增（第 (iv) 部分），經過 $(1,1)$。
- 當 $0 < x < 1$ 時，次序為 $x < \mathrm{g} < \mathrm{f}$；當 $x > 1$ 時，次序為 $x < \mathrm{f} < \mathrm{g}$。所以 g 與 f 在 $(1,1)$ 相交，而三條曲線都在該處相遇。
- 在 $x = 1$：$\mathrm{f}'(1) = 1$ 及 $\mathrm{g}'(1) = 1 \cdot 1 \cdot (0 + 0 + 1) = 1$，所以兩條曲線都在 $(1,1)$ 與 $y = x$ 相切。
- 在原點附近 $\mathrm{g}(x)/x = \mathrm{e}^{(\mathrm{f}(x)-1)\ln x} \to 1$（因為 $\mathrm{f}(x) - 1 \approx x\ln x$，指數的表現類似 $x(\ln x)^2 \to 0$），所以 $y = \mathrm{g}(x)$ 沿着 $y = x$ 離開原點，並略高於它。



驗算

- 在 $x = \frac{1}{2}$：$\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ 及 $\mathrm{g} = (\frac{1}{2})^{0.707} \approx 0.613$，所以 $0.5 < 0.613 < 0.707$。在 $x = 2$：$\mathrm{f} = 4$ 及 $\mathrm{g} = 2^4 = 16$，所以 $2 < 4 < 16$。
- $\mathrm{f}(0.3) \approx 0.697$、$\mathrm{f}(\mathrm{e}^{-1}) \approx 0.6922$ 及 $\mathrm{f}(0.4) \approx 0.693$，與在 e^{-1} 處取極小值相符。
- g' 的公式給出 $\mathrm{g}'(\frac{1}{2}) \approx 0.774$，與 g 在該處的差商（difference quotient）吻合；電腦驗算亦確認了在 $(0,3)$ 上 $\mathrm{g}' > 0$。

常見錯誤

- 忘記在 $(0,1)$ 上 $\ln x < 0$，因而除以它時沒有把不等式反向；這正正是次序在 $x = 1$ 處對調的原因。
- 把 x^x 的導數寫成 $x \cdot x^{x-1}$（把指數（index）當作常數），或寫成 $x^x \ln x$（把底（base）當作常數）；兩部分都是需要的。
- 把 g 的極限（limit）寫成 $1^{-\infty}$ 然後靠猜；應改為處理 $\ln \mathrm{g} = \mathrm{f} \ln x$。

STEP 之外

冪塔 $x^{x^{x^{\cdots}}}$ 延續了這個規律：當 $0 < x < 1$ 時，奇數層的冪塔 x, g, … 與偶數層的冪塔 f, … 互相交錯；而無窮冪塔收斂（converges）當且僅當 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \le x \le \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$，這是關於單調數列（monotone sequences）和不動點（fixed points）的一道好練習。像 $x \ln x \to 0$ 這類極限，以及透過 exp 和 ln 嚴謹地定義 a^b，都會在大學第一個分析（analysis）課程中得到妥善處理；可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

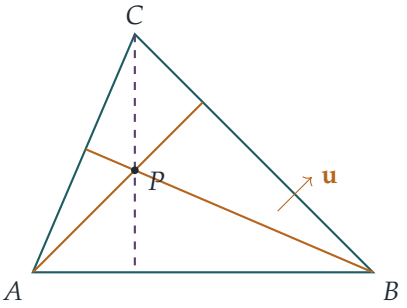
STEP II 2017，第 8 題

純數學 • 向量與垂心

> **STEP II 2017，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q8

關鍵思路

這是用向量證明三角形三條高（altitude）相交於同一點，即垂心（orthocentre）。要求兩條直線 $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$ 的交點，竅門是把方程與一個垂直於 $\mathbf{v}$ 的向量取純量積（scalar product）：這樣一下子就消去了 μ。這裏這樣的向量已經現成給了我們，因為 $\mathbf{v}$ 垂直於 CA，所以 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 正好合用。



解答

第一條高

通過 A 且垂直於 BC 的直線經過 $\mathbf{a}$，方向為 $\mathbf{u}$（我們身處平面之中，所以每個垂直於 BC 的向量都是 $\mathbf{u}$ 的倍數）。其方程為

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}.$$

同理，通過 B 且垂直於 CA 的直線是 $\mathbf{r}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$。

求 P

這兩條直線並不平行：若 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 平行，那麼在同一平面上分別垂直於它們的 BC 與 CA 便會平行，這對三角形來說是不可能的。因此兩線恰好相交於一點 P，在該點有

$$\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}.$$

把兩邊都與 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 取純量積。由於 $\mathbf{v}$ 垂直於 CA，$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$，於是 μ 消失：

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})+\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}),\qquad\text{所以}\qquad\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

> ? **想一想** 我們可以除以 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 嗎？

可以。若 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$，則 $\mathbf{u}$ 既垂直於 BC，亦垂直於 CA；在平面上，這迫使 CA 與 BC 平行，但它們並不平行。因此

$$\mathbf{p}=\mathbf{a}+\frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}\,\mathbf{u}.$$

CP 垂直於 AB

我們需要證明 $(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$。以 λ 記上面求得的係數，則

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

有用的觀察是：由於 $\mathbf{u}$ 垂直於 BC，$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$，所以

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})+\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

因此 $\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$，而

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=-(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})+(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0.$$

> ? **想一想** 純量積為零，真的能給出一條直線 CP 嗎？

只有在 $P\neq C$ 時才行，而這正是用到「非直角」這個條件的地方。若 $P=C$，則 C 位於通過 A 且垂直於 BC 的直線上，於是 $AC\perp BC$，C 處的角是直角，而這已被排除。所以 $\mathbf{p}-\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$；又因 $\mathbf{b}-\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$，純量積為零正好表示 CP 垂直於 AB。因此三角形的三條高都通過 P。

驗算

取 $A=(0,0)$、$B=(5,0)$、$C=(1.5,3.5)$ 及 $\mathbf{u}=(1,1)$，它垂直於 $\mathbf{c}-\mathbf{b}=(-3.5,3.5)$。於是 $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=7.5$，$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=5$，所以 $\lambda=1.5$，$P=(1.5,1.5)$。這一點位

於 C 的正下方，所以 CP 是鉛垂的，垂直於 AB；而 $(\mathbf{p}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = (-3.5)(1.5)+(1.5)(3.5) = 0$，所以 P 亦在由 B 出發的高上。一般結果亦已用電腦在大量隨機三角形上驗證過。另請留意，若把 $\mathbf{u}$ 換成 $k\mathbf{u}$，$\mathbf{p}$ 的公式不變，這是理所當然的。

常見錯誤

- 與 $\mathbf{v}$ 或 $\mathbf{u}$ 而非與 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 作點積：這樣方程中兩個參數都會留下。
- 除以 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 時沒有說明它為何不等於零。
- 漏掉 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 這一步，而最後能夠相消，靠的正是這一步。

STEP 之外

任何三角形的垂心 H、形心(centroid)G 與外心(circumcentre)O 都位於同一直線上，即歐拉線(Euler line)，且 $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$；若以 O 為原點，這就是簡潔的命題 $\mathbf{h} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$，你可以用同樣的純量積思路來證明它。這類純量積正是大學線性代數（linear algebra）入門課程中所研究的內積空間（inner-product space）的起點；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是看它們如何發展下去的好地方。

詳細解答

STEP II 2017，第 9 題

力學 • 摩擦力與剛體

STEP II 2017，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s2-q9

關鍵思路

每個圓柱都是剛體（rigid body），而且只在兩處受力：木板和地面。因此第一步自然是對圓柱的中心取力矩（moments）：兩個法向反作用力（normal reaction）都通過中心，剩下的只有兩個摩擦力（friction），而它們必須相等。之後只需分別對圓柱和木板分解力（resolving），再代入接觸點的摩擦定律 $G \leq \frac{1}{2}R$ 和 $F \leq \frac{1}{2}N$。最後才用幾何關係把 θ 與 a 和 r 聯繫起來。

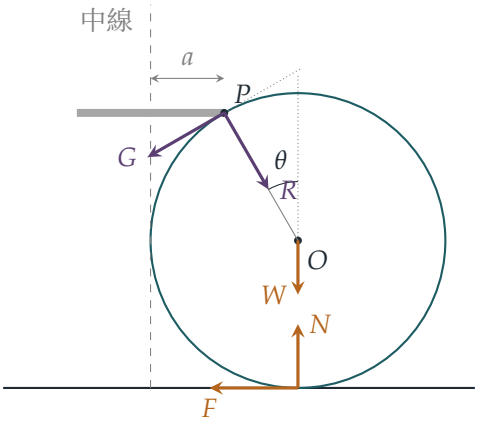
解答

模型與設定。 把橫截面看作兩個半徑為 r 的圓盤和一根水平桿，所有接觸點都是粗糙的。兩個圓柱之間的距離可忽略，所以它們的中心分別位於對稱鉛垂線兩側、水平距離為 r 之處。木板寬度為 $2a < 2r$，所以它以兩條長邊擱在兩個圓柱內側的上部。由對稱性，我們只需考慮右邊的圓柱。

設 P 為木板與該圓柱的接觸點。P 處的切線（tangent）與水平的木板成 θ 角，所以通往 P 的半徑與鉛垂線成 θ 角。作用在圓柱上的力為：

- 其重量 W，作用於中心 O；
- 在地面處，向上的法向反作用力 N 和摩擦力 F（指向中線，因為木板把圓柱向外推）；
- 在 P 處，沿 PO 方向的法向反作用力 R，以及沿切線方向、指向下方和內側的摩擦力 G。

根據牛頓第三定律（Newton's third law），木板受到沿 OP 方向的 R（向上、背離中線），以及沿切線方向、指向上方和外側的 G。



通過 P 的虛線是切線。在水平方向上，P 比中心 O 更靠內 $r\sin\theta$，而 O 與中線的距離為 r。

第 (i) 部分

對圓柱取關於 O 的力矩。W、N 和 R 都通過 O。兩個摩擦力都與圓相切，所以各自的力矩為（力）$\times r$，而且轉動方向相反：F 在底部，指向內側；G 在 P 處，指向下方和內側。因此

$$Fr = Gr \quad \Longrightarrow \quad G = F.$$

對圓柱作水平分解（以向外為正）：R 的水平分量為向外的 $R\sin\theta$，G 的分量為向內的 $G\cos\theta$，而地面摩擦力 F 向內，所以

$$R\sin\theta - G\cos\theta - F = 0.$$

由於 $G = F$，上式即

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

此即所求。

推論。木板處沒有滑動，所以該處的摩擦力滿足 $G \le \frac{1}{2}R$，即 $F \le \frac{1}{2}R$。於是

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta) \le \tfrac{1}{2}R(1+\cos\theta),$$

兩邊除以 $\frac{1}{2}R > 0$（木板壓在圓柱上），得 $2\sin\theta \le 1+\cos\theta$。

第 (ii) 部分

對木板作鉛垂分解。每條邊都受到 R，其向上分量為 $R\cos\theta$；又受到沿切線向上的 $G = F$，其向上分量為 $F\sin\theta$。所以

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = kW.$$

由第 (i) 部分，$R = \dfrac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$，所以

$$R\cos\theta + F\sin\theta = \frac{F\left[(1+\cos\theta)\cos\theta + \sin^2\theta\right]}{\sin\theta} = \frac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta},$$

這是因為 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。因此

$$\tfrac{1}{2}kW = \frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}F.$$

（由對稱性，木板所受的水平力互相抵消，力矩亦然。）

對圓柱作鉛垂分解。木板施加的反作用力向下推，大小為 $R\cos\theta + G\sin\theta = \frac{1}{2}kW$，所以

$$N = W + \tfrac{1}{2}kW = \left(\frac{2}{k}+1\right)\tfrac{1}{2}kW = \left(1+\frac{2}{k}\right)\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)F.$$

這就是所求的表達式。（這不過是顯而易見的事實：地面承受總重量 $2W + kW$ 的一半。）

地面處沒有滑動。條件為

$$F \le \tfrac{1}{2}N.$$

由 N 的表達式，

$$\frac{N}{F} = \left(1+\frac{2}{k}\right)\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$$

由於 θ 為銳角時 $\sin\theta > 0$，第 (i) 部分給出 $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \ge 2$；又因 $k > 0$，有 $1 + \frac{2}{k} > 1$。所以 $N/F > 2$，即 $F < \frac{1}{2}N$。因此只要木板不滑動，地面的條件便自動成立，對 θ 沒有額外限制。

> ? **想一想** 兩個接觸點的摩擦力同樣是 F，為何地面接觸點的條件會「免費」成立？

因為地面壓得更用力。比較 R 和 N 的公式，得 $N = \left(1+\frac{2}{k}\right)R > R$，因為地面還要承受圓柱本身的重量。兩個接觸點的摩擦力相同，而地面的法向力較大，所以總是木板接觸點先滑動。

第 (iii) 部分

把第 (i) 部分的不等式移項後平方。兩邊都是正數，所以平方後不等號方向不變：

$$4\sin^2\theta \le (1+\cos\theta)^2 \iff 4(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) \le (1+\cos\theta)^2.$$

除以 $1+\cos\theta > 0$，得 $4 - 4\cos\theta \le 1 + \cos\theta$，即 $\cos\theta \ge \frac{3}{5}$。由於 θ 為銳角，

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \le \sqrt{1-\tfrac{9}{25}} = \tfrac{4}{5}.$$

（等價地，設 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$，則不等式變為 $2t \le 1$，而 $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ 在 $t = \frac{1}{2}$ 時最大為 $\frac{4}{5}$。）

幾何關係。木板的邊 P 與中線的水平距離為 a。中心 O 與中線的距離為 r，而 P 比 O 更接近中線 $r\sin\theta$。所以

$$a = r - r\sin\theta = r(1-\sin\theta) \geq r\left(1-\tfrac{4}{5}\right) = \tfrac{1}{5}r,$$

由此得 $r \leq 5a$。

驗算

- 在極端情況 $\sin\theta = \frac{4}{5}$、$\cos\theta = \frac{3}{5}$ 下，取 $W = 1$ 及 $k = 1$。木板的方程給出 $F = \frac{1}{4}$，於是 $R = \frac{1}{2}$、$N = \frac{3}{2}$。所以 $G/R = \frac{1}{2}$ 恰好成立（木板處於將要滑動的狀態），而 $F/N = \frac{1}{6}$，遠低於 $\frac{1}{2}$，與第 (ii) 部分的預測一致。
- 四條平衡（equilibrium）方程（力矩方程，以及對兩個物體的分解）都經電腦以 10^5 組隨機的 W、k 和 θ 驗證。同時亦驗證了：$G \leq \frac{1}{2}R$ 成立當且僅當 $\sin\theta \leq \frac{4}{5}$，而此時 $F < \frac{1}{2}N$ 總是成立。
- 極限情況的合理性：寬木板（$a \to r$）擱在接近圓柱頂部的位置，所以 $\theta \to 0$，幾乎不需要摩擦力。窄木板則深深卡在兩個圓柱之間，最終會從兩者之間滑下去。

常見錯誤

- 漏掉力矩方程，因而沒有發現 $G = F$。沒有這一點，未知數就太多了。
- 弄錯木板處摩擦力的方向：兩個圓柱有向兩旁滾開的趨勢，所以作用在圓柱上的摩擦力指向下方和內側。
- 寫成 $a = r\sin\theta$ 而不是 $a = r(1-\sin\theta)$：a 是從中線量起的，而不是從圓柱的中心量起。

STEP 之外

這是一個小型的靜定（statically determinate）系統：三個物體，方程數目足以確定每一個力，而摩擦力給出的不等式則劃定了可能的位置。在大學一年級的課程中，同樣的概念會以剛體平衡條件（合力為零及合力矩為零）的形式再次出現，之後又會在楔入與卡死（wedging and jamming）的研究中出現。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對剛體靜力學和摩擦力有仔細的論述。

詳細解答

STEP II 2017，第 10 題

力學 • 克服阻力所作的功

> **STEP II 2017，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q10

關鍵思路

牛頓第二定律（Newton's second law）給出每一點的驅動力（driving force），而引擎所做的功（work）就是這個力對距離的積分（integral）。在等加速度的情況下，$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a$ 可以把對 x 的積分轉化為對 v 的積分。唯一微妙之處在於引擎只能推、不能拉：當所需的力變成負數時，便由煞車負責，引擎毫無貢獻，所以我們只在驅動力為正的範圍內積分。

解答

把汽車視為沿 x 軸運動的質點（particle），引擎提供的驅動力為 F。汽車向前行駛時，阻力（resistance）$Av^2 + R$ 向後作用。

前半段。 由牛頓第二定律得 $F - (Av^2 + R) = ma$，所以

$$F = ma + R + Av^2,$$

它在整段過程中都是正數。力 F 使其作用點移動 $\mathrm{d}x$ 時所做的功為 $F\,\mathrm{d}x$，因此引擎在前半段所做的功為

$$\int_0^d (ma + R + Av^2)\,\mathrm{d}x,$$

正如所求。至於變量代換（change of variable），加速度為 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a$，所以 $\mathrm{d}x = \frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$。由於 $v^2 = 2ax$（由靜止開始以等加速度運動），v 由 $x = 0$ 時的 0 變到 $x = d$ 時的 $\sqrt{2ad} = w$。因此所做的功為

$$\int_0^w \frac{(ma + R + Av^2)\,v}{a}\,\mathrm{d}v,$$

正如所求。計算這個積分，並利用 $w^2 = 2ad$：

$$W_1 = \frac{1}{a}\left[\frac{(ma+R)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_0^w = \frac{(ma+R)w^2}{2a} + \frac{Aw^4}{4a} = (ma+R)d + Aad^2.$$

後半段。 此時加速度為 $-a$，所以 $F - (Av^2 + R) = -ma$，得

$$F = Av^2 + R - ma.$$

汽車由 w 減速至 0，其中 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -a$，所以 $\mathrm{d}x = -\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$。在任何一段 $F > 0$、而速率由 v_1 降至 v_2（其中 $v_1 > v_2$）的路程上，引擎所做的功為

$$\int_{v_1}^{v_2} F\left(-\frac{v}{a}\right)\mathrm{d}v = \int_{v_2}^{v_1} \frac{(Av^2 + R - ma)\,v}{a}\,\mathrm{d}v. \qquad (*)$$

第 (i) 部分

若 $R > ma$，則對所有 v 皆有 $F = Av^2 + (R - ma) > 0$，所以引擎在整個後半段都在做功。由 $(*)$，取 $v_1 = w$、$v_2 = 0$：

$$W_2 = \frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_0^w = (R-ma)d + Aad^2.$$

兩者相加，$ma\,d$ 項互相抵消，總功為

$$W_1 + W_2 = 2Aad^2 + 2Rd,$$

正如所求。

第 (ii) 部分

現在 $R < ma$，所以 $F = Av^2 - (ma - R)$ 恰好在以下情況等於零：

$$v = u, \qquad \text{其中} u^2 = \frac{ma - R}{A} > 0.$$

若 $u < w$，即 $\frac{ma-R}{A} < 2ad$，這個速率便真的會在後半段出現，而這正正就是條件 $R > ma - 2Aad$。因此，當汽車由 w 減速至 0 時，F 在 $v > u$ 時為正，在速率為 u 時降至零，而在 $v < u$ 時為負（煞車）。這就證明了第一個結論。

> **想一想** 為甚麼不能直接沿用 (i) 的答案？

(i) 中的積分把整個後半段的 $F\,\mathrm{d}x$ 加起來。這裏 F 在 $v < u$ 時為負，那一段會從總和中減去。但引擎在那裏並不是做負功，而是甚麼也沒做，由煞車接手。所以我們在 $v = u$

處停止積分。由 $(*)$，取 $v_1 = w$、$v_2 = u$：

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_u^w \\ &= (R-ma)d + Aad^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{(R-ma)u^2}{2} + \frac{Au^4}{4}\right). \end{aligned}$$

代入 $Au^2 = ma - R$，括號內的式子為

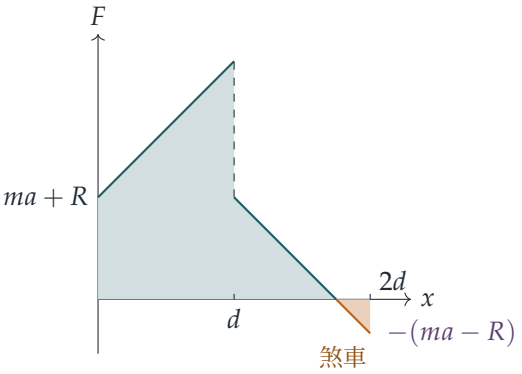
$$-\frac{(ma-R)^2}{2A} + \frac{(ma-R)^2}{4A} = -\frac{(ma-R)^2}{4A},$$

所以 $W_2 = (R-ma)d + Aad^2 + \frac{(ma-R)^2}{4Aa}$。前半段不變（那裏 $F > 0$ 恆成立），所以總功為

$$W_1 + W_2 = 2Aad^2 + 2Rd + \frac{(ma-R)^2}{4Aa},$$

正如所求。

圖解。 由於前半段 $v^2 = 2ax$，後半段 $v^2 = 2a(2d-x)$，F 在每一半都是 x 的線性函數（linear function），而引擎所做的功就是圖像正值部分之下的面積。在情況 (ii) 中，圖像在接近終點時跌到軸下方。缺去的三角形高為 $ma - R$；由於 F 每單位距離下降 $2Aa$，其底為 $\frac{ma-R}{2Aa}$。它的面積 $\frac{(ma-R)^2}{4Aa}$ 恰好就是那個額外的項。



驗算

- 在邊界 $R = ma$ 時，額外的項消失，所以 (i) 和 (ii) 的答案一致，這是理所當然的，因為此時 F 只在最後一刻才降至零。
- 在另一邊界 $R = ma - 2Aad$ 時，我們有 $u = w$，引擎在後半段完全不做功，總功應為 $W_1 = (ma+R)d + Aad^2$。把 $ma - R = 2Aad$ 代入 (ii) 的答案，得 $2Aad^2 + 2Rd + Aad^2 = 2Rd + 3Aad^2$，而 $(ma+R)d + Aad^2 = 2Rd + 2Aad^2 + Aad^2$ 亦然，所以兩者一致。

- 數值上，取 $m = a = 1$、$A = \frac{1}{2}$、$d = 2$、$R = \frac{1}{2}$（即上圖所畫的情況），(ii) 的公式給出 $4 + 2 + \frac{1}{8} = 6.125$，而直接對整段行程中 F 的正值部分作數值積分，亦得出相同的數值。
- 單位：Aad^2、Rd 和 $(ma - R)^2/(Aa)$ 都是力乘以距離，所以全都是能量。

常見錯誤

- 忘記後半段有 $\mathrm{d}x = -\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$，這會使積分上下限對調；這裏的正負號錯誤會令後半段的功變成負數。
- 在 (ii) 中把 F 的負值部分也積分進去，結果只會重複得出 (i) 的答案。
- 沒有檢查速率 u 是否真的在汽車停下之前出現：這正是 R 的下界所保證的。

STEP 之外

力所做的功是一個線積分（line integral）$\int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$，而這裏所用的變量代換就是功能定理（work–energy theorem）的一維版本。像 Av^2 這類阻力並不是保守力（conservative force），所以所做的功取決於行程是怎樣駕駛的，而不只取決於起點和終點。引擎這種「單向」的特性，讓我們初步領略到最優控制（optimal control）問題中出現的約束，例如尋找行駛指定距離最省燃料的方法。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對功、能量及與速度有關的力有細緻的討論。

詳細解答

STEP II 2017，第 11 題

力學 • 拋體與能量

STEP II 2017，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

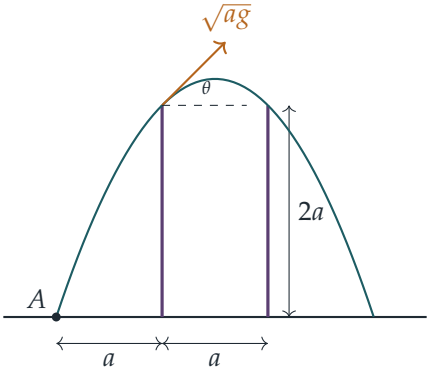
step.maths.org/questions/17-s2-q11

關鍵思路

當質點升到與第一道牆頂同高時，餘下的飛行就是一道全新的拋射體（projectile）問題：它從高度 $2a$ 出發，速率已知，而在水平距離 a 之後，高度仍須至少為 $2a$。利用能量（energy）可以在不知道拋射角的情況下求出這個速率。把軌跡（trajectory）以 $\tan\theta$ 表示，就能把「它能否越過第二道牆？」轉化為「一個關於 $\tan\theta$ 的二次方程（quadratic equation）是否有實根？」，這樣兩個部分便可一併處理。

解答

把每個質點視為只受重力作用、自由運動的質點（point mass），不計空氣阻力（air resistance）。取 x 為水平方向（朝向牆的一方），y 為鉛直向上。



第 (i) 部分

越過第一道牆時的速率。只有重力做功，所以動能（kinetic energy）與勢能（potential energy）之和保持不變。質點從地面升至高度 $2a$，設它在牆頂時的速率為 v，則

$$\tfrac{1}{2}m(5ag) = \tfrac{1}{2}mv^2 + mg(2a) \quad \Longrightarrow \quad v^2 = 5ag - 4ag = ag,$$

因此質點以速率 $\sqrt{ag}$ 越過第一道牆。

角度。設質點越過第一道牆時，速度與水平方向成仰角 θ；由於質點稍後（越過第二道牆時）會再次處於高度 $2a$，它此時必定仍在上升，所以 $\theta > 0$。以第一道牆頂為起點量度：經過水平距離 X 後，質點高於牆頂水平的高度為

$$Y = X\tan\theta - \frac{gX^2}{2v^2\cos^2\theta} = X\tan\theta - \frac{X^2}{2a}(1+\tan^2\theta),$$

這裏用了 $v^2 = ag$ 及 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$。恰好越過第二道牆，即在 $X = a$ 時 $Y = 0$：

$$a\tan\theta - \tfrac{a}{2}(1+\tan^2\theta) = 0 \iff \tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0 \iff (\tan\theta - 1)^2 = 0.$$

所以 $\tan\theta = 1$，$\theta = 45°$，正如所求。（另一種說法：從高度 $2a$ 回到高度 $2a$，相當於在水平地面上的射程（range）為 $v^2\sin 2\theta/g = a\sin 2\theta$，而它只在 $\sin 2\theta = 1$ 時等於 a。）

A 的距離。速度的水平分量始終不變，在第一道牆上方時為 $\sqrt{ag}\cos 45° = \sqrt{ag/2}$；該處的鉛直分量同樣是 $\sqrt{ag/2}$，方向向上。在 A 點，鉛直分量 u 滿足 $u^2 = \frac{1}{2}ag + 2g(2a) = \frac{9}{2}ag$，所以 $u = 3\sqrt{ag/2}$。（驗算一下：$\frac{1}{2}ag + \frac{9}{2}ag = 5ag$，與發射速率吻合。）從 A 到第一道牆所需的時間為

$$t = \frac{u - \sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\sqrt{ag/2}}{g},$$

在這段時間內走過的水平距離為

$$\sqrt{\tfrac{ag}{2}}\cdot\frac{2\sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}ag}{g} = a.$$

因此 A 與第一道牆腳的距離為 a。

第 (ii) 部分

現在質點在高度 $2a+h$ 處越過第一道牆。由能量守恆，它在該處的速率 w 滿足

$$w^2 = 5ag - 2g(2a+h) = g(a-2h).$$

質點朝牆的方向運動，所以水平速度不為零，故 $w^2 > 0$；因此 $h < \frac{1}{2}a$。

設它在該處的運動方向與水平方向成角 ϕ，並記 $T = \tan\phi$。以質點在第一道牆上方的位置為起點量度，經過水平距離 X 後，它高於該點的高度為

$$Y = XT - \frac{gX^2}{2w^2}(1+T^2) = XT - kX^2(1+T^2)/a^2, \qquad \text{其中} k = \frac{ga^2}{2w^2} = \frac{a^2}{2(a-2h)}.$$

在第二道牆處 $X = a$，所以 $Y = aT - k(1+T^2)$。要越過這道牆，質點的高度須至少為 $2a$，即 $Y \geq -h$：

$$aT - k(1+T^2) + h \geq 0 \iff kT^2 - aT + (k-h) \leq 0.$$

想一想 我們不知道 ϕ 的值。怎樣才能證明*沒有任何*方向可行？

由於 $k > 0$，二次式 $kT^2 - aT + (k-h)$ 的圖像開口向上。它只有在判別式（discriminant）非負時，才會對某個實數 T 取得 ≤ 0 的值。這個判別式為

$$\Delta = a^2 - 4k(k-h) = a^2 - \frac{a^4}{(a-2h)^2} + \frac{2a^2 h}{a-2h}.$$

乘以正數 $(a-2h)^2/a^2$，得

$$\frac{(a-2h)^2}{a^2}\Delta = (a-2h)^2 - a^2 + 2h(a-2h) = -2ah.$$

由於 $a > 0$ 且 $h > 0$，此式為負，所以 $\Delta < 0$。於是對所有實數 T 都有 $kT^2 - aT + (k-h) > 0$；換言之，無論質點越過第一道牆時的方向如何，它到達第二道牆時的高度都低於 $2a$。它無法越過第二道牆。

留意 $h = 0$ 時 $\Delta = 0$，並得到重根（double root）$T = a/(2k) = 1$：這正是第 (i) 部分的 45°。

驗算

- 在第 (i) 部分，A 點的速度分量為 $\sqrt{ag/2}$ 和 $3\sqrt{ag/2}$，兩者平方之和為 $5ag$。取 $a = 1.7\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，從 A 點起逐步向前推算運動，得出質點在兩道牆處的高度都是 $2.000a$。
- 軌跡關於最高點對稱；在第 (i) 部分，最高點位於兩牆正中，與 A 的水平距離為 $1.5a$。所以質點落在距 A 為 $3a$ 之處，即第二道牆之後距離 a 的地方：整幅圖是對稱的。
- 在第 (ii) 部分，用電腦以速率 $\sqrt{5ag}$ 檢驗了數以千計隨機的發射角和發射點，沒有一個既能在第一道牆上方經過，又能越過第二道牆。

常見錯誤

- 忘記第 (i) 部分的 θ 必須是越過第一道牆時的角度，而不是在 A 點的拋射角（後者滿足 $\tan\alpha = 3$）。

- 在第 (ii) 部分只檢驗某一個特定角度（例如 45°）。題目的斷言涉及所有可能的方向，所以才需要用判別式。

STEP 之外

第 (ii) 部分說明：從第一道牆上方的一點出發，具有這個能量的質點只能恰好到達第二道牆頂；換言之，該牆頂位於可到達範圍的邊界上。從某一給定點以給定速率出發可到達的所有點，都位於一條稱為包絡線（envelope）或安全拋物線（safety parabola）的拋物線之內，而拋物線上的點恰好只由一條軌跡到達，這就是這裏所見的重根。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以大學一年級程度講解拋射體及能量方法。

詳細解答

STEP II 2017，第 12 題

概率與統計 • 泊松過程

> **STEP II 2017，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q12

關鍵思路

兩條互相獨立（independent）的泊松（Poisson）魚流合併後，成為一條單一的泊松魚流，其速率為兩個速率之和；這正是第 (i) 部分中的卷積（convolution）所顯示的。至於有關時間的問題，要把關於第一條魚何時上釣的陳述，轉化為關於釣到多少條魚的陳述：「亞當的第一條魚在時間 t 之後才上釣」的意思恰恰就是「亞當在 $[0,t]$ 內沒有釣到任何魚」，而泊松公式可以直接給出這個概率。

解答

全文中，X 和 Y 分別是亞當和夏娃在長度為 T 的時段內釣到的魚的數目，因此 $X \sim \mathrm{Po}(\lambda T)$ 及 $Y \sim \mathrm{Po}(\mu T)$，兩者互相獨立。

第 (i) 部分

對整數 $r \geq 0$，事件 $X+Y=r$ 可分拆為互斥事件 $\{X=j,\ Y=r-j\}$，其中 $j=0,1,\ldots,r$。利用獨立性，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X+Y=r) &= \sum_{j=0}^{r} \mathrm{P}(X=j)\,\mathrm{P}(Y=r-j) = \sum_{j=0}^{r} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!} \cdot \frac{e^{-\mu T}(\mu T)^{r-j}}{(r-j)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)T}}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (\lambda T)^j (\mu T)^{r-j} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)T}\big((\lambda+\mu)T\big)^r}{r!},\end{aligned}$$

這裏我們先乘以再除以 $r!$，然後運用二項式定理（binomial theorem）。這正是 $\mathrm{Po}\big((\lambda+\mu)T\big)$ 的概率，因此在時間 T 內的總漁獲服從參數為 $(\lambda+\mu)T$ 的泊松分佈。

第 (ii) 部分

對 $0 \le r \le k$，

$$\mathrm{P}(X = r \mid X+Y = k) = \frac{\mathrm{P}(X=r,\ Y=k-r)}{\mathrm{P}(X+Y=k)} = \frac{\dfrac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^r}{r!} \cdot \dfrac{e^{-\mu T}(\mu T)^{k-r}}{(k-r)!}}{\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)T}\big((\lambda+\mu)T\big)^k}{k!}},$$

其中分母用了第 (i) 部分的結果。指數項互相抵消，T 的冪也一樣（分子有 $r+(k-r)=k$ 次，分母也有 k 次），剩下

$$\mathrm{P}(X = r \mid X+Y = k) = \binom{k}{r}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^r\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-r}.$$

所以，在總數為 k 的條件下，亞當的漁獲服從 $\mathrm{B}\big(k,\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\big)$。實際上，這 k 條魚中的每一條，都各自獨立地以概率 $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ 屬於亞當。留意 T 已經消失了。

第 (iii) 部分

設 A 和 E 分別為亞當和夏娃釣到第一條魚的時間，從開始時起計。亞當的第一條魚在時間 t 之後才上鈎，當且僅當他在 $[0,t]$ 內甚麼也沒釣到，因此

$$\mathrm{P}(A > t) = \mathrm{P}\big(\mathrm{Po}(\lambda t) = 0\big) = e^{-\lambda t}, \qquad \text{同理} \qquad \mathrm{P}(E > t) = e^{-\mu t}.$$

因此 A 的概率密度函數（probability density function）為 $\lambda e^{-\lambda t}$，其中 $t \ge 0$（把 $1-e^{-\lambda t}$ 求導即得），而由於兩人的漁獲互相獨立，A 和 E 也互相獨立。

> **想一想** 我們該如何把 A 的密度與 E 的概率結合起來？

以 A 的值為條件：若亞當的第一條魚在時間 t 上釣，那麼他領先恰恰就是 $E > t$ 的情況，由獨立性可知其概率為 $e^{-\mu t}$。對所有 t 求和，

$$\mathrm{P}(A < E) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, e^{-\mu t}\,\mathrm{d}t = \lambda\left[\frac{-e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

（由於 E 服從連續分佈，兩人同時釣到的概率為零。）所以第一條魚屬於亞當的概率是 $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$，與第 (ii) 部分的二項分佈參數相同。

第 (iv) 部分

我們要求 $\mathrm{E}(M)$，其中 $M = \max(A,E)$ 是兩人都釣到魚的時間。記 $m = \min(A,E)$，即兩人之中任何一人釣到第一條魚的時間。對任意兩個數，max + min 等於它們的和，因此

$$M = A + E - m \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{E}(M) = \mathrm{E}(A) + \mathrm{E}(E) - \mathrm{E}(m).$$

$\mathrm{E}(A)$ 與 $\mathrm{E}(E)$。從開始時起計，亞當的漁獲所構成的過程，與從任何一次釣到魚的時刻起計的過程屬同一類，因此他等待第一條魚的期望（expectation）時間，與題目給出的期望間隔相同，即 $\mathrm{E}(A) = \lambda^{-1}$；同樣 $\mathrm{E}(E) = \mu^{-1}$。（直接計算：利用分部積分（integration by parts），$\mathrm{E}(A) = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda^{-1}$。）

想一想 「兩人之中任何一人釣到的第一條魚」屬於哪一類過程？

由第 (i) 部分，在任何長度為 t 的時段內，兩人的合計漁獲服從 $\mathrm{Po}\big((\lambda+\mu)t\big)$。所以合計漁獲與亞當的漁獲是完全同類的過程，只是速率由 λ 換成 $\lambda+\mu$，因此等待第一條魚的期望時間為 $\mathrm{E}(m) = (\lambda+\mu)^{-1}$。（直接計算：$\mathrm{P}(m > t) = \mathrm{P}(A > t)\,\mathrm{P}(E > t) = e^{-(\lambda+\mu)t}$。）因此

$$\mathrm{E}(M) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)}.$$

驗算

- 若 $\lambda = \mu$，第 (iii) 部分給出 $\frac{1}{2}$，正如對稱性（symmetry）所要求；第 (iv) 部分給出 $\frac{3}{2\lambda}$：先等 $\frac{1}{2\lambda}$ 得到第一條魚，再根據同樣的「重新開始」推理，另一人還要多等 $\frac{1}{\lambda}$。
- 若 $\mu \to \infty$（夏娃即時釣到魚），第 (iv) 部分的答案趨向 $\frac{1}{\lambda}$，即亞當獨自所需的時間。
- 第 (iv) 部分的答案至少為 $\max(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu})$，這是必然的，因為 $\frac{1}{\mu} > \frac{1}{\lambda+\mu}$。
- 取 $\lambda = 1.3$、$\mu = 0.7$，公式給出 0.65 和 1.6978；以電腦模擬 2×10^5 次釣魚之旅，得到 0.651 和 1.700。

常見錯誤

- 在第 (iv) 部分，把 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 相加，或取 $\max\big(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}\big)$：最大值的期望並非兩者之一。
- 在第 (ii) 部分，忘記除以 $\mathrm{P}(X+Y=k)$，而正是這一步把聯合概率（joint probability）變成條件概率（conditional probability）。

STEP 之外

你在這裏遇到的是*泊松過程*（Poisson process）：事件之間的等待時間服從指數分佈，並具有無記憶性（memoryless）；互相獨立的泊松過程疊加（superpose）後成為另一個泊松過程；而每個事件都獨立地以與其速率成正比的概率被標記（反方向的操作，即「稀疏化」（thinning），同樣成立）。這些事實是排隊論（queueing theory）和連續時間馬可夫鏈（continuous-time Markov chains）的基礎。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability:*

An Introduction（《概率導論》）對泊松過程和指數分佈（exponential distribution）的處理，正好可以作為這道題目的自然延續。

詳細解答

STEP II 2017，第 13 題

概率與統計 • 期望值與無窮級數

STEP II 2017，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s2-q13

關鍵思路

無論哪一種情況，門在第 k 次嘗試時打開，當且僅當前 $k-1$ 次嘗試都失敗而第 k 次成功，所以所求概率是若干個「失敗」因子乘以一個「成功」因子。各種情況之間的分別，只在於每次抽取時袋中有多少條鑰匙。把概率寫出來之後，期望值（expectation）就是一些求和：(i) 是一個經微分的等比級數（geometric series），(ii) 是一個等差級數（arithmetic series），而 (iii) 則是一個裂項相消（telescoping）的和，最後剩下調和級數（harmonic series）的一部分。

解答

全文中，設 X 為門被打開時的嘗試次數，並設 $q = 1 - \frac{1}{n}$。

第 (i) 部分

每次都從裝有全部 n 條鑰匙的袋中抽取；由於鑰匙會放回，每次抽取與之前的抽取互相獨立（independent）。因此每次嘗試成功的概率都是 $\frac{1}{n}$，而

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1} \cdot \frac{1}{n}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

由二項展開（binomial expansion），因 $0 < q < 1$ 而成立，

$$(1-q)^{-2} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}.$$

因此

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1-q)^{-2} = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n.$$

嘗試次數的期望值是 n。

第 (ii) 部分

現在每次失敗後，袋中就少了一條錯誤的鑰匙，所以第 j 次嘗試時袋中有 $n-j+1$ 條鑰匙。要門在第 k 次嘗試時打開，需要先失敗 $k-1$ 次，然後成功一次：

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n},$$

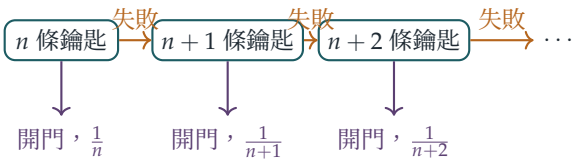
因為這個乘積會逐項相消。（這一點也可以直接看出：逐條不放回地抽出鑰匙，正確的鑰匙在 n 個位置中的位置是均勻隨機的。）所以 X 在 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上服從均勻分佈（uniform distribution），而

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

第 (iii) 部分

概率。 袋中起初有 n 條鑰匙，每次失敗後就多加一條錯誤的鑰匙，而袋中始終恰好有一條正確的鑰匙。所以第 j 次嘗試時袋中有 $n+j-1$ 條鑰匙，而

$$\mathrm{P}(\text{第}j\text{ 次嘗試失敗}\mid\text{之前的嘗試均失敗})=\frac{n+j-2}{n+j-1}.$$



把 $k-1$ 次失敗及其後一次成功的條件概率（conditional probability）相乘，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=k)&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdots\frac{n+k-3}{n+k-2}\cdot\frac{1}{n+k-1}\\&=\frac{n-1}{n+k-2}\cdot\frac{1}{n+k-1}=\frac{n-1}{(n+k-1)(n+k-2)},\end{aligned}$$

因為每個分子都與前一個分母相消，只剩下第一個分子 $n-1$ 和最後一個失敗因子的分母 $n+k-2$。當 $k=1$ 時沒有失敗因子，而公式給出 $\frac{n-1}{n(n-1)}=\frac{1}{n}$，與預期相符。這就是所求的結果。

門一定會打開。 在計算平均值之前，值得先驗證 X 以概率 1 為有限。由於 $\dfrac{n-1}{(n+k-1)(n+k-2)} = (n-1)\left(\dfrac{1}{n+k-2} - \dfrac{1}{n+k-1}\right)$，這個和會裂項相消：

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(X=k) = (n-1)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+N-1}\right) \to 1 \quad \text{當} N \to \infty.$$

期望值。 我們需要求 $\sum k\,\mathrm{P}(X=k)$，所以把 $\dfrac{k}{(n+k-1)(n+k-2)}$ 拆成部分分式（partial fractions）。設

$$k = A(n+k-2) + B(n+k-1)$$

代入 $k = 1-n$ 得 $1-n = -A$，所以 $A = n-1$；代入 $k = 2-n$ 得 $B = 2-n$。因此

$$k\,\mathrm{P}(X=k) = (n-1)\left(\frac{n-1}{n+k-1} - \frac{n-2}{n+k-2}\right).$$

> **想一想** 這個式子不能乾淨地裂項相消，因為係數 $n-1$ 和 $n-2$ 並不相同。那麼剩下來的是甚麼？

設 S_N 為首 N 項之和。第一個分數的分母取遍 $m = n, \ldots, n+N-1$；第二個分數的分母則取遍 $m = n-1, \ldots, n+N-2$。在共同範圍 $m = n, \ldots, n+N-2$ 上，每個 $\frac{1}{m}$ 的係數都是 $(n-1)-(n-2) = 1$，而兩端則剩了下來：

$$S_N = (n-1)\left(\sum_{m=n}^{n+N-2} \frac{1}{m} + \frac{n-1}{n+N-1} - \frac{n-2}{n-1}\right).$$

最後兩項是有界的（中間一項為正，最後一項是一個固定的數），而

$$\sum_{m=n}^{n+N-2} \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{n+N-2} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \to \infty$$

當 $N \to \infty$ 時成立，因為調和級數發散（diverges），而我們只減去一個固定的有限值。由於 $n-1 > 0$，所以 $S_N \to \infty$。所有項 $k\,\mathrm{P}(X=k)$ 都是正數，因此定義 $\mathrm{E}(X)$ 的級數發散至無窮：嘗試次數的期望值是無窮大，儘管門最終必定會打開。

驗算

- 當 $n = 2$ 時，三個答案分別是 2、$\frac{3}{2}$ 和 ∞。第二種情況效率最高，這是理所當然的，因為它從不重試同一條鑰匙；第一種情況則介乎兩者之間。
- 在 (iii) 中取 $n = 3$，公式對 $k = 1, 2, 3$ 給出 $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}$；直接計算則得 $\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ 和 $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$。以電腦模擬 2×10^5 局，得到的頻率為 0.334、0.168 和 0.099。

- 同樣取 $n = 3$，當 $N = 10^4$ 時部分和 S_N 約為 15.6，而且它會像 $2\ln N$ 般不斷增長：並沒有極限。

常見錯誤

- 在 (iii) 中，把第 k 次嘗試時袋中鑰匙的數目當作 $n+k$ 而不是 $n+k-1$：在第 k 次抽取之前，只加入了 $k-1$ 條鑰匙。
- 因為平均值是無窮大，就斷定門可能永遠打不開。各概率之和為 1；只是其尾部像 $1/k^2$ 般衰減，太「重」了，令 $\sum k\,\mathrm{P}(X=k)$ 無法收斂。
- 把部分分式當作兩個係數相等般裂項相消，因而得出一個有限的答案。

STEP 之外

第三種情況給出一個以概率 1 為有限、但平均值為無窮大的隨機變量（random variable），原因是 $\mathrm{P}(X=k)$ 的表現像 $1/k^2$。像這樣的重尾分佈（heavy-tailed distribution），以及著名的聖彼得堡悖論（St Petersburg paradox），說明了為何大學一年級的概率課程堅持：只有當 $\sum k\,\mathrm{P}(X=k)$ 收斂時，$\mathrm{E}(X)$ 才存在。每次失敗後多加一條錯誤鑰匙的袋子，與波利亞（Pólya）罐子模型是近親；後者是描述「富者愈富」過程的標準模型。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）講述了離散隨機變量的期望值以及這些微妙之處。

詳細解答

STEP III 2017，第 1 題

純數學 • 裂項相消級數的界限

STEP III 2017，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s3-q1

關鍵思路

第 (i) 部分的恆等式（identity）把每個二項式係數（binomial coefficient）的倒數寫成一個常數乘以相鄰兩項的*差*，於是整個和式可以伸縮相消（telescoping）。在第 (ii) 部分，$1/n^3$ 不容易求和，但二項式係數的倒數卻可以：$\binom{n+1}{3}$ 和 $\binom{n+2}{5}$ 都是 n 的多項式，分別與 n^3 和 n^5 的倍數相近，所以我們可以把 $1/n^3$ 夾在兩個能用第 (i) 部分精確求和的式子之間。

解答

第 (i) 部分

記 $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$。於是

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}} &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r-1)!} - \frac{r!\,n!}{(n+r)!} \\ &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r)!}\big[(n+r)-n\big] = \frac{r\cdot r!\,(n-1)!}{(n+r)!},\end{aligned}$$

其中我們利用 $(n+r)! = (n+r)\,(n+r-1)!$ 和 $n! = n\,(n-1)!$，提出了公因子 $r!\,(n-1)!/(n+r)!$。乘以 $\frac{r+1}{r}$，得

$$\frac{r+1}{r}\left(\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}}\right) = \frac{(r+1)!\,(n-1)!}{(n+r)!} = \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}},$$

因為 $(n+r)-(r+1) = n-1$。這就是所求的恆等式。

求和。設 $a_n = 1/\binom{n+r-1}{r}$，則恆等式可寫成 $1/\binom{n+r}{r+1} = \frac{r+1}{r}(a_n - a_{n+1})$。由 $n=1$ 加到

N，除了首項和末項外，其餘全部相消：

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\binom{n+r}{r+1}}=\frac{r+1}{r}(a_1-a_{N+1})=\frac{r+1}{r}\left(1-\frac{1}{\binom{N+r}{r}}\right),$$

因為 $a_1=1/\binom{r}{r}=1$。當 $N\to\infty$ 時，$\binom{N+r}{r}\geq N+r\to\infty$（對 $r\geq 1$ 而言），所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{n+r}{r+1}}=\frac{r+1}{r}.$$

推論。取 $r=2$，由 $n=1$ 起的和為 $\frac{3}{2}$。$n=1$ 那一項是 $1/\binom{3}{3}=1$，所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\binom{n+2}{3}}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$

第 (ii) 部分

第一條不等式。對 $n\geq 3$，

$$\frac{1}{\binom{n+1}{3}}=\frac{3!}{(n+1)n(n-1)}=\frac{3!}{n^3-n}>\frac{3!}{n^3},$$

因為 $0<n^3-n<n^3$（左邊的不等式成立是因為 $n\geq 2$）。

第二條不等式。我們有 $\binom{n+1}{3}=\frac{1}{6}n(n^2-1)$ 及 $\binom{n+2}{5}=\frac{1}{120}(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)=\frac{1}{120}n(n^2-1)(n^2-4)$。所以

$$\frac{20}{\binom{n+1}{3}}-\frac{1}{\binom{n+2}{5}}=\frac{120}{n(n^2-1)}-\frac{120}{n(n^2-1)(n^2-4)}=\frac{120\,(n^2-5)}{n(n^2-1)(n^2-4)}.$$

當 $n\geq 3$ 時，因子 n、n^2-1、n^2-4 全部為正，所以此式小於 $120/n^3=5!/n^3$ 當且僅當

$$n^2(n^2-5)<(n^2-1)(n^2-4),\quad \text{即}\quad n^4-5n^2<n^4-5n^2+4,$$

而這顯然成立。

想一想 我們需要第 (i) 部分中的哪些和式？它們由哪一項開始？

我們需要 $\sum_{n\geq 3}1/\binom{n+1}{3}$ 和 $\sum_{n\geq 3}1/\binom{n+2}{5}$。在第一個和式中設 $m=n-1$，它變成 $\sum_{m\geq 2}1/\binom{m+2}{3}=\frac{1}{2}$，正正就是第 (i) 部分的推論。在第二個和式中設 $m=n-2$，它變成 $\sum_{m\geq 1}1/\binom{m+4}{5}$，即第 (i) 部分取 $r=4$ 的情況，得 $\frac{5}{4}$。

所涉及的級數全部收斂（convergent）（它們都是正項級數，並且如上述不等式所示，被收斂級數所界）。把收斂級數之間的嚴格不等式逐項相加，得到的仍是嚴格不等式，因為各個正差之和至少等於其首項，而首項是正數。記 $T=\sum_{n\geq 3}1/n^3$。

上界。把第一條不等式對 $n \geq 3$ 求和：

$$6T < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad T < \frac{1}{12}.$$

下界。把第二條不等式對 $n \geq 3$ 求和：

$$120\,T > 20 \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = \frac{35}{4}, \qquad \text{所以} \qquad T > \frac{35}{480} = \frac{7}{96}.$$

最後，$\sum_{n\geq 1} 1/n^3 = 1 + \frac{1}{8} + T$，而 $1 + \frac{1}{8} = \frac{108}{96}$。因此

$$\frac{108+7}{96} = \frac{115}{96} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{108}{96} + \frac{8}{96} = \frac{116}{96},$$

證畢。

驗算

- 以 $n = r = 1$ 測試恆等式：$1/\binom{2}{2} = 1$，而 $2\,(1/\binom{1}{1} - 1/\binom{2}{1}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$。
- 當 $r = 1$ 時，和為 $\sum 1/\binom{n+1}{2} = \sum \frac{2}{n(n+1)} = 2$，這是大家熟悉的伸縮和，與 $\frac{r+1}{r} = 2$ 吻合。
- 數值上 $\sum 1/n^3 \approx 1.20206$，而 $\frac{115}{96} \approx 1.19792$、$\frac{116}{96} \approx 1.20833$，所以上下界成立，並把該值確定在約 0.01 的範圍之內。

常見錯誤

- 移位後弄錯起始指標：$\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+1}{3}$ 由 $\binom{4}{3}$ 開始，這是第 (i) 部分推論中 $n = 2$ 的那一項，而不是 $n = 1$ 的那一項。
- 忘記加上 $n = 1, 2$ 時的項 $1 + \frac{1}{8}$，這兩項並不在不等式涵蓋的範圍內。

STEP 之外

數 $\sum 1/n^3$ 就是 $\zeta(3)$，稱為阿佩里常數（Apéry's constant）；與 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ 不同，它沒有已知的閉合形式。阿佩里（Apéry）在 1978 年證明它是無理數（irrational），所用的正是與這裏相似的快速收斂級數。把一個級數與伸縮級數比較，以及把不等式逐項相加，都是大學第一個分析（analysis）課程的標準工具。如想仔細了解收斂性和比較判別法（comparison test），可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2017，第 2 題

純數學 • 複平面上的旋轉

STEP III 2017，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s3-q2

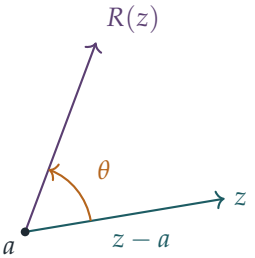
關鍵思路

要描述繞 a 的旋轉（rotation），最簡單的做法是把原點移到 a：先減去 a，再乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，然後把 a 加回去。因此每個旋轉都具有 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z + k$ 的形式；反過來，只要 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq 1$，這樣的映射就是繞其不動點（fixed point）轉 α 的旋轉。所以要辨認 SR，只需把兩條公式複合（compose），再求出不動點。利用半角因式分解（half-angle factorisation）$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\frac{1}{2}\alpha$，便可把答案化成所要求的形式。

解答

第 (i) 部分

由中心 a 指向 P 的向量（vector）是 $z - a$。繞 a 逆時針旋轉 θ，就是把這個向量轉 θ，在複數中即乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$；由於 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$，長度保持不變。



所以 P 的像 w 滿足 $w - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - a)$，即

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + a\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right),$$

正如所求。同理，$S(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}z + b\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big)$。

第 (ii) 部分

先作用 R，再作用 S：

$$\begin{aligned} SR(z) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + a\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)\Big) + b\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) + b\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big). \end{aligned}$$

由第 (i) 部分，繞 c 轉 $\theta + \phi$ 的旋轉是 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + c\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}\big)$。兩者 z 的係數已經相同，所以 SR 恰好是這個旋轉，當且僅當

$$c\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}\big) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) + b\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big). \qquad (*)$$

想一想 怎樣才能把括號 $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 化成半角的正弦？

提取因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$，使括號內變得對稱：

$$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\big) = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

分別取 $\alpha = \theta + \phi$、θ 和 ϕ 代入，方程 $(*)$ 變成

$$-2\mathrm{i}\,c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi) = -2\mathrm{i}\,a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\mathrm{i}\,b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

兩邊除以 $-2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}$（它永不為零），得

$$c\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta + b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

若 $\theta + \phi \neq 2n\pi$，則 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) \neq 0$，因此上式唯一確定 c，而取這個 c 時，映射 SR 就是繞 c 轉 $\theta + \phi$ 的旋轉。這正是所要求的結果。（這個條件是必要的：若 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) = 0$，一般而言根本沒有可供旋轉的不動點。）

$\theta + \phi = 2\pi$ 的情況。此時 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} = 1$ 且 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$，所以

$$\begin{aligned} SR(z) &= z + a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) + b\big(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big) \\ &= z + a\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - 1\big) + b\big(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big) \\ &= z + (b - a)\big(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big). \end{aligned}$$

所以 SR 是平移（*translation*）$(b-a)\big(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big)$，平移距離為 $2|b-a|\,|\sin\frac{1}{2}\theta|$。當 $a = b$（繞同一點先轉 θ 再轉 $2\pi - \theta$），或當 θ 是 2π 的倍數時，它是恆等映射（identity）；否則它是一個真正的平移，沒有不動點。

第 (iii) 部分

在 SR 的公式中把 (a,θ) 與 (b,ϕ) 的角色互換，得

$$RS(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big) + a\big(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big).$$

兩個映射都把 z 乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}$，所以 $RS = SR$ 當且僅當常數項相同。兩者之差為

$$\begin{aligned} SR(z) - RS(z) &= a\big(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1\big) + b\big(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big)\big(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) \\ &= (b-a)\big(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)\big(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big). \end{aligned}$$

乘積為零當且僅當其中一個因子為零，所以 $RS = SR$ 當且僅當

- $a = b$（兩個旋轉的中心相同），或
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$，即 θ 是 2π 的倍數，所以 R 是恆等映射，或
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = 1$，即 ϕ 是 2π 的倍數，所以 S 是恆等映射。

換句話說：兩個真正的旋轉只有在中心相同時才可交換（commute）。

驗算

- 取 $a = b$，(ii) 的公式給出 $c\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) = a\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\frac{1}{2}\theta + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\frac{1}{2}\phi\big)$，把括號展開得 $\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\phi + \cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\phi = \sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$（虛部互相抵消），所以 $c = a$，理應如此。
- 取 $\phi = 0$（S 為恆等映射），則 $c\sin\frac{1}{2}\theta = a\sin\frac{1}{2}\theta$，所以 $c = a$。
- 取 $a = 0$、$b = 1$、$\theta = \phi = \frac{1}{2}\pi$。則 $R(z) = \mathrm{i}z$，$S(z) = \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i}$，所以 $SR(z) = -z + 1 - \mathrm{i}$，即繞 $\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$ 的半周旋轉。公式給出 $c\cdot 1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$。兩者吻合。
- 三個結果亦已用電腦在數以千計的隨機中心、角度和點上驗證，驗證時以幾何方式（按模和輻角）進行旋轉，而非使用上述公式；誤差均小於 10^{-12}。

常見錯誤

- 複合次序弄錯：SR 表示先作用 R，所以是把 $R(z)$ 代入 S。
- 除以 $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}$ 時，沒有指出它正是因為 $\theta+\phi \neq 2n\pi$ 才不為零。
- 在 (iii) 中，遺漏了其中一個旋轉是恆等映射的平凡情況。

STEP 之外

滿足 $|\alpha| = 1$ 的映射 $z \mapsto \alpha z + \beta$，恰好就是平面上所有保持定向的等距變換（orientation-preserving isometries），而它們構成一個羣（group）：旋轉與平移合在一起，在複合運算下封閉。第 (iii) 部分是「這個羣不可交換」這一事實的一個小例子，而交換子（commutator）$RSR^{-1}S^{-1}$ 原來是一個平移。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）把複數乘法的這種幾何觀點發展得非常漂亮，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）則涵蓋相關的羣論。

詳細解答

STEP III 2017，第 3 題

純數學 • 多項式的根

> **STEP III 2017，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q3

本題在 *Beyond STEP* 第 6.4 節解四次方程中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/quartic.html

關鍵思路

任何多項式的係數都是其根的對稱函數（symmetric functions），所以三次方程的係數 A 是其三個根之和的相反數，而這個和正是 α、β、γ、δ 的一個熟悉的對稱函數。對於題中指定的四次方程，其對應的三次方程有一個整數根，因此可以完全因式分解。知道 $\alpha\beta+\gamma\delta$ 的值後，便可把四次方程拆成兩個二次因式，一個以 α、β 為根，另一個以 γ、δ 為根，而其餘的係數則確定這兩個因式。

解答

求 A

全程我們使用四次方程的韋達定理（Vieta's relations）：

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p, \qquad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=q,$$
$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-r, \qquad \alpha\beta\gamma\delta=s.$$

該三次方程是首一（monic）的，其根為 $y_1=\alpha\beta+\gamma\delta$、$y_2=\alpha\gamma+\beta\delta$ 及 $y_3=\alpha\delta+\beta\gamma$，所以

$$y^3+Ay^2+\cdots=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3),$$

比較 y^2 的係數，得 $A = -(y_1 + y_2 + y_3)$。但 $y_1 + y_2 + y_3$ 恰好包含六個由兩個不同根組成的乘積各一次，所以它等於 q。因此

$$A = -q.$$

第 (i) 部分

當 $p = 0$、$q = 3$、$r = -6$、$s = 10$ 時，三次方程的係數為

$$A = -3, \qquad pr - 4s = -40, \qquad 4qs - p^2 s - r^2 = 120 - 0 - 36 = 84,$$

所以方程為

$$y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = 0.$$

任何整數根都必整除 84。試代入較小的因數，$y = 2$ 給出 $8 - 12 - 80 + 84 = 0$，所以 $y - 2$ 是一個因式：

$$y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = (y - 2)(y^2 - y - 42) = (y - 2)(y - 7)(y + 6).$$

各根為 2、7 及 -6；最大的是 7，所以

$$\alpha\beta + \gamma\delta = 7.$$

第 (ii) 部分

展開得

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta,$$

即全部六個兩兩乘積之和減去 $\alpha\beta$ 與 $\gamma\delta$。所以

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = q - (\alpha\beta + \gamma\delta) = 3 - 7 = -4.$$

接着，$\alpha\beta$ 與 $\gamma\delta$ 之和為 7，積為 $\alpha\beta\gamma\delta = s = 10$。因此它們是以下方程的根：

$$t^2 - 7t + 10 = (t - 5)(t - 2) = 0,$$

又因為 $\alpha\beta > \gamma\delta$，所以 $\alpha\beta = 5$ 及 $\gamma\delta = 2$。

第 (iii) 部分

設 $u = \alpha + \beta$。由於 $p = 0$，四個根之和為零，所以 $\gamma + \delta = -u$，而第 (ii) 部分給出 $-u^2 = -4$，所以 $u = \pm 2$。

? **想一想** u 應取哪個符號？我們怎樣判斷？

我們還未用到 r。把四個三元乘積兩兩分組，

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=5(-u)+2u=-3u.$$

這等於 $-r=6$，所以 $u=-2$。（取另一個符號會得到 $r=+6$，即另一個四次方程。）因此

$$\alpha+\beta=-2,\quad \alpha\beta=5,\qquad \gamma+\delta=2,\quad \gamma\delta=2.$$

所以 α、β 是 $x^2+2x+5=0$ 的根，得 $x=-1\pm 2\mathrm{i}$；而 γ、δ 是 $x^2-2x+2=0$ 的根，得 $x=1\pm\mathrm{i}$。因此四次方程

$$x^4+3x^2-6x+10=(x^2+2x+5)(x^2-2x+2)=0$$

的根為

$$x=-1+2\mathrm{i},\quad -1-2\mathrm{i},\quad 1+\mathrm{i},\quad 1-\mathrm{i}.$$

驗算

- 展開 $(x^2+2x+5)(x^2-2x+2)$：x^3 項互相抵消，得到 $x^4+3x^2-6x+10$，正是原來的四次式。
- 以這些根計算，$\alpha\gamma+\beta\delta$ 及 $\alpha\delta+\beta\gamma$（按某個次序）應為三次方程的另外兩個根 2 及 -6。它們之和為 $q-7=-4=2+(-6)$，與預期相符。
- 公式 $A=-q$ 亦已用電腦在一千個根為隨機複數的四次方程上驗證過。

常見錯誤

- 誤取 $A=q$：y^2 的係數是各根之和的*相反數*。
- 停在 $u=\pm 2$ 並同時給出兩個可能：只有一個符號與 $r=-6$ 相容。
- 預期有實根：這個四次式對所有實數 x 都是正數，所以四個根全是複數。

STEP 之外

這裏的三次方程是該四次方程的*預解三次方程*（resolvent cubic），也是費拉里（Ferrari）方法的核心：解任何四次方程都可化為解一個三次方程，再解若干二次方程。這方法為何奏效，可由伽羅瓦理論（Galois theory）解釋；該理論研究根的置換（permutations）如何作用於像 $\alpha\beta+\gamma\delta$ 這樣的式子（三個式子各自被 24 個置換中一個含八個置換的子羣（subgroup）固定）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是入門這些概念的好起點。

詳細解答

STEP III 2017，第 4 題

純數學 • 函數的幾何平均

STEP III 2017，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s3-q4

關鍵思路

幾何平均（geometric mean）其實就是普通平均值的指數：$\ln F(y)$ 是 $\ln f$ 在 $[0,y]$ 上的平均值。因此 F 的每一個性質，都來自對數的某個性質（換底公式（change of base）、$\ln(fg)=\ln f+\ln g$），再配合積分的線性（linearity）。至於第 (iv) 部分的逆命題（converse），條件會變成一條含積分的方程，對它求導後，便化為一條簡單的微分方程（differential equation）。

解答

全文中記

$$\ln F(y)=\frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (y>0),$$

這就是把定義兩邊取對數後的形式。

第 (i) 部分

由於 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$\log_a$ 有定義，而且 $\ln a\neq 0$；由換底公式得 $\log_a f(x)=\dfrac{\ln f(x)}{\ln a}$。此外，對任何實數 t，都有 $a^t=\mathrm{e}^{t\ln a}$。因此

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{y}\int_0^y \log_a f(x)\,\mathrm{d}x} &= \exp\left(\ln a\cdot\frac{1}{y}\int_0^y \frac{\ln f(x)}{\ln a}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right)=F(y), \end{aligned}$$

其中我們把常數 $\frac{1}{\ln a}$ 提到積分號外，再與 $\ln a$ 約去。這就是所求的結果。（條件 $a\neq 1$ 正是容許我們除以 $\ln a$ 的原因。）

第 (ii) 部分

由於 $f(x) > 0$ 且 $g(x) > 0$，故 $h(x) > 0$，所以 H 有定義，且 $\ln h(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$。由積分的線性，

$$\ln H(y) = \frac{1}{y}\int_0^y \big(\ln f(x) + \ln g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \ln F(y) + \ln G(y) = \ln\big(F(y)G(y)\big).$$

由於 ln 是一一對應的（one-to-one），故 $H(y) = F(y)G(y)$。

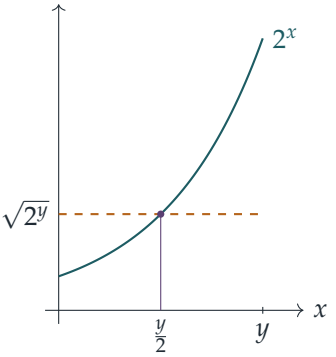
第 (iii) 部分

這裏 $f(x) = b^x > 0$，且 $\ln f(x) = x\ln b$，所以

$$\ln F(y) = \frac{1}{y}\int_0^y x\ln b\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\cdot\frac{y^2}{2}\ln b = \frac{y}{2}\ln b.$$

因此 $F(y) = \mathrm{e}^{\frac{y}{2}\ln b} = b^{y/2} = \sqrt{b^y}$，即為所求。

下圖展示 $b = 2$ 時這個結果的意思：2^x 在 $[0, y]$ 上的幾何平均，等於 2^x 在中點 $\frac{y}{2}$ 的值，因為 $\ln 2^x$ 是線性的，而線性函數的平均值就是它在中點的值。



第 (iv) 部分

正如題目隱含地假設的一樣，我們假設 f 是連續（continuous）的，使各積分存在，並可使用微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）。設 $\phi(x) = \ln f(x)$；由於 $f(x) > 0$，它有定義，而且是連續的。取對數後，假設 $F(y) = \sqrt{f(y)}$ 表示

$$\frac{1}{y}\int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\phi(y) \quad \text{即} \quad \int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{y}{2}\phi(y) \qquad \text{對所有} y > 0. \qquad (*)$$

想一想 怎樣才能消去積分？我們又是否可以這樣做？

對 y 求導。由微積分基本定理，$(*)$ 的左方是可微（differentiable）的，其導數為 $\phi(y)$。所以右方也可微，因此當 $y>0$ 時，$\phi(y)=\frac{2}{y}\times$ (左方) 也可微。對 $(*)$ 求導，右方使用乘積法則（product rule）：

$$\phi(y)=\tfrac{1}{2}\phi(y)+\tfrac{y}{2}\phi'(y) \quad\Longrightarrow\quad y\,\phi'(y)-\phi(y)=0.$$

由於 $y>0$，我們可以除以 y^2，並認出這是由商法則（quotient rule）得出的導數：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\phi(y)}{y}\right)=\frac{y\phi'(y)-\phi(y)}{y^2}=0.$$

所以 $\phi(y)/y$ 在區間 $y>0$ 上是常數，設為 k（由均值定理（mean value theorem），在一個區間上導數為零的函數是常數）。因此 $\ln f(x)=kx$，且

$$f(x)=\mathrm{e}^{kx}=b^x, \qquad \text{其中} b=\mathrm{e}^k>0.$$

這對每個 $x>0$ 都成立；單一點 $x=0$ 的值不影響任何積分，而且由連續性，無論如何都有 $f(0)=1=b^0$。結合第 (iii) 部分，這說明幾何平均等於 $\sqrt{f(y)}$ 的函數，恰好就是函數 b^x。

驗算

- 在第 (iii) 部分取 $b=4$、$y=2$：$\ln F(2)=\frac{1}{2}\int_0^2 x\ln 4\,\mathrm{d}x=\ln 4$，所以 $F(2)=4=\sqrt{4^2}$；數值積分的結果與此吻合。
- 在第 (iv) 部分，試一個不是 b^x 形式的函數，例如 $f(x)=3\cdot 2^x$。由第 (ii) 及 (iii) 部分，$F(y)=3\cdot 2^{y/2}$，而 $\sqrt{f(y)}=\sqrt{3}\cdot 2^{y/2}$，所以條件不成立，理應如此。我們的論證會得出 $\phi(y)/y=\ln 2+\frac{\ln 3}{y}$，它並非常數。
- 第 (i) 及 (ii) 部分已用電腦對隨機的正函數、y 值，以及大於和小於 1 的底 a 作驗證。

常見錯誤

- 在第 (iv) 部分對 $(*)$ 求導時，忘記對 $\frac{y}{2}\phi(y)$ 使用乘積法則，結果完全丟失了 ϕ' 項。
- 單憑第 (iii) 部分便斷定 $f(x)=b^x$：第 (iii) 部分只說明 b^x 具有這個性質，並沒有說明其他函數都沒有。第 (iv) 部分是逆命題，需要獨立的論證。
- 在第 (i) 部分沒有指出哪裏需要 $a\neq 1$：正是這個條件使 $\log_a$ 有意義，並使 $\ln a\neq 0$。

STEP 之外

連續幾何平均是 $(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}$ 的積分版本；對凹函數（concave function）ln 應用琴生不等式（Jensen's inequality），可證明它永遠不會超過普通平均值 $\frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x$，這就

是連續版本的算術–幾何平均不等式（AM–GM inequality）。第 (iv) 部分是一個小例子，展示如何把函數方程（functional equation）化為微分方程來求解，而這需要小心處理可微性；在分析課程中，你會學到微積分基本定理究竟在甚麼情況下容許這樣做。如需嚴謹的理論背景，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2017，第 5 題

純數學 • 極坐標曲線

STEP III 2017，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s3-q5

關鍵思路

以 θ 為參數，把曲線寫成參數式（parametric form）：$x = f(\theta)\cos\theta$，$y = f(\theta)\sin\theta$。這樣斜率（gradient）便可由連鎖法則（chain rule）求得，而「以直角相交」就變成「兩斜率之積為 -1」。在最後一部分，曲線族 $r = a(1+\sin\theta)$ 經過 C 上的每一點，所以直角條件沿整條 C 都成立。於是條件便化為關於 f 的一階微分方程（first-order differential equation）。

解答

斜率

在曲線上，$x = f(\theta)\cos\theta$ 及 $y = f(\theta)\sin\theta$。用乘積法則（product rule）對 θ 求導，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

由連鎖法則，再把分子和分母同除以 $\cos\theta$（假設 $\cos\theta \neq 0$），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} = \frac{f'(\theta)\tan\theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta)\tan\theta}.$$

以直角相交的曲線

在交點處，兩條曲線對應同一個 θ。設 $t = \tan\theta$，並以 f, f', g, g' 表示該處的值。若兩條切線（tangent）都不是鉛垂的，則兩曲線垂直（perpendicular）當且僅當兩斜率之積為 -1：

$$(f't + f)(g't + g) = -(f' - ft)(g' - gt).$$

把兩邊展開，含 $f'gt$ 和 $fg't$ 的項互相抵消，剩下

$$f'g't^2 + fg + f'g' + fgt^2 = 0 \iff (1+t^2)(f'g' + fg) = 0.$$

由於 $1 + t^2 = \sec^2\theta > 0$，得 $f'(\theta)g'(\theta) + f(\theta)g(\theta) = 0$，此即所求。

> **想一想** 若其中一條切線是鉛垂的，或 $\cos\theta = 0$，以致斜率或 $\tan\theta$ 不存在，又會怎樣？

改用方向向量（direction vector）代替斜率。$r = f(\theta)$ 的切線方向為 $\big(f'\cos\theta - f\sin\theta,\ f'\sin\theta + f\cos\theta\big)$，$g$ 的情況亦同理。兩者的純量積（scalar product）為

$$(f'\cos\theta - f\sin\theta)(g'\cos\theta - g\sin\theta) + (f'\sin\theta + f\cos\theta)(g'\sin\theta + g\cos\theta) = f'g' + fg,$$

因為交叉項互相抵消，且 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。所以在任何情況下，垂直的條件都是同一個。

求 $f(\theta)$

對於 $r = a(1+\sin\theta)$，有 $g'(\theta) = a\cos\theta$。

> **想一想** 這個條件只在兩曲線相交之處成立。為何我們可以在 C 的每一點上使用它？

任取 C 上一點，其角度為 θ，且 $f(\theta) > 0$、$\sin\theta \neq -1$。取 $a = f(\theta)/(1+\sin\theta) > 0$，便得到曲線族中一條在同一 θ 經過該點的曲線。依題設，這條曲線與 C 以直角相交，因此

$$f'(\theta)\, a\cos\theta + f(\theta)\, a(1+\sin\theta) = 0.$$

除以 $a > 0$，每個這樣的 θ 都滿足

$$f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)(1+\sin\theta) = 0.$$

乘以 $1-\sin\theta$，並利用 $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$：

$$\cos\theta\left[f'(\theta)(1-\sin\theta) + f(\theta)\cos\theta\right] = 0.$$

在 $\cos\theta \neq 0$ 之處，括號內的式子為零。由商法則（quotient rule），括號內的式子等於 $(1-\sin\theta)^2$ 乘以 $f(\theta)/(1-\sin\theta)$ 的導數：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{f(\theta)}{1-\sin\theta}\right) = \frac{f'(\theta)(1-\sin\theta) + f(\theta)\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2} = 0.$$

所以在區間 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 上，$f(\theta) = k(1-\sin\theta)$，其中 k 為常數。（等價地，我們也可以對 $f'/f = -(1+\sin\theta)/\cos\theta = -\cos\theta/(1-\sin\theta)$ 分離變數（separation of

variables）。曲線經過 $r=4$、$\theta=-\frac{1}{2}\pi$，故由連續性（continuity）得 $k(1+1)=4$，即 $k=2$。在 $\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 上，同樣的論證亦適用，而 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ 與 $-\frac{1}{2}\pi$ 是同一方向，所以同樣有 $k=2$。因此

$$\boxed{f(\theta)=2(1-\sin\theta)}$$

這是另一條心形線（cardioid），即 $r=2(1+\sin\theta)$ 關於 x 軸的反射。

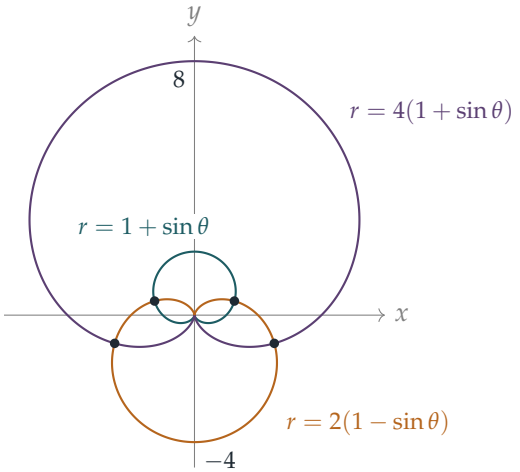
草圖

曲線 $r=a(1+\sin\theta)$ 是一條尖點（cusp）在原點、關於 y 軸對稱的心形線。它向上伸至 $(0,2a)$，並在 $(\pm a,0)$ 與 x 軸相交。曲線 $r=2(1-\sin\theta)$ 是形狀相同但開口向下的心形線：其尖點在原點，在 $(\pm2,0)$ 與 x 軸相交，並向下伸至 $(0,-4)$。

交點可由解 $a(1+\sin\theta)=2(1-\sin\theta)$ 得出，結果為 $\sin\theta=\frac{2-a}{2+a}$：

- $a=1$：$\sin\theta=\frac{1}{3}$，$r=\frac{4}{3}$，交點為 $\left(\pm\frac{8\sqrt{2}}{9},\frac{4}{9}\right)$；
- $a=4$：$\sin\theta=-\frac{1}{3}$，$r=\frac{8}{3}$，交點為 $\left(\pm\frac{16\sqrt{2}}{9},-\frac{8}{9}\right)$。

三條曲線亦全都經過原點。



驗算

- 在 $\theta=0$ 時，曲線 $r=2(1-\sin\theta)$ 位於 $(2,0)$，而 $r=2(1+\sin\theta)$ 亦經過同一點。該處 $f=2$、$f'=-2$、$g=2$、$g'=2$，所以 $f'g'+fg=-4+4=0$，與預期相符。
- 在 $\theta=-\frac{1}{2}\pi$ 時，$f=2(1+1)=4$，符合要求。
- 已用電腦確認在 $\left(\frac{8\sqrt{2}}{9},\frac{4}{9}\right)\approx(1.257,0.444)$ 的兩條切線互相垂直；對許多隨機取的 a 值，切線亦同樣經確認為垂直。

常見錯誤

- 只在一個交點使用直角條件。「對每個正數 a」的用意，正是要令條件在 C 的每一點都成立。
- 忘記 $f(\theta)/(1-\sin\theta)$ 在 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 沒有定義，因而在決定常數時不夠謹慎。
- 把 $r = 2(1-\sin\theta)$ 畫成開口向上：由於在 $\theta = -\frac{1}{2}\pi$ 時 $r = 4$，這條曲線主要位於 x 軸下方。

STEP 之外

若一族曲線與另一族曲線處處以直角相交，這兩族曲線便稱為一對正交軌線(orthogonal trajectories)。這裏的心形線 $r = a(1+\sin\theta)$ 與 $r = b(1-\sin\theta)$ 就構成這樣的一對。這個概念出現在大學一年級的微分方程課程中，亦在物理學裏再次出現：場線 (field lines) 與等勢線(equipotentials)以直角相交。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）講解了如何求正交軌線。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）則展示了共形映射（conformal map）如何產生這類曲線族。

詳細解答

STEP III 2017，第 6 題

純數學 • 代換積分法

STEP III 2017，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

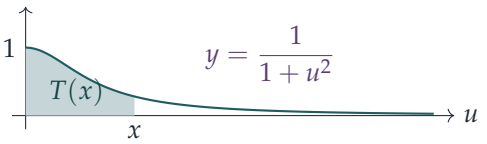
step.maths.org/questions/17-s3-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 4.2 節由一個積分建立三角學中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/trig-from-integral.html

關鍵思路

我們只憑積分就要建立反正切函數（inverse tangent），所以每一個性質都必須由代換（substitution）得出。代換 $u \mapsto 1/u$ 把區間 $(0, x)$ 與 $(1/x, \infty)$ 互換；而默比烏斯（Möbius）代換 $v = \frac{u+a}{1-au}$ 使連同微分在內的被積函數（integrand）$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 保持不變，因此它只是平移了積分上下限。在最後一部分適當選取數值，使平移後的上下限落回一個已知的值，便得到一條可以解出的方程。

解答



$T(x)$ 是陰影部分的面積；T_∞ 是 $u \geq 0$ 時曲線下方的全部面積。

第 (i) 部分

在 $T(x)$ 的積分中代入 $u = 1/t$，於是 $\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$；當 u 由 0 變到 x 時，t 由 ∞ 下降到 $1/x$。於是

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_{\infty}^{1/x} \frac{1}{1+t^{-2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = T_\infty - T(x^{-1}). \end{aligned}$$

（由於 T_∞ 是有限值，從 0 開始的積分是確實存在的積分（proper integral），所以把積分區間拆開是合理的。）這正是所求的結果。

第 (ii) 部分

導數。由商法則（quotient rule），當 $u \neq a^{-1}$ 時，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

另一方面，

$$1+v^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2u^2+u^2+a^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

除以 $1+u^2$，得 $\dfrac{1+v^2}{1+u^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-au)^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$，正如所求。

加法公式（addition formula）。取 $a > 0$ 及 $0 < x < \frac{1}{a}$。當 $0 \le u \le x$ 時，$1-au \ge 1-ax > 0$，所以 v 在整個區間上有定義且連續，並且 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} > 0$，因此 v 由 $v(0) = a$ 遞增至 $v(x) = \frac{x+a}{1-ax}$。

> **想一想** 為甚麼 $x < \frac{1}{a}$ 這個條件重要？

若 x 達到 $\frac{1}{a}$，v 便會在積分區間內趨於無窮大，代換就失去意義。在 $x < \frac{1}{a}$ 的情況下，它是 $[0, x]$ 上一個光滑而遞增的變量代換。

導數的結果正好表示 $\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{1}{1+v^2}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$，因此

$$\begin{aligned} T(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} &= \int_a^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} \\ &= \int_0^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} - \int_0^a \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a). \end{aligned}$$

這裏 T 的兩個自變量都是正數，所以一切都有定義。

第一個推論。記 $X = \frac{x+a}{1-ax}$。先後對 x 和 a 應用第 (i) 部分，

$$T(x^{-1}) = T_\infty - T(x) = T_\infty - T(X) + T(a) = T_\infty - T(X) + T_\infty - T(a^{-1}),$$

即 $T(x^{-1}) = 2T_\infty - T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a^{-1})$。

第二個推論。已知 $b > 0$ 及 $y > \frac{1}{b}$，設 $x = \frac{1}{y}$、$a = \frac{1}{b}$。於是 $x > 0$、$a > 0$，而 $y > \frac{1}{b}$ 等價於 $x < b = \frac{1}{a}$，所以上一個結果適用。分子分母同乘以 by，

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{by}} = \frac{b+y}{by-1},$$

又 $x^{-1} = y$、$a^{-1} = b$，所以

$$T(y) = 2T_\infty - T\left(\frac{y+b}{by-1}\right) - T(b).$$

第 (iii) 部分

$T(\sqrt{3})$。在最後一個結果中取 $y = b = \sqrt{3}$；由於 $\sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{3}}$，條件 $y > \frac{1}{b}$ 成立。此時

$$\frac{y+b}{by-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3},$$

所以 $T(\sqrt{3}) = 2T_\infty - T(\sqrt{3}) - T(\sqrt{3})$，即 $3T(\sqrt{3}) = 2T_\infty$，故

$$T(\sqrt{3}) = \tfrac{2}{3}T_\infty.$$

先求 $T(1)$。在第 (i) 部分取 $x = 1$，得 $T(1) = T_\infty - T(1)$，所以 $T(1) = \frac{1}{2}T_\infty$。

> ? **想一想** 當 $x = a$ 時，a 取甚麼值才能使 $\frac{x+a}{1-ax}$ 等於 1？

我們需要 $\frac{2a}{1-a^2} = 1$，即 $a^2 + 2a - 1 = 0$，其正根為 $a = \sqrt{2} - 1$。

$T(\sqrt{2}-1)$。於是在加法公式中取 $x = a = \sqrt{2} - 1 > 0$。條件 $x < \frac{1}{a}$ 即 $\sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} + 1$，顯然成立。由於 $a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$，

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-2\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} = 1,$$

所以 $T(\sqrt{2}-1) = T(1) - T(\sqrt{2}-1)$，得

$$T(\sqrt{2}-1) = \tfrac{1}{2}T(1) = \tfrac{1}{4}T_\infty.$$

驗算

當然，T 其實就是 arctan，而 $T_\infty = \frac{\pi}{2}$；題目不准我們使用這些事實，但我們大可以用它們來核對：$\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$。用數值方法（辛普森法則（Simpson's rule））計算這些積分，得 $T_\infty \approx 1.570796$、$T(\sqrt{3}) \approx 1.047198$ 及 $T(\sqrt{2}-1) \approx 0.392699$，與 $\frac{2}{3}T_\infty$ 和 $\frac{1}{4}T_\infty$ 吻合。第 (ii) 部分的加法公式其實就是大家熟悉的 $\tan(A+B)$ 公式換了個樣子，其中 $x = \tan A$、$a = \tan B$。

常見錯誤

- 代入 $u = 1/t$ 後忘記把上下限對調：正是 $\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ 中的負號把 $\int_{\infty}^{1/x}$ 變成 $\int_{1/x}^{\infty}$。
- 在第 (iii) 部分暗中使用 $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 或 arctan 的性質：題目禁止這樣做，重點在於一切都要由第 (i) 和第 (ii) 部分推出。
- 沒有就所用的具體數值檢查條件 $x < \frac{1}{a}$ 和 $y > \frac{1}{b}$。

STEP 之外

用積分定義一個函數，再從定義推導出它的全部性質，正是分析（analysis）課程嚴格建立 ln、exp、arctan 甚至 π 的方法：在這裏，π 可以直接定義為 $2T_{\infty}$。代換 $v = \frac{u+a}{1-au}$ 是一個默比烏斯變換（Möbius transformation），而它保持 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 不變這一事實，反映了圓的旋轉。分析方面可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；默比烏斯映射的幾何方面，可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）。

詳細解答

STEP III 2017，第 7 題

純數學 • 橢圓的切線

> **STEP III 2017，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q7

關鍵思路

參數（parameter）t 把「在 T 點的切線（tangent）通過 (X, Y)」這個條件化為一條關於 t 的二次方程（quadratic equation）。每一個根（root）都對應一個切點（point of contact），所以數從一點出發的切線條數，就等於數實根的個數，也就是判別式（discriminant）的問題。在第 (ii) 部分，兩個切點的參數 p 和 q 正好是該二次方程的兩個根，因此它們的和與積可以直接從係數讀出。

解答

該點位於橢圓上

代入 T 的坐標，

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1 + 2t^2 + t^4}{(1+t^2)^2} = 1,$$

所以對每一個實數 t，T 都位於橢圓（ellipse）上。

第 (i) 部分

對 t 求導，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{2b(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

與其把兩者相除（在 $t = 0$ 時會出問題），不如使用橢圓在 (x_0, y_0) 處的標準切線方程 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$；它的法向量（normal）方向 $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$ 與上面的速度向量垂直，因為

$\frac{1-t^2}{a}\cdot(-4at)+\frac{2t}{b}\cdot 2b(1-t^2)=0$。因此在 T 點的切線 L 為

$$\frac{x(1-t^2)}{a(1+t^2)}+\frac{2ty}{b(1+t^2)}=1 \iff bx(1-t^2)+2aty=ab(1+t^2).$$

代入 $(x,y)=(X,Y)$，並按 t 的冪次整理：

$$bX-bXt^2+2aYt-ab-abt^2=0 \iff (a+X)bt^2-2aYt+b(a-X)=0,$$

即為所求。

*兩條切線。*反過來看：參數為 t 的點處的切線通過 (X,Y)，當且僅當 t 滿足這條方程。由於 $X\neq -a$ 且 $b\neq 0$，t^2 的係數不為零，所以這確實是一條二次方程，其判別式為

$$4a^2Y^2-4b^2(a+X)(a-X)=4\big(a^2Y^2-(a^2-X^2)b^2\big).$$

若 $a^2Y^2>(a^2-X^2)b^2$，判別式為正，所以有兩個相異實根 $t_1\neq t_2$。不同的 t 值給出橢圓上不同的點（映射 $t\mapsto T$ 是一一對應的（one-to-one）；令 $t=\tan\frac{\theta}{2}$，它就是熟悉的 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$，其中 $-\pi<\theta<\pi$）。不同的切點給出不同的切線，因為橢圓的切線只在其切點與橢圓相交。所以通過 (X,Y) 有兩條不同的切線。

? **想一想** 會不會遺漏了一條參數 t 取不到的切線？

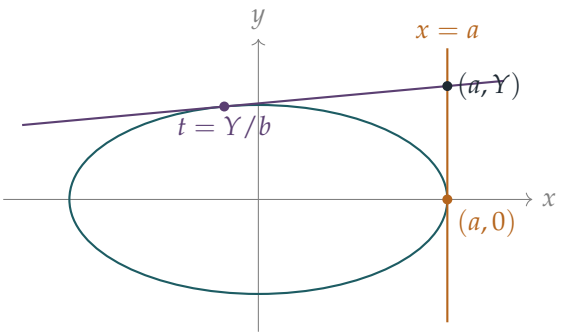
橢圓上唯一不能寫成 $(*)$ 形式的點是 $(-a,0)$（即 $t\to\infty$ 時的極限），其切線為 $x=-a$。這條直線只在 $X=-a$ 時才通過 (X,Y)，而這情況已被排除。所以該二次方程涵蓋了所有通過 (X,Y) 的切線。

*幾何意義。*把條件除以 $a^2b^2>0$，得

$$\frac{Y^2}{b^2}>1-\frac{X^2}{a^2} \iff \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}>1,$$

即 (X,Y) 位於橢圓之外。所以與圓的情況一樣，從橢圓外任何一點都可以作兩條切線。

*$X^2=a^2$ 的情況。*此時條件變為 $a^2Y^2>0$，即 $Y\neq 0$：該點位於其中一條鉛垂線 $x=\pm a$ 上，但不在頂點（vertex）$(\pm a,0)$。其中一條切線就是鉛垂線 $x=\pm a$ 本身，它在 $(\pm a,0)$ 與橢圓相切。另一條則在別處與橢圓相切：當 $X=a$ 時，二次方程變為 $2abt^2-2aYt=0$，其根為 $t=0$（鉛垂切線）及 $t=Y/b\neq 0$；當 $X=-a$ 時，它變為 $-2aYt+2ab=0$，得 $t=b/Y$，而第二條切線是 $x=-a$，即在缺失的點 $(-a,0)$ 處的切線。下圖展示 $X=a$、$Y>0$ 的情況。



所以當 $X^2 = a^2$ 時結果仍然成立：只要 $Y \neq 0$，即該點位於橢圓之外，通過 (X, Y) 就有兩條不同的切線。

第 (ii) 部分

在 P 點的切線通過 (X, Y)，所以由第 (i) 部分，p 是

$$(a + X)bt^2 - 2aYt + b(a - X) = 0,$$

的一個根，q 亦然。由於 $X \neq -a$，這是一條二次方程，而且 $p \neq q$（因為 $P \neq Q$），所以 p 和 q 就是它的兩個根。因此

$$pq = \frac{b(a - X)}{b(a + X)} = \frac{a - X}{a + X} \quad \Longrightarrow \quad (a + X)pq = a - X,$$

即為所求，而且

$$p + q = \frac{2aY}{b(a + X)}.$$

最後部分

在切線 $bx(1 - t^2) + 2aty = ab(1 + t^2)$ 中令 $x = 0$，得 $2aty = ab(1 + t^2)$。兩條切線確實與 y 軸相交，所以 $p, q \neq 0$（在 $t = 0$ 時切線為 $x = a$），並且

$$y_1 = \frac{b(1 + p^2)}{2p}, \qquad y_2 = \frac{b(1 + q^2)}{2q}.$$

寫成 $\frac{1+p^2}{p} = p + \frac{1}{p}$，

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2}\left(p + q + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{b}{2}(p + q)\left(1 + \frac{1}{pq}\right) = \frac{b(p + q)(1 + pq)}{2pq}.$$

由上面的結果，$1 + pq = \dfrac{2a}{a + X}$，所以利用 $pq = \dfrac{a - X}{a + X} \neq 0$，

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{2aY}{b(a + X)} \cdot \frac{2a}{a + X} \cdot \frac{a + X}{a - X} = \frac{2a^2Y}{(a + X)(a - X)} = \frac{2a^2Y}{a^2 - X^2}.$$

令它等於 $2b$，並乘以 $(a^2-X^2)/(2a^2b)$（由於 $X^2\neq a^2$，它不為零）：

$$\frac{Y}{b}=\frac{a^2-X^2}{a^2}=1-\frac{X^2}{a^2}\iff\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y}{b}=1,$$

即為所求。所以交點位於一條通過 $(\pm a,0)$ 和 $(0,b)$ 的拋物線（parabola）上。

驗算

- 取 $a=2$、$b=1$ 及 $(X,Y)=(4,1)$（在橢圓外，因為 $4+1>1$），二次方程為 $6t^2-4t-2=0$，其根為 $t=1$ 及 $t=-\frac{1}{3}$：分別對應在 $(0,1)$ 和 $(1.6,-0.6)$ 的切線。這兩條切線 $y=1$ 和 $2x-3y=5$ 都確實通過 $(4,1)$。此時 $pq=-\frac{1}{3}=\frac{2-4}{2+4}$，$p+q=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$，與公式的預測一致。
- 在中心 $(0,0)$，判別式為 $-4a^2b^2<0$：沒有切線，正如從橢圓內部出發所預期的。
- 用電腦檢驗了大量隨機的橢圓及點對 P、Q，直接求兩條切線的交點；pq、$p+q$ 和 y_1+y_2 的公式全部吻合，而且當 $y_1+y_2=2b$ 時，交點滿足 $X^2/a^2+Y/b=1$。

常見錯誤

- 用 $\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$ 求斜率（gradient），卻忘記它在 $t=0$ 時失效，因為那裏的切線是鉛垂的。
- 在 $X=-a$ 時仍把 $(a+X)bt^2-2aYt+b(a-X)=0$ 當作二次方程；這正是 $X^2=a^2$ 的情況需要另行處理的原因。
- 只寫到「判別式為正」便停下，而沒有說明為何兩個根會給出兩條不同的直線。

STEP 之外

圓錐曲線（conic）的有理參數化（rational parametrisation）$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$ 是代數幾何（algebraic geometry）的起點：正因如此，每條擁有一個有理點的圓錐曲線都有無窮多個有理點，而它亦是畢氏三元組（Pythagorean triples）分類的基礎。從外點作的一對切線引出極線（polar）的概念，並通往射影幾何（projective geometry）；在射影幾何中，$t=\infty$ 處那個令人煩惱的缺失點變成一個普通的點。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）收錄了更多這類題目。

詳細解答

STEP III 2017，第 8 題

純數學 • 分部求和法

> **STEP III 2017，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q8

關鍵思路

開首的恆等式是分部積分（integration by parts）的離散版本，即「分部求和」（summation by parts）：它把一個涉及 b 的差分的和，換成一個涉及 a 的差分的和。要把它用於三角和，我們選取 b_m，使 $b_{m+1} - b_m$ 產生我們想要的項；和差化積公式（sum-to-product formula）可把正弦或餘弦之差化為單一乘積。然後選 a_m 為 1 或 m，便能令另一邊變得容易處理。

解答

恆等式

$a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1$ 這個量可以伸縮相消（telescopes）：

$$a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 = \sum_{m=1}^{n} \left(a_{m+1}b_{m+1} - a_mb_m\right).$$

在每個括號內加上再減去 a_mb_{m+1}，得

$$a_{m+1}b_{m+1} - a_mb_m = a_m(b_{m+1} - b_m) + b_{m+1}(a_{m+1} - a_m).$$

對 $m = 1, \ldots, n$ 求和並移項，便正好得到所求的恆等式。

在各個三角部分中，我們一直假設 $\sin \frac{1}{2}x \neq 0$（即 x 不是 2π 的倍數），使 $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}x$ 有定義。

第 (i) 部分

取 $b_m = \sin mx$，以 $A = (m+1)x$、$B = mx$ 代入和差化積公式，得

$$b_{m+1} - b_m = \sin(m+1)x - \sin mx = 2\cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x \,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

現在對每個 m 取 $a_m = 1$，於是 $a_{m+1} - a_m = 0$，恆等式中最後的和便等於零。恆等式變成

$$2\sin\tfrac{1}{2}x \sum_{m=1}^{n} \cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x = b_{n+1} - b_1 = \sin(n+1)x - \sin x.$$

兩邊除以 $2\sin\frac{1}{2}x \neq 0$，

$$\sum_{m=1}^{n} \cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x = \tfrac{1}{2}\left(\sin(n+1)x - \sin x\right)\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}x,$$

此即所求。

第 (ii) 部分

因子 m 提示我們取 $a_m = m$，使 $a_{m+1} - a_m = 1$。這樣我們便需要 $b_{m+1} - b_m$ 是 $\sin mx$ 的倍數。

> **想一想** 選取哪個 b_m，才能令 $b_{m+1} - b_m$ 成為 $\sin mx$ 的倍數？

在第 (i) 部分中，於 $(m+1)x$ 和 mx 處兩個正弦之差，給出了在中點 $(m+\frac{1}{2})x$ 處的餘弦。要得到 $\sin mx$，我們需要一個餘弦之差，而其兩個自變量的中點是 mx，所以取 $b_m = \cos\left(m-\frac{1}{2}\right)x$。利用 $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$（這亦可由題目中的第一個提示推出），

$$b_{m+1} - b_m = \cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x - \cos\left(m-\tfrac{1}{2}\right)x = -2\sin mx \,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

記 $S = \sum_{m=1}^{n} m\sin mx$。取 $a_m = m$，恆等式給出

$$-2\sin\tfrac{1}{2}x\, S = (n+1)\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x - \cos\tfrac{1}{2}x - \sum_{m=1}^{n} \cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x.$$

最後的和正是第 (i) 部分的結果。代入後，兩邊乘以 $-2\sin\frac{1}{2}x$：

$$4\sin^2\tfrac{1}{2}x\, S = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x - 2(n+1)\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x \,\sin\tfrac{1}{2}x + \sin(n+1)x - \sin x.$$

現在化簡兩個乘積：

- $2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \sin x$，它與 $-\sin x$ 互相抵消；
- 由 $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$，取 $A = (n+\frac{1}{2})x$、$B = \frac{1}{2}x$，

$$2\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x \,\sin\tfrac{1}{2}x = \sin(n+1)x - \sin nx.$$

因此

$$\begin{aligned} 4\sin^2\tfrac{1}{2}x\,S &= -(n+1)\big(\sin(n+1)x - \sin nx\big) + \sin(n+1)x \\ &= -n\sin(n+1)x + (n+1)\sin nx. \end{aligned}$$

兩邊除以 $4\sin^2\frac{1}{2}x$，

$$\sum_{m=1}^{n} m\sin mx = \Big(-\tfrac{n}{4}\sin(n+1)x + \tfrac{n+1}{4}\sin nx\Big)\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}x,$$

所以

$$p = -\frac{n}{4}, \qquad q = \frac{n+1}{4}.$$

驗算

- 當 $n = 1$ 時，利用 $1-\cos x = 2\sin^2\frac{1}{2}x$，公式給出 $\frac{1}{4}(2\sin x - \sin 2x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin x\,(1-\cos x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x = \sin x$。這正是唯一的一項 $1\cdot\sin x$。
- 數值上，取 $n = 3$ 及 $x = 1$：$\sin 1 + 2\sin 2 + 3\sin 3 \approx 3.08343$，而 $\big(-\frac{3}{4}\sin 4 + \sin 3\big)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2} \approx 3.08343$ 亦然。
- 第 (ii) 部分亦可透過把 $\sum_{m=1}^{n}\cos mx$ 對 x 求導數（differentiating）得出，結果是 $-S$；這是一個有用的獨立驗算。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分選取 $b_m = \cos mx$：這樣差便是 $\sin(m+\frac{1}{2})x$ 的倍數，而不是 $\sin mx$ 的倍數，方法因而卡住。
- 在 $\cos A - \cos B$ 中弄錯正負號：它等於 $-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$，前面有負號。
- 在除以 $\sin\frac{1}{2}x \neq 0$ 中的那個量之前，忘記先說明它不為零。

STEP 之外

分部求和（阿貝爾求和，Abel summation）是分部積分的離散孿生兄弟，也是大學一年級分析中的主力工具。配合像第 (i) 部分那樣的界——它顯示 $\cos(m+\frac{1}{2})x$ 的部分和（partial sums）保持有界——它可以證明狄利克雷判別法（Dirichlet's test）：例如，$\sum\frac{\sin mx}{m}$ 對每個 x 都收斂（converges）。像第 (ii) 部分那樣的和亦出現於傅里葉級數（Fourier series）中，這類閉合形式正是研究收斂性的起點。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對阿貝爾求和及狄利克雷判別法有清晰的論述。

詳細解答

STEP III 2017，第 9 題

力學 • 連接質點與能量

STEP III 2017，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

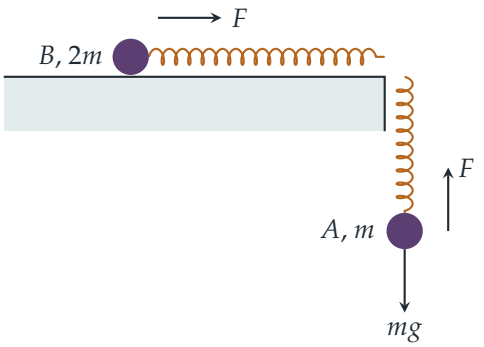
step.maths.org/questions/17-s3-q9

關鍵思路

彈簧的張力（tension）未知，而且隨時間改變，但它以相同大小作用於兩個質點上。所以，只要把兩條運動方程（equations of motion）按適當比例相加，張力就會互相抵消，剩下一條可以直接積分（integrate）的關係式。在第二部分，這條積分後的關係告訴我們兩個質點在時間 T 時的位置，以及它們的速率之間有何聯繫。接着，能量守恆（conservation of energy）給出第二條方程，兩者合起來便可確定 B 的速率。

解答

我們把 A 和 B 視為質點，並把彈簧視為輕彈簧。桌面光滑，而彈簧光滑地繞過桌邊。釋放後，A 鉛垂下落，B 則沿桌面向桌邊滑動。設時間 t 時彈簧的張力為 F。當 $x < a$ 時，B 仍在桌面上。



關係式 $y + 2x = \frac{1}{2}gt^2$

對 A 取向下為 y 的正方向，對 B 取向桌邊為 x 的正方向。由牛頓（Newton）第二定律（Newton's second law）：

$$\text{對}A\text{(鉛垂方向)：}\quad m\ddot{y} = mg - F,$$
$$\text{對}B\text{(水平方向)：}\quad 2m\ddot{x} = F.$$

（對 B 而言，重量與法向反作用力（normal reaction）互相抵消，而且沒有摩擦力（friction）。）把兩條方程相加便消去 F：

$$m\ddot{y} + 2m\ddot{x} = mg \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} + 2\ddot{x} = g.$$

兩個質點都由靜止開始，且 $x = y = 0$。積分一次得 $\dot{y} + 2\dot{x} = gt$，由於 $t = 0$ 時兩個速度皆為零，所以沒有常數項。再積分一次得

$$y + 2x = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

同樣沒有常數項，這正是所求的結果。

> **想一想** 我們不知道 F，因為它取決於不斷改變的伸長量（extension）$y - x$。那我們怎樣仍然能得出結論？

我們根本不需要 F。只要把兩條方程乘以適當的因子（這裏只需直接相加），F 就會以相反的符號出現。組合 $y + 2x$ 是類似動量（momentum）的量 $my + 2mx$ 的 $1/m$ 倍，而驅動它的唯一外力就是 A 的重量。

B 在時間 T 時的速率

在時間 $T = \sqrt{6a/g}$ 時，質點 B 到達桌邊，所以 $x = a$。由於 $\frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g \cdot \frac{6a}{g} = 3a$，由第一部分得

$$y + 2a = 3a \quad\Longrightarrow\quad y = a.$$

因此在時間 T 時，彈簧的伸長量為 $y - x = a - a = 0$。彈簧再次回到自然長度（natural length），不儲存任何彈性勢能（elastic energy）。

設 u 和 v 分別為 B 和 A 在時間 T 時的速率。由積分一次後的關係式 $\dot{y} + 2\dot{x} = gt$，在 $t = T$ 時得

$$v + 2u = gT = \sqrt{6ag}. \tag{1}$$

能量。桌面光滑而彈簧是輕的，所以機械能（mechanical energy）守恆。開始時，兩個質點都靜止，彈簧未被拉伸。在時間 T 時，A 下降了距離 a，而彈簧再次處於未拉伸狀態，所以失去的勢能（potential energy）mga 全部轉化為動能（kinetic energy）：

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(2m)u^2 = mga \quad\Longrightarrow\quad v^2 + 2u^2 = 2ga. \tag{2}$$

想一想 兩條方程，其中一條是二次的：我們不是應該預期有兩個可能的速率嗎？

把由 (1) 得出的 $v = \sqrt{6ag} - 2u$ 代入 (2)：

$$\begin{aligned} 6ag - 4\sqrt{6ag}\,u + 4u^2 + 2u^2 &= 2ga \\ 6u^2 - 4\sqrt{6ag}\,u + 4ag &= 0 \\ 3u^2 - 2\sqrt{6ag}\,u + 2ag &= 0. \end{aligned}$$

判別式（discriminant）為 $4 \cdot 6ag - 4 \cdot 3 \cdot 2ag = 0$，所以這個二次式是完全平方（perfect square），只有一個根：

$$\left(\sqrt{3}\,u - \sqrt{2ag}\right)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2ag}{3}}.$$

所以 B 到達桌邊時的速率為 $\sqrt{2ag/3}$，正如所求。由 (1)，$v = \sqrt{6ag} - 2\sqrt{2ag/3} = \sqrt{2ag/3}$，兩者亦相同。在那一刻，兩個質點以相同速率運動，這與彈簧處於自然長度的情況吻合。

驗算

- 重根（repeated root）是有意義的。當總「動量」$v + 2u$ 固定時，動能 $\frac{1}{2}mv^2 + mu^2$ 在 $v = u$ 時最小，而這裏的最小值恰好是 mga。所以能量方程與 (1) 只有在 $u = v$ 時才能同時成立，此時由 (1) 直接得 $3u = \sqrt{6ag}$。
- 完整求解運動（題目叫我們不要這樣做）會得到 $\omega T = 2\pi$，其中 $\omega^2 = 3\lambda/(2am)$：伸長量恰好經歷一次完整的振動，然後回到零。以 $a = 1.3\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 進行逐步數值積分（numerical integration），得 $x(T) = y(T) = a$，而兩個速率都等於 $2.9143\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \sqrt{2ag/3}$。
- 量綱（dimensions）：$\sqrt{ag}$ 是速率，$\sqrt{a/g}$ 是時間。

常見錯誤

- 忘記彈簧一般而言帶有彈性勢能。這個論證之所以成立，只是因為在時間 T 時 $x = y = a$，使伸長量為零。必須明確證明這一點。
- 只寫出能量方程，然後嘗試從中解出 u。這條方程有兩個未知數，所以我們還需要關係式 (1)。

STEP 之外

量 $my + 2mx$ 的表現就像動量：內力（這裏是彈簧張力）在其中互相抵消，只有外力才能改變它。這是質點系力學的起點。一般而言，我們把運動分拆為質心（centre of mass）部分和相對部分，而這裏的相對坐標 $y - x$ 作簡諧運動（simple harmonic motion）。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）細緻地發展了這些概念。

詳細解答

STEP III 2017，第 10 題

力學 • 轉動的剛體

STEP III 2017，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s3-q10

關鍵思路

在質點未滑動（slip）之前，桿與質點作為一個剛體（rigid body）一同繞鉸鏈（hinge）轉動，因此能量守恆（conservation of energy）可立即給出 $\dot{\theta}$，再求導便得 $\ddot{\theta}$。此時質點繞 P 作圓周運動，所以其加速度有熟悉的徑向（radial）分量和橫向（transverse）分量。單獨對質點應用牛頓第二定律（Newton's second law），沿桿方向及垂直於桿方向分解，便得到摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction）；當摩擦力達到反作用力的 μ 倍時，質點開始滑動。

解答

能量方程

把質點視為質點模型（point mass），並假設鉸鏈光滑（smooth）。均勻桿繞其端點 P 的轉動慣量（moment of inertia）為 $\frac{1}{3}m(3a)^2 = 3ma^2$，而與 P 相距 ℓ 的質點則貢獻 $m\ell^2$。在沒有滑動時，整個系統是一個以角速度（angular speed）$\dot{\theta}$ 繞 P 轉動的剛體，其動能（kinetic energy）為

$$\tfrac{1}{2}\left(3ma^2 + m\ell^2\right)\dot{\theta}^2.$$

當桿轉過角度 θ 時，其中點（與 P 相距 $\frac{3}{2}a$）下降了 $\frac{3}{2}a\sin\theta$，而質點下降了 $\ell\sin\theta$。鉸鏈的反作用力不作功（其作用點固定不動），而摩擦力和法向反作用力是系統的內力，在沒有滑動時不作淨功。由靜止開始，能量守恆給出

$$\tfrac{1}{2}m\left(3a^2 + \ell^2\right)\dot{\theta}^2 = mg\left(\tfrac{3}{2}a + \ell\right)\sin\theta,$$

兩邊乘以 $2/m$，即得

$$(3a^2 + \ell^2)\dot{\theta}^2 = g(3a + 2\ell)\sin\theta,$$

此即所求。

角加速度

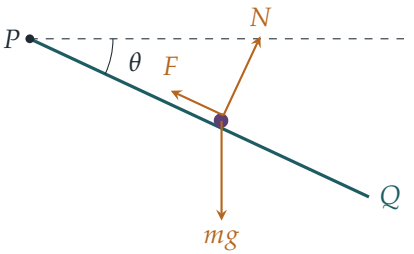
對 t 求導，得

$$2(3a^2+\ell^2)\dot\theta\,\ddot\theta = g(3a+2\ell)\cos\theta\,\dot\theta.$$

當 $t>0$ 時 $\dot\theta\neq 0$，故可兩邊除以 $2\dot\theta$（$t=0$ 時的結果可由連續性得出，或直接對 P 取力矩得出）：

$$\ddot\theta = \frac{g(3a+2\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

作用於質點的力



桿位於水平線下方，與水平成角 θ。桿對質點施加垂直於桿的法向反作用力 N（方向背離桿，因為質點位於桿的上方），以及沿桿方向的摩擦力 F，我們設其指向 P。質點繞 P 作半徑為 ℓ 的圓周運動，因此其加速度有一個垂直於桿、沿 θ 增加方向的分量 $\ell\ddot\theta$（向下並背離桿的上表面），以及一個沿桿指向 P 的分量 $\ell\dot\theta^2$。

在垂直於桿、沿 θ 增加的方向上，重力的分量為 $mg\cos\theta$，而 N 的方向相反：

$$mg\cos\theta - N = m\ell\ddot\theta.$$

沿桿指向 P 的方向上，重力的分量為 $-mg\sin\theta$（它把質點拉離 P）：

$$F - mg\sin\theta = m\ell\dot\theta^2.$$

法向反作用力

代入上面求得的 $\ddot\theta$，

$$N = mg\cos\theta - m\ell\ddot\theta = mg\cos\theta\left(1-\frac{\ell(3a+2\ell)}{2(3a^2+\ell^2)}\right)$$
$$= mg\cos\theta\,\frac{6a^2+2\ell^2-3a\ell-2\ell^2}{2(3a^2+\ell^2)} = \frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

由於 $\ell<2a$，因子 $2a-\ell$ 為正；而當 θ 為銳角時 $\cos\theta>0$。所以 $N>0$；特別地，在 θ 為銳角期間，法向反作用力不為零，質點保持與桿接觸。

開始滑動之時

由第二條方程及能量方程，

$$F = mg\sin\theta + m\ell\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta\left(1+\frac{\ell(3a+2\ell)}{3a^2+\ell^2}\right)$$
$$= mg\sin\theta\,\frac{3a^2+3a\ell+3\ell^2}{3a^2+\ell^2} = \frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2}.$$

當 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 時此式為正，所以摩擦力確實如假設般指向 P：若沒有摩擦力，質點便會沿桿向外滑出。

> ? **想一想** 為甚麼滑動的條件是 $F = \mu N$，而不是一條不等式？

在質點緊貼桿而不動時，摩擦力可提供不超過 μN 的任何大小的力，所以我們需要 $F \le \mu N$。當 $\theta = 0$ 時，$F = 0 < \mu N$。隨着 θ 增加，F 增大（與 $\sin\theta$ 成正比），而 N 減小（與 $\cos\theta$ 成正比），因此 F/N（它是 $\tan\theta$ 的一個正倍數）穩定遞增。質點在第一個使 $F = \mu N$ 的角度處即將滑動：

$$\frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2} = \mu\,\frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

約去 $3mg/(3a^2+\ell^2)$，再除以 $\cos\theta \ne 0$，得

$$\tan\theta = \frac{\mu a(2a-\ell)}{2(\ell^2+a\ell+a^2)},$$

此即所求。

若 $\ell > 2a$

N 的公式是在假設質點隨桿一同運動的前提下推導的。若 $\ell > 2a$，公式在 $\theta = 0$ 時給出 $N < 0$，這是不可能的：桿只能推質點，不能拉質點。所以即使在釋放的一刻，質點也不能隨桿一同運動。

要了解實際發生的情況，可單獨考慮桿。在釋放的一刻對 P 取力矩，

$$3ma^2\ddot{\theta} = mg\cdot\tfrac{3}{2}a \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\theta} = \frac{g}{2a},$$

因此桿上位於質點下方的點，起始時的向下加速度為 $\ell\ddot{\theta} = \frac{\ell}{2a}g$；當 $\ell > 2a$ 時，這大於 g。桿下落得比質點自由下落還要快。所以在釋放的一刻，質點便離開桿（兩者之間的反作用力為零），開始在重力作用下自由下落，而桿則獨自擺下。

驗算

- 對整個系統繞 P 取力矩，得 $(3ma^2+m\ell^2)\ddot{\theta} = mg\cos\theta\,(\frac{3}{2}a+\ell)$，與對能量方程求導所得的 $\ddot{\theta}$ 相同。

- 邊界情況 $\ell = 2a$ 同時符合兩種情形：釋放時 $N = 0$，而桿上與 P 相距 $2a$ 的點起始加速度恰好為 g。
- 取 $a = \ell = 1$ 及 $\mu = 1$，滑動角滿足 $\tan\theta = \frac{1}{6}$；在該角度，上述公式給出 $F/N = 6\tan\theta = 1 = \mu$。$N$ 和 F 的公式亦已用電腦驗證：以數值方法逐步模擬運動，並直接由質點的位置計算其加速度。

常見錯誤

- 誤用繞中點的轉動慣量 $\frac{1}{12}m(3a)^2$，而非繞鉸鏈的轉動慣量；長度為 L 的桿繞一端的轉動慣量是 $\frac{1}{3}mL^2$。
- 在摩擦力的方程中漏掉向心（centripetal）項 $m\ell\dot{\theta}^2$；正是這一項令分子成為 $a^2 + a\ell + \ell^2$，而不是 a^2。
- 在法向方程中把 $\ell\ddot{\theta}$ 的符號弄錯：桿正以加速度離開質點，所以 N 小於 $mg\cos\theta$，而不是大於。

STEP 之外

最後一部分是一個經典的意外結果：下落中的鉸接桿上的某一點，其加速度可以大於 g。這解釋了為何放在下落間尺末端附近的硬幣（或傾倒中的煙囪）會被「拋離」。要系統地求出 N 和 F 這類約束力（constraint forces），方法是在極坐標（polar coordinates）中寫出運動方程；而日後學到的拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）更會展示如何完全不涉及這些力而求得運動。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對剛體轉動及這些極坐標下的加速度有細緻的論述。

詳細解答

STEP III 2017，第 11 題

力學 • 動量守恆

> **STEP III 2017，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q11

本題在 *Beyond STEP* 第 10.3 節火箭與槍炮中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/rockets.html

關鍵思路

系統不受任何外來的水平力，所以每次發射時水平動量（momentum）都守恆。題目中看似古怪的對地速率 $v - V$，其實說的是一件簡單的事：拋射體（projectile）總是以相對於貨車的速率 v 射出。至於動能（kinetic energy），不必每次都從頭重新計算；應利用 $(*)$ 化簡每次發射時的能量變化，然後再加起來。

解答

把貨車、炮和拋射體都視為沿同一直線運動的質點（particle），並取向前方向（即貨車運動的方向）為正。貨車速率為 V 時發射的拋射體，其速度為 $-(v - V) = V - v$，即相對於貨車的速度為 $-v$。發射屬於系統的內部作用，而軌道是光滑的，所以每次發射時總水平動量都守恆。

第 (i) 部分

發射前一切靜止，所以動量為零。由於 $V = 0$，每枚拋射體都以速度 $-v$ 射出，而貨車（質量 M）以速率 u 向前運動：

$$Mu - nmv = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{nmv}{M}.$$

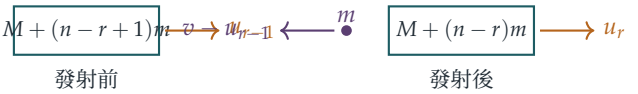
系統起初沒有動能，所以所得的能量為

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\left(1 + \frac{nm}{M}\right),$$

即為所求。

第 (ii) 部分

考慮第 r 次發射。發射前一刻，貨車載着 $n-r+1$ 枚未發射的拋射體，所以運動中的質量為 $M+(n-r+1)m$，速率為 u_{r-1}。發射後一刻，質量 $M+(n-r)m$ 以速率 u_r 運動，而一枚質量為 m 的拋射體的速度為 $u_{r-1}-v$。較早發射的拋射體不受影響，可以不予考慮。



由動量守恆得

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

把左方寫成 $\big(M+(n-r)m\big)u_{r-1} + mu_{r-1}$。於是 mu_{r-1} 項互相抵消，剩下

$$\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv, \qquad \text{所以} \qquad u_r - u_{r-1} = \frac{mv}{M+(n-r)m},$$

這就是 $(*)$。

把 $(*)$ 對 $r=1,\ldots,n$ 相加，左方伸縮相消（telescoping），且 $u_0=0$，所以

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m}.$$

每個分母都滿足 $M+(n-r)m \geq M$，所以每一項都不大於 $\dfrac{mv}{M}$。當 $r=1$ 時不等式嚴格成立，因為 $n>1$ 使 $(n-1)m>0$。因此

$$u_n < n\cdot\frac{mv}{M} = u.$$

想一想 為甚麼逐枚發射的效果會較差？

在較早的發射中，炮不僅要推動貨車，還要推動車上所有仍未發射的拋射體，所以每一發所帶來的速率增量都較小。只有 $r=n$ 這一項（最後一發，車上已無其他負載）與同時發射時每枚所佔的份額相同。

第 (iii) 部分

在第 r 次發射時，只有貨車（連同其餘負載）和剛發射的拋射體的速度會改變。所以

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1}-v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r^2-u_{r-1}^2) + \tfrac{1}{2}m\big[(v-u_{r-1})^2-u_{r-1}^2\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1})(u_r+u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}m(v^2-2vu_{r-1}). \end{aligned}$$

由 $(*)$，$\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$，所以第一項為 $\frac{1}{2}mv(u_r+u_{r-1})$。因此

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}mvu_r + \tfrac{1}{2}mvu_{r-1} + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} \\ &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r-u_{r-1}), \end{aligned}$$

即為所求。

把上式對 $r=1,\ldots,n$ 相加，並利用 $K_0=0$ 及 $u_0=0$，兩邊都伸縮相消：

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_n-u_0) = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n.$$

最後與第 (i) 部分比較。由於 $u = nmv/M$，

$$K = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmv\,u.$$

由第 (ii) 部分得 $u_n < u$，而因為 $u>0$ 且 $n>1$，所以 $u < nu$。由於 $mv>0$，

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmvu = K.$$

所以 $K_n < K$：逐枚發射所釋放的動能較少。

驗算

- 取 $n=3$、$M=10$、$m=1$、$v=1$。則 $u=0.3$，而由 $(*)$ 得 $u_3 = \frac{1}{12}+\frac{1}{11}+\frac{1}{10} = \frac{181}{660} \approx 0.274$，比 u 小，正如預期。能量分別為 $K=1.95$ 及 $K_3 = \frac{2161}{1320} \approx 1.637$。
- 對 n、M、m 和 v 的數千組隨機取值，在每一發之後直接計算每個物體的動量和動能，結果與 $(*)$ 及 K_n 的公式完全吻合；這已經由電腦驗證。
- 極限情況：若 $m \ll M$，$(*)$ 的每一項都接近 mv/M，所以 $u_n \approx u$，而兩個能量都接近 $\frac{1}{2}nmv^2$。當貨車非常重時，發射的方式幾乎沒有影響。

常見錯誤

- 忘記未發射的拋射體隨貨車一起運動，在第 r 發之前用了質量 M 而不是 $M+(n-r+1)m$。

- 把拋射體的速度寫成 $-v$ 而不是 $u_{r-1} - v$：題目規定的是它相對於地面的速率為 $v - V$，而不是 v。
- 在 $K_r - K_{r-1}$ 中計入較早發射的拋射體的動能。它們不受影響，會互相抵消。

STEP 之外

這是火箭運動的離散版本。若把 n 發炮彈換成連續不斷的廢氣噴流，u_n 的總和便會變成積分，並得出齊奧爾科夫斯基火箭方程（Tsiolkovsky rocket equation），$\Delta u = v\ln(m_0/m_1)$。火箭的處境就像逐枚發射的貨車：它的燃料不可能在一瞬間全部燒完，所以要付出第 (ii) 部分所揭示的代價。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對變質量系統和火箭有詳細的論述。

詳細解答

STEP III 2017，第 12 題

概率與統計 • 離散聯合分佈

> **STEP III 2017，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q12

關鍵思路

一切都源自兩條標準求和公式：$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n(n+1)$ 及 $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。首先令所有概率之和為 1，從而定出 k。然後對 y 求和，得出邊際分佈（marginal distribution）。至於協方差（covariance），我們需要 $\mathrm{E}(X)$ 和 $\mathrm{E}(XY)$。由於 $x+y$ 對 x 和 y 是對稱的，這種對稱性（symmetry）可以省去一半功夫。

解答

第 (i) 部分

所有 n^2 個數對 (x,y) 的概率之和必須為 1。由對稱性，$\sum_{x,y} x = \sum_{x,y} y$。由於對 y 的 n 個取值，每個 x 都各出現一次，所以兩者皆等於 $n\sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{2}n^2(n+1)$。因此

$$1 = k\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}(x+y) = k\cdot 2\cdot \tfrac{1}{2}n^2(n+1) = k\,n^2(n+1), \qquad \text{故} \qquad k = \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

求 X 的邊際分佈時，固定 x 並對 y 求和：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=x) &= k\sum_{y=1}^{n}(x+y) = k\Big(nx + \tfrac{1}{2}n(n+1)\Big) = \frac{kn\,(2x+n+1)}{2}\\ &= \frac{n+1+2x}{2n(n+1)},\end{aligned}$$

這正是所求結果。由於 $x+y$ 對 x 和 y 對稱，Y 具有相同的分佈：$\mathrm{P}(Y=y) = \dfrac{n+1+2y}{2n(n+1)}$。

想一想 要證明 X 與 Y 不獨立，是否需要逐一檢查每個數對 (x,y)？

不需要。獨立（independence）要求對每一個數對都有 $\mathrm{P}(X=x,Y=y)=\mathrm{P}(X=x)\,\mathrm{P}(Y=y)$，所以只要找到一個不成立的數對便足夠。取 $x=y=1$：

$$\mathrm{P}(X=1,Y=1)=2k=\frac{2}{n^2(n+1)},\qquad \mathrm{P}(X=1)\,\mathrm{P}(Y=1)=\frac{(n+3)^2}{4n^2(n+1)^2}.$$

兩者相等當且僅當 $8(n+1)=(n+3)^2$，即 $n^2-2n+1=0$，亦即 $(n-1)^2=0$。所以兩者只在 $n=1$ 時相等。由於 $n\geq 2$，兩個概率不相等，因此 X 與 Y **不獨立**。

第 (ii) 部分

我們使用 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$，並留意由於兩個變量分佈相同，$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)$。

期望值（expectation）。利用第 (i) 部分的邊際分佈，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\frac{1}{2n(n+1)}\sum_{x=1}^{n}\big((n+1)x+2x^2\big)=\frac{1}{2n(n+1)}\Big(\tfrac{1}{2}n(n+1)^2+\tfrac{1}{3}n(n+1)(2n+1)\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{n+1}{2}+\frac{2n+1}{3}\Big)=\frac{7n+5}{12}.\end{aligned}$$

乘積的期望值。這裏 $xy(x+y)=x^2y+xy^2$，由對稱性，兩部分的二重和相等。此外，x^2y 的二重和可分解為兩個單重和的乘積：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY)&=k\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}xy(x+y)=2k\Big(\sum_{x=1}^{n}x^2\Big)\Big(\sum_{y=1}^{n}y\Big)=2k\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{6\,n^2(n+1)}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

協方差。以 144 為公分母，把結果合併：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(7n+5)^2}{144}=\frac{24(2n^2+3n+1)-(49n^2+70n+25)}{144}\\&=\frac{-n^2+2n-1}{144}=-\frac{(n-1)^2}{144}.\end{aligned}$$

由於 $n\geq 2$，$(n-1)^2>0$，所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=-\dfrac{(n-1)^2}{144}<0$。協方差為負，正如所求。

協方差為負是合理的。聯合概率只取決於 $x+y$，傾向於使總和較大。如果 X 已經很大，Y 便不必同樣很大也能使總和變大，所以 Y 變大的「理由」稍為少了一點。

驗算

- 取 $n=2$。此時 $k=\frac{1}{12}$，四個概率分別為 $\frac{2}{12},\frac{3}{12},\frac{3}{12},\frac{4}{12}$，總和為 1。邊際概率為 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{5}{12}$ 及 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{7}{12}$，與公式吻合。於是 $\mathrm{E}(X)=\frac{19}{12}$，而 $\mathrm{E}(XY)=\frac{2+6+6+16}{12}=\frac{5}{2}$。由此得 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{5}{2}-\frac{361}{144}=-\frac{1}{144}$，與 $-(n-1)^2/144$ 一致。
- 邊際概率之和為 1：$\sum_x(n+1+2x)=n(n+1)+n(n+1)=2n(n+1)$。
- 令獨立性檢驗失效的 $(n-1)^2$，正正也是令協方差為零的那個值。在兩者中，$n=1$ 都是退化情況，此時必然有 $X=Y=1$。
- 以電腦對 $n=2,\ldots,29$ 的精確分佈作檢驗，確認了 k、邊際分佈、$\mathrm{E}(X)$、$\mathrm{E}(XY)$ 及協方差公式。

常見錯誤

- 忘記 $\sum_{x,y}x$ 中由對 y 求和而來的因子 n。這樣會得出 $k=1/(n(n+1))$，這是錯誤的。
- 試圖「一般地」證明不獨立，而不是給出一個明確的數對。單一個反例（counterexample）既已足夠，也是最清晰的論證。
- 以為必須有非零協方差才能證明相依。在本題中非零協方差確實顯示了相依，但協方差為零並不能證明獨立。

STEP 之外

形如 $f(x,y)=g(x+y)$ 的聯合分佈（joint distribution），是一個簡單的模型，描述通過總和而互相關聯的變量。此時協方差的正負取決於 g 的形狀。本題中 g 是線性的，協方差是一個很小的負數。在大學裏，聯合分佈、邊際分佈、條件分佈（conditional distribution）及相關（correlation）會一併學習，而連續情況則以二重積分代替二重和。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）以接近 STEP 的風格講解這些內容。

詳細解答

STEP III 2017，第 13 題

概率與統計 • 期望值與方差

> **STEP III 2017，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q13

關鍵思路

把 $X - x$ 寫成 $(X - \mu) + (\mu - x)$。第一部分的平均值（mean）為零，所以平方後取期望值（expectation）時，交叉項（cross term）會消失。剩下的就是方差（variance）加上一個常數，這與「$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \mu^2$」是同一條恆等式。至於均勻分佈（uniform distribution）的情況，Y 是 X 的函數，但並非一對一（one-to-one），所以求它的概率密度函數（probability density function）最穩妥的方法，是經由它的累積分佈函數（cumulative distribution function）入手。

解答

函數 V

對任何固定的數 x，

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(x) = \mathrm{E}\big((X-x)^2\big) &= \mathrm{E}\big(((X-\mu)+(\mu-x))^2\big)\\ &= \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big) + 2(\mu-x)\,\mathrm{E}(X-\mu) + (\mu-x)^2\\ &= \sigma^2 + (x-\mu)^2,\end{aligned}$$

這裏用了期望值的線性性質（linearity of expectation）（此處 $\mu - x$ 是常數）以及 $\mathrm{E}(X - \mu) = 0$。

Y 的平均值

由於 $\mathrm{V}(x) = \sigma^2 + (x - \mu)^2$ 對每個實數 x 都成立，我們可以代入 $x = X$：

$$Y = \mathrm{V}(X) = \sigma^2 + (X-\mu)^2.$$

想一想 既然 V 是由期望值定義的，$\mathrm{V}(X)$ 豈不是只是一個數？

不是：V 是一個普通的實變數函數（一個關於 x 的二次式）。取期望值時 x 是固定不變的。把隨機變量（random variable）X 代入這個二次式，便得到一個新的隨機變量。所以

$$\mathrm{E}(Y) = \sigma^2 + \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2,$$

這就是 $(*)$。

均勻分佈的情況

若 X 在 $[0,1]$ 上均勻分佈，則 $\mu = \frac{1}{2}$，而 $\sigma^2 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$。因此

$$\mathrm{V}(x) = \tfrac{1}{12} + \big(x - \tfrac{1}{2}\big)^2 = x^2 - x + \tfrac{1}{3}.$$

Y 的分佈。 現在 $Y = \frac{1}{12} + (X - \frac{1}{2})^2$。當 X 取遍 $[0,1]$ 時，$|X - \frac{1}{2}|$ 取遍 $[0, \frac{1}{2}]$，所以 Y 的取值範圍是 $[\frac{1}{12}, \frac{1}{12} + \frac{1}{4}] = [\frac{1}{12}, \frac{1}{3}]$。

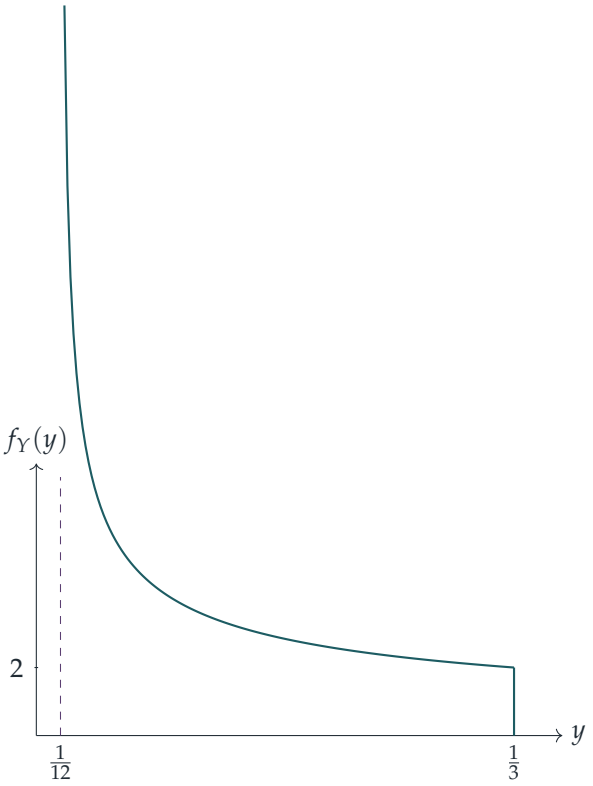
映射 $X \mapsto Y$ 是二對一的（點 $\frac{1}{2} \pm h$ 給出相同的 Y），所以我們改用分佈函數處理。對於 $\frac{1}{12} \le y \le \frac{1}{3}$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y \le y) &= \mathrm{P}\big((X-\tfrac{1}{2})^2 \le y - \tfrac{1}{12}\big) = \mathrm{P}\big(\tfrac{1}{2} - s \le X \le \tfrac{1}{2} + s\big), \quad \text{其中} s = \sqrt{y - \tfrac{1}{12}},\\ &= 2s = 2\sqrt{y - \tfrac{1}{12}},\end{aligned}$$

因為 $0 \le s \le \frac{1}{2}$，所以該區間位於 $[0,1]$ 之內，長度為 $2s$。（在 $y = \frac{1}{3}$ 時，這給出 $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$，理應如此。）求導，得

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y - \frac{1}{12}}} \quad \text{當} \tfrac{1}{12} < y \le \tfrac{1}{3}, \qquad f_Y(y) = 0 \text{ 其他情況。}$$

這個概率密度函數在 $y = \frac{1}{12}$ 附近無界，但仍然可積（integrable）：Y 最有可能接近它的最小值，因為 $(X - \frac{1}{2})^2$ 在 $X = \frac{1}{2}$ 附近很平坦。



驗證 $(*)$。 利用概率密度函數，並代換 $t = y - \frac{1}{12}$（於是 t 由 0 變到 $\frac{1}{4}$），

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{1/12}^{1/3} \frac{y}{\sqrt{y - \frac{1}{12}}}\,\mathrm{d}y = \int_0^{1/4} \left(t^{1/2} + \tfrac{1}{12}t^{-1/2}\right)\mathrm{d}t = \left[\tfrac{2}{3}t^{3/2} + \tfrac{1}{6}t^{1/2}\right]_0^{1/4}$$
$$= \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{6}.$$

由於 $2\sigma^2 = 2\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$，結果與 $(*)$ 吻合。

驗算

- 概率密度函數的積分等於 1：$\int_0^{1/4} t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$。
- $\mathrm{V}(x)$ 在 $x = \mu$ 處取最小值，最小值為 σ^2：平均值正是使期望平方距離最小的那一點。在均勻分佈的情況下，$\mathrm{V}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$，即 Y 取值範圍的下端。
- 以 400 000 個均勻分佈的數值進行電腦模擬，得到 Y 的樣本平均值約為 0.1667，與 $\frac{1}{6}$ 吻合。

常見錯誤

- 把 $\mathrm{V}(X)$ 當作常數 σ^2，結果得出 $\mathrm{E}(Y) = \sigma^2$。
- 使用一對一的變數變換公式 $f_Y = f_X \left|\mathrm{d}x/\mathrm{d}y\right|$ 時只計算了一個分支，結果只得到正確概率密度函數的一半。其實 $X = \frac{1}{2} + s$ 和 $X = \frac{1}{2} - s$ 兩者都有貢獻。

STEP 之外

$\mathrm{V}(x) = \sigma^2 + (x - \mu)^2$ 是最簡單的偏差–方差分解（bias–variance decomposition）。如果你用 x 去估計某個量，均方誤差（mean squared error）就會分拆為數據本身的離散程度加上偏差的平方。結果 $\mathrm{E}(Y) = 2\sigma^2$ 說明，X 的兩個獨立副本之間的期望平方距離是 $2\sigma^2$。統計學家一再用到這個事實，例如在解釋為何樣本方差（sample variance）要除以 $n - 1$ 時。Blitzstein 與 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）涵蓋了這兩個概念，也講解了如何求隨機變量的非單調函數的概率密度函數。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2017 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。